第三章 n维向量空间

本章编排：§3.1　向量及其运算；§3.2 向量组的线性相关性；

§3.3 向量组的秩；§3.4 n维向量空间；§3.5 欧氏空间；

§3.1　向量及其运算

一、向量

定义：由n个数$a_1,a_2,\cdots,a_n$构成的有序数组, 记作$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, 称为$n$维向量．$a_i$称为$\alpha$的第$i$个分量。

[注]：（1）也可写成列的形式。

（2）$a_i\in \mathrm{R}$：实向量（主要讨论）；$a_i\in \mathrm{C}$：复向量

（3）零向量：$O=(0,0,\cdots,0)$

（4）负向量：$-\alpha=(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$

例、熟悉的2维3维几何空间上的向量：

$\alpha=(x,y),\alpha=(x,y,z)$ 画图表示

二、向量的运算： 设$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$

1、相等：若$a_i=b_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，称$\alpha=\beta$.

2、加法：$\alpha+\beta\overset{\Delta}{=}(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$；(R2 几何空间上等效平行四边形法则合成)

3、数乘：$k\alpha\overset{\Delta}{=}(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$

4、运算：满足代数运算规则

[注]：（1）向量看作矩阵时可转置：$\alpha^T=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}$

（2）向量看作矩阵时可与自身的转置相乘：$\alpha\alpha^T,\alpha^T\alpha$，乘积结果为数或方阵

例、已知$\alpha_1=(2,3,4,5),\alpha_2=(-1,0,1,2),\alpha_3=(-3,3,3,0)$求满足下列关系式的$x$：

$$2(\alpha_1+2x)-5(\alpha_2+x)+\alpha_3=0$$

解：看作一般的方程解之：

$$x=2\alpha_1-5\alpha_2+\alpha_3=2(2,3,4,5)-5(-1,0,1,2)+(-3,3,3,0)=(6,9,6,0)$$

§3.2 向量组的线性相关性

向量组：同类向量的集合。

一、线性组合：

给定向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$和一组数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，称$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$为向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的线性组合。

二、线性表示

给定向量$\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，若存一组数$k_1,k_2,\cdots,k_m$使得$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$，称$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示（出）。

例 1：任一 n 维向量α可由单位向量组$\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0)$，$\varepsilon_2=(0,1,\cdots,0)$，$\cdots,\varepsilon_n=(0,0,\cdots,1)$表示。

解：令

$$\begin{aligned}\alpha&=k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_n\varepsilon_n=k_1(1,0,\cdots,0)+k_2(0,1,\cdots,0)+\cdots+k_n(0,0,\cdots,1)\\&=(k_1,k_2,\cdots,k_n)\end{aligned}$$

$\therefore k_i=a_i, i=1,2,\cdots,n$，即$\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n$

例 2：将线性方程组表示为向量形式：$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$

解：令：

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{bmatrix},\cdots,\alpha_n=\begin{bmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{bmatrix},\beta=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{bmatrix},\text{有}$$

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$$

方程组有无解的含义为：**给定的 β 能否由给定的 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表出**；解方程组的含义为**将给定的 β 由给定的 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表出**。

例 3：试将向量 $\beta=(3,2)$ 用 $\alpha_1=(1,0), \alpha_2=(1,1)$ 线性表出。

解：令 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2=(x_1+x_2, x_2)$ 有 $\begin{cases} x_1+x_2=3 \\ x_2=2 \end{cases} \Rightarrow x_1=1, x_2=2$

$$\therefore \beta=\alpha_1+2\alpha_2$$

三、向量组的线性相关性

定义 a：对 n 维向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$，若存在不全为 0 的数组 $k_1,\cdots,k_m$，使得

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m=O$$

称向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，否则称为线性无关（线性独立）.

[注]：① 线性无关：对 n 维向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$，当且仅当数组 $k_1,\cdots,k_m$ 全为 0 时，才有

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m=O$$

称向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，否则称为线性相关.

② 对于单个向量 α：若 $\alpha=O$，则 α 线性相关；

若 $\alpha\neq O$，则 α 线性无关.

