第四章 线性方程组

本章编排：§4.1 方程组有解判别定理；§4.2 齐次线性方程组，基础解系

§4.3 非齐次线性方程组的解

§4.1 方程组有解判别定理

一、定义

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

称为 n 元一次线性代数方程组。

$b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$：齐次线性方程组。

$b_1, b_2, \cdots, b_m$ 非全 0：非齐次线性方程组。

[注]：（1）方程个数 m，未知量个数 n 可为任意正整数， $m > n \quad or \quad m < n \quad or \quad m = n$

（2）方程可以无解、有解，有解时可有唯一解，也可有多解。

二、有解判别定理

定理 1：线性方程组有解的充分必要条件是其系数矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

与其增广矩阵

$$B = \left[A \mid b \right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

具有相同的秩。即 $R(A) = R(B)$

证明：利用方程组的向量形式：$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$

充分性：因 $R(A) = R(B)$，且 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\} \subset \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta\}$，因此

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的最大线性无关组也是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta$ 的最大无关组，故 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表出，即方程组有解。

必要性：因方程组有解，即 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表出，因此 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta$ 等价，故有 $R(A)=R(B)$。

定理 2：方程组：（1）有唯一解的充分必要条件是：$R(A)=R(B)=n$

（2）有多解的充分必要条件是：$R(A)=R(B)<n$

证明：充分性：因 $R(A)=R(B)=n$，故方程有解。设有二解：

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=\beta$$

$$l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_n\alpha_n=\beta$$

两式相减：$(k_1-l_1)\alpha_1+(k_2-l_2)\alpha_2+\cdots+(k_n-l_n)\alpha_n=O$，因 $R(A)=n$，故 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关，因而有：$k_i=l_i$，　$i=1,2,\cdots,n$，即有唯一解。

充分性证法 2：因 $R(A)=R(B)=n$，故 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 无关，而 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta$ 相关，因此 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 唯一线性表出，即有唯一解。

必要性：若 $R(A)<n$，则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性相关，故存在非全 0 数组 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 使：

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=O$$

因有解，设 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$，两式相加：

$$(k_1+x_1)\alpha_1+(k_2+x_2)\alpha_2+\cdots+(k_n+x_n)\alpha_n=\beta$$

即 k_i+x_i，　$i=1,2,\cdots,n$ 也是原方程组的一个解，但不同于 x_i，即至少有两解。与唯一解矛盾，故 $R(A)=n$。

（2）为（1）的逆否。

例 1：下列方程组在 λ 取何值时有解、无解、有唯一解、有多解？

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

解：解法 1——行列式法（仅适用于 A 为方阵时）

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

（1）当$|A| \neq 0$时，$R(A)=R(B)=n$，有唯一解。即当$\lambda \neq 1$且$\lambda \neq -2$时，方程有唯一解。

（2）当$|A|=0$时，即$\lambda = 1$或$\lambda = -2$时，可能有多解，也可能无解。

① $\lambda = 1$时：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

显然$R(A)=R(B)=1<n=3$，方程有多解。

② $\lambda = -2$时：

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

计算有：$R(A)=2$，$R(B)=3$，无解。

解法 2——初等变换法（适用于任意情况）

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{row} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{row} \cdots \xrightarrow{row} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(\lambda-1) \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(\lambda+2) & (1-\lambda)(1+\lambda)^2 \end{bmatrix}$$

故：当$\lambda \neq 1$且$\lambda \neq -2$时，方程有唯一解。

当$\lambda = 1$时，方程有多解。

当$\lambda = -2$时，$R(A)=2$，$R(B)=3$，无解。

[注]：法 2 中，为了由 B 矩阵做初等变换既求$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})$又求$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B})$，只可用行变换，不可进行列变换；如果既行变也列变则只能求$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B})$。例如:

$$B=\left[\begin{array}{cc|c}1&0&1\\0&1&1\end{array}\right]\xrightarrow[c2+c1]{colum}\left[\begin{array}{cc|c}1&1&1\\0&1&1\end{array}\right]\xrightarrow[c2-c3]{colum}\left[\begin{array}{cc|c}1&0&1\\0&0&1\end{array}\right]$$，实际上 $R(A)=R(B)=2$