定义 b：若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ $(m\geq 2)$ 中至少有一个向量可由其余 $m-1$ 个向量线性表示，称向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，否则称为线性无关（线性独立）.

证 a$\rightarrow$b．已知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，则存在 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 不全为零，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=O$$

不妨设 $k_1\neq 0$，则有 $\alpha_1=(-\frac{k_2}{k_1})\alpha_2+\cdots+(-\frac{k_m}{k_1})\alpha_m$．即 α_1 可由其余线性表示。

a$\leftarrow$b．不妨设 $\alpha_1=k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$，则有

$$(-1)\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=O$$

因为$-1,k_2,\cdots,k_m$不全为零，所以$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关.

例 1、已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，证明向量组

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2\,,\ \beta_2=\alpha_2+\alpha_3\,,\ \beta_3=\alpha_3+\alpha_1 \text{线性无关.}$$

证：　令$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=O$，则有

$$\left(k_1+k_3\right)\alpha_1+\left(k_1+k_2\right)\alpha_2+\left(k_2+k_3\right)\alpha_3=O$$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，所以

$$\begin{cases}k_1+k_3=0\\k_1+k_2=0\\k_2+k_3=0\end{cases}，\text{即}\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

其系数行列式$\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq0$，该方程组只有唯一零解.

故β_1,β_2,β_3线性无关.

思考：若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，则$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性相关，试证之。

例 2、 判断单位向量组

$$\varepsilon_1=(1,0,0,\cdots,0)，\ \varepsilon_2=(0,1,0,\cdots,0)，\ \cdots，\ \varepsilon_n=(0,0,\cdots,0,1)$$

的线性相关性.

解：　令　$k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_n\varepsilon_n=O$，则有

$$(k_1,k_2,\cdots,k_n)=O\text{，有}k_1=0,k_2=0,\cdots,k_n=0$$

故$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$线性无关.

例 3、证明任何含有零向量的向量组线性相关。

证：设向量组为$O,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，显然：

$$0\alpha_1+\cdots+0\alpha_m+kO=O\,,\,k\neq0$$

例 4、两个向量线性相关的充要条件是其分量成比例。

证：α_1,α_2线性相关，则有非全 0 常数k_1,k_2使$k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2=O$。设$k_1\neq0$有

$$\varepsilon_1 = -\frac{k_2}{k_1}\varepsilon_2 = k\varepsilon_2$$

即其分量成比例。

*例 5：设α_1,α_2线性无关，且α与α_1,α_2的任意非 0 线性组合都线性无关，证α,α_1,α_2线性无关。

证：令$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha=0$，若$k_3\neq 0$则$-\frac{1}{k_3}\left(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2\right)=\alpha$，即$\alpha$可由$\alpha_1,\alpha_2$的非 0 线性组合表出（因$\alpha\neq 0$），与题设矛盾，故$k_3=0$，因而$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=0$。又因$\alpha_1,\alpha_2$线性无关，故$k_1=k_2=0$。从而$\alpha,\alpha_1,\alpha_2$线性无关。

四、线性相关的判别定理

定理 1　若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关，而$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$线性相关，

则β可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$唯一地线性表示.

证明：　因为$\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta$线性相关，所以存在数组$k_1,\cdots,k_m,k$不全为零，

使得$k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m+k\beta=O$，其中$k$一定不为 0，因为

若$k=0$，则有　$k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m=O$且$k_1,k_2,\cdots,k_m$不全为 0，从而

有$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关，与条件矛盾！从而有

$$\beta=(-\frac{k_1}{k})\alpha_1+\cdots+(-\frac{k_m}{k})\alpha_m$$

唯一性：

设有两种表示：$\beta=k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m$，　$\beta=l_1\alpha_1+\cdots+l_m\alpha_m$

相减有　　$(k_1-l_1)\alpha_1+\cdots+(k_m-l_m)\alpha_m=O$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关，所以

$k_1-l_1=0,\cdots,k_m-l_m=0 \Rightarrow k_1=l_1,\cdots,k_m=l_m$

即β的表示式唯一.