习题二：4，5，6，习题四：27

第 2 版：习题三：4，5，6，习题四：27

§ 4.2 齐次线性方程组，基础解系

一、齐次线性方程组的解

推论：n 元一次齐次线性方程组：$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 总有解。且

（1） 只有 0 解的充要条件是：$R(A)=n$

（2） 有非 0 解（多解）的充要条件是：$R(A)<n$

解向量：将解写为 n 维列向量形式，$\xi=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$

齐次线性方程组解向量的性质：

（1） 若 ξ_1,ξ_2 都是齐次方程组的解，则 $\xi_1+\xi_2$ 也是其解。

（2） 若 ξ 是其解，则 $\forall k\in R$， $k\xi$ 也是其解。

推广：若 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 是其解，则 $\forall k_1,k_2,\cdots,k_s\in R$, $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_s\xi_s$ 也是其解。

易证。

[注]：由（1）（2）可知，齐次线性方程组的全体解向量构成一向量空间。

例 1：求解齐次线性方程组：

$$\begin{cases}x_1+x_2-3x_3-x_4=0\\3x_1-x_2-3x_3+4x_4=0\\x_1+5x_2-9x_3-8x_4=0\end{cases}$$

解：消元法等效为行初等变换，化为行最简形

$$A=\begin{bmatrix}1&1&-3&-1\\3&-1&-3&4\\1&5&-9&-8\end{bmatrix}\xrightarrow{row}\cdots\xrightarrow{row}\begin{bmatrix}1&1&-3&-1\\0&-4&6&7\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{row}\cdots\xrightarrow{row}\begin{bmatrix}1&0&-3/2&3/4\\0&1&-3/2&-7/4\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\text{故：}\begin{cases}x_1=(3/2)x_3-(3/4)x_4\\x_2=(3/2)x_3+(7/4)x_4\\x_3=x_3\\x_4=x_4\end{cases}$$

写为解向量形式：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3/2)x_3-(3/4)x_4 \\ (3/2)x_3+(7/4)x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3\begin{bmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix} -3/4 \\ 7/4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= k_1\xi_1 + k_2\xi_2 ,\quad k_1 , k_2 \in R$$

二、基础解系

当$R(A)<n$时，齐次方程组有非 0 解（多解），能否将每个解用一组特定的解唯一表示呢？结论是肯定的，如上例。

定义：设齐次方程组满足$R(A)<n$，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$是其 s 个解向量，如果

（1）$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$线性无关

（2）其任一解都可由$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$线性表出。

则称$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$为该齐次线性方程组的一个基础解系。

[注]:（1）基础解系实质为齐次线性方程组解向量空间的一个基组。

（2）基础解系不唯一。

例 2：例 1 中，通解$=k_1\xi_1+k_2\xi_2$，且ξ_1,ξ_2 线性无关，故ξ_1,ξ_2 是其一基础解系。

另外，令$\xi_1'=2\xi_1=\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \xi_2'=4\xi_2=\begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$，显然$\xi_1',\xi_2'$也是其一个基础解系。

定理：设 n 元一次齐次线性方程组满足$R(A)=r<n$，则其基础解系包含$n-r$个解向量。

证明：将 A 经行初等变换化为行最简形：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \xrightarrow{row} \cdots \xrightarrow{row} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1r+1} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2r+1} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{rr+1} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

故通解为：$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1n}x_n \\ -c_{2r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{2n}x_n \\ \vdots \\ -c_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_{r+1}\begin{bmatrix} -c_{1r+1} \\ -c_{2r+1} \\ \vdots \\ -c_{rr+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} -c_{1n} \\ -c_{2n} \\ \vdots \\ -c_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

$$= k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}, \quad k_1, k_2, \cdots, k_{n-r} \in R$$

且$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$线性无关，是原方程组一基础解系，含$n-r$个解向量。

**【注】也可由正交补空间证明该定理:

设$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}$，由 A 的行组生成的空间为：$\boldsymbol{V_A} = \boldsymbol{L}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$，且$\dim \boldsymbol{V_A} = \boldsymbol{r}$。

设$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$的解空间为$\boldsymbol{V_X}$：则

$\forall \boldsymbol{X} \in \boldsymbol{V_X}$，$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$，即有$\beta_i \boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{i} = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \cdots, \boldsymbol{m}$，从而$\boldsymbol{X} \perp \boldsymbol{V_A} \Rightarrow \boldsymbol{V_X} \perp \boldsymbol{V_A}$。由于$\boldsymbol{V_X}$包含了所有与$\boldsymbol{V_A}$正交的 n 维向量，因此$\boldsymbol{V_X}$是$\boldsymbol{V_A}$的正交补空间，故有$\dim \boldsymbol{V_A} + \dim \boldsymbol{V_X} = \boldsymbol{n}$。

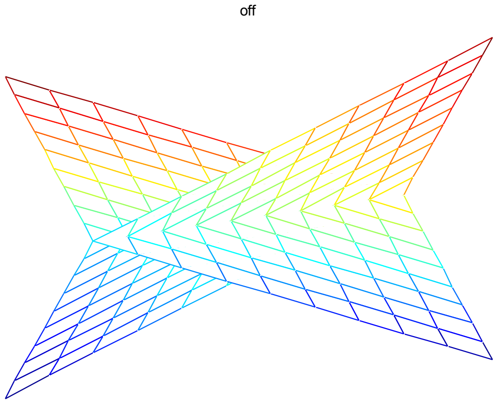
例 3：上例中的基础解系包含$n-r = 4-2 = 2$个解向量。

例 4：考虑下列齐次线性方程组的解在R^3上的几何意义：

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases}$$

解：$A \xrightarrow{row} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{row} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{row} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = y\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = t\xi, \quad t \in R$，或$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$



解释：此方程组的每个方程为R^3上过原点的一个平面，该二平面相交于一条过原点的直线，该直线就是方程组的解（多解）。通解的解析表示就是该直线的参数方程。基础解系解向量就是该直线上的一个非 0 向量。

例 5：证明，对任一矩阵 A， $R(A)=R(AA^T)=R(A^TA)$

证明：（1）证 $R(A)=R(A^TA)$

设$\forall\xi$为$Ax=0$的解，则$A^TA\xi=A^T0=0$，即ξ也是$A^TAx=0$的解；

设$\forall\xi$为$A^TAx=0$的解，则$\xi^T(A^TA\xi)=0$，即$(A\xi)^TA\xi=0\Leftrightarrow\|A\xi\|^2=0\Leftrightarrow A\xi=0$

故$A^TAx=0$的解也是$Ax=0$的解，因此$A^TAx=0$与$Ax=0$同解。所以

$$R(A)=R(A^TA)$$

（2）证 $R(A)=R(AA^T)$

因$R(A)=R(A^T)$，故只需证$R(A^T)=R(AA^T)$。令$A^T=B$，即证$R(B)=R(B^TB)$

与（1）所证相同，得证。

三、基础解系、通解的求解步骤

$$\text{系数矩阵}\xrightarrow{\text{行初等变换}}\text{行最简矩阵}\longrightarrow\text{通解向量}\xrightarrow{\text{向量分解}}\text{基础解系}$$

习题四：16，25，29，30，35

第 2 版：习题四：16，25，29*，30*

§ 4.3 非齐次线性方程组的解

一、解的结构

定义：设有非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$，称 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 为该非齐次线性方程组对应的齐次线性方程组，或称为其导出方程组。

解的性质：

（1） 设 η 是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的解，ξ 为其导出组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的解，则 $\eta+\xi$ 是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的解。

（2） 设 η_1,η_2 是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的两个解，则 $\eta_1-\eta_2$ 是其导出组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的解。

（3） 设 $\eta_1,\eta_2\cdots,\eta_m$ 是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的 m 个解，则 $\left(\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_m\right)/m$ 是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的一个解。

$\left(k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_m\eta_m\right)/\left(k_1+k_2+\cdots+k_m\right)$ 也是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的一个解。

定理：设 η 是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的一个解（特解），$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是其导出组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系，则 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的通解为：

$$\mathbf{x}=\eta+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r},\quad k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}\in R$$

证明：设 $\mathbf{x}$ 是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的任一解，因 η 是其一特解，故 $\mathbf{x}-\eta$ 为其导出组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的解，必可由 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性表出：

$$\mathbf{x}-\eta=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r},\quad k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}\in R$$

移项即得。

二、求解方法

增广矩阵 $\xrightarrow{\text{行初等变换}}$ 行最简矩阵 $\longrightarrow$ 通解向量 $\xrightarrow{\text{向量分解}}$ 解的结构

例 1：解方程组：

$$\begin{cases} x_1+x_2-3x_3-x_4=1 \\ 3x_1-x_2-3x_3+4x_4=4 \\ x_1+5x_2-9x_3-8x_4=0 \end{cases}$$

解：$$B=\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 0 \end{array}\right]\xrightarrow{row}\cdots\xrightarrow{row}\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -3/2 & 3/4 & 5/4 \\ 0 & 1 & -3/2 & -7/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (3/2)x_3-(3/4)x_4+5/4 \\ (3/2)x_3+(7/4)x_4-1/4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix} -3/4 \\ 7/4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 5/4 \\ -1/4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\eta,\quad k_1,k_2\in R$$

例 2：解方程组：

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & -1 & -1 \\ 3 & 9 & 4 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

解：$B = \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 3 & 3 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 9 & 4 & -5 & 1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{row} \cdots \xrightarrow{row} \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 3 & 0 & -3/5 & -1/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & 2/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_2 + 3/5x_4 + 1/5x_5 + 3/5 \\ x_2 \\ 1/5x_4 - 2/5x_5 + 4/5 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 1/5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 1/5 \\ 0 \\ -2/5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 4/5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= k_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 1/5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 1/5 \\ 0 \\ -2/5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 4/5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k_1, k_2, k_3 \in R$$

[注]：注意此题中自由变量的选择。

例 3：已知：

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ a \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ b \\ 4 \end{bmatrix}$$

问：（1）a, b 为何值时，β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出？

（2）a, b 为何值时，β 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 唯一线性表出？

（3）a, b 为何值时，β 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出但不唯一？写出其表达式.

解：实质为方程组问题，为此令：$\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$，讨论其解的存在性。

$$B=[A\mid\beta]=[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\mid\beta]=\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&0&3\\4&7&1&10\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\end{array}\right]\xrightarrow{row}\cdots\xrightarrow{row}\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&0&a-1&0\\0&0&0&b-2\end{array}\right]$$

（1） 当$b\neq 2$时，$R(B)>R(A)$，无解。即β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出。

（2） 当$b=2$，且$a\neq 1$时，$R(A)=R(B)=3=n$，有唯一解。即β可唯一由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出。

（3） 当$b=2$，且$a=1$时，$R(A)=R(B)=2<3=n$，有多解。即β的表示不唯一，且

$$\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&0&a-1&0\\0&0&0&b-2\end{array}\right]\xrightarrow{a=1,b=2}\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&2&-1\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2x_3-1\\x_3+2\\x_3\end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix},\quad k\in R$$

即$\beta=-(2k+1)\alpha_1+(k+2)\alpha_2+k\alpha_3\ ,k\in\mathbf{R}$

（1，2版）习题四：26，31，37