定理 2　若一个向量组的一个部分组线性相关，则该向量组线性相关。

证：不妨设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1},\cdots,\alpha_m$ 中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，则存在不全为零的数组 $k_1,\cdots,k_s$，使得 $k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=O$ 从而有 $k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s+0\alpha_{s+1}+\cdots+0\alpha_m=O$

因数组 $k_1,\cdots,k_s,0,\cdots,0$ 不全为零，故 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1},\cdots,\alpha_m$ 线性相关.

推论（逆否）： 若一向量组线性无关，则其任意的部分组线性无关.

画图说明。

定理 3：若一组向量线性无关，则其每个向量在相同位置增加若干任意分量后的向量组也线性无关。

推论：若一组向量线性相关，则其每个向量在相同位置减少若干分量后的向量组也线性相关。

习题四（1，2 版)：2，3，5，6，7*，9

§3.3 向量组的秩

一、向量组的等价

定义：设有二向量组：$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$； $B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$，

若 A 组中每个向量均可由 B 组线性表出，称向量组 A 可由向量组 B 线性表出。

若 A 组与 B 组可以相互线性表出，称 A 向量组与 B 向量组等价。记为：$A\sim B$。

性质：1、反身性：$A\sim A$

2、对称性：$A\sim B\Leftrightarrow B\sim A$

3、传递性：$A\sim B,B\sim C\Rightarrow A\sim C$

例如：$\boldsymbol{\alpha_1=(1,0)}$，$\boldsymbol{\alpha_2=(0,1)}$；$\boldsymbol{\beta_1=(1,1)}$，$\boldsymbol{\beta_2=(1,2)}$ 二向量组等价。$\boldsymbol{R}^2$ 画图说明。

对矩阵 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_m\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n\end{pmatrix}$，

其每行可看作一 n 维行向量，A 可看作由 m 个行向量构成。称为 A 的行向量组。

其每列可看作一 m 维列向量，A 可看作由 n 个列向量构成。称为 A 的列向量组。

例 1：证明，若 $C=AB$，则

（1） C 的列向量组可由 A 的列向量组线性表示。

（2） C 的行向量组可由 B 的行向量组线性表示。

证明：设$C_{m\times n}=A_{m\times s}B_{s\times n}$

（1） 令$C=\begin{pmatrix}\gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_n\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_s\end{pmatrix}$，由$C=AB$有：

$$\begin{pmatrix}\gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_s\end{pmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn}\end{bmatrix}$$

即C的列向量组可由A的列向量组线性表出。

（2） 令$C=\begin{bmatrix}\eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_m\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}\beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_s\end{bmatrix}$，由$C=AB$有：

$$\begin{bmatrix}\eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{2s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_s\end{bmatrix}$$

即C的行向量组可由B的列向量组线性表出。

[注]:（2）也可由（1）的到：两边转置： $C^T=B^TA^T$。

例 2：证明，设$C=AB$，则

（1） 如果 B 可逆，则 C 的列向量组与 A 的列向量组等价。

（2） 如果 A 可逆，则 C 的行向量组与 B 的行向量组等价。

证明：由例 1 的结论，并注意到

（1）若 B 可逆，则$A=CB^{-1}$，即 A 的列组也可由 C 的列组线性表示。

（2）若 A 可逆，则$B=A^{-1}C$，即 B 的行组也可由 C 的行组线性表示。

二、向量组的秩

定义 1：设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是向量组$A$的一个部分组，如果：

（1）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关。

（2）向量组A中每个向量都可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表出。（或 A 中任意 r＋1 个向量都线性相关）

则称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是向量组$A$的一个最（极）大线性无关组。

[注]：①最大无关组为该向量组含有向量个数最多的线性无关组。

②最大无关组一般不唯一。

（2）中两种描述等价性证明：

左<—右：$\forall\alpha\in A$，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha$线性相关，因$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关，故$\alpha$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$现行表出。

左—>右：设$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r,\beta_{r+1}\subset A$，由左：$\beta_i,i=1\sim r+1$都可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$表出，即有$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r,\beta_{r+1})=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)P_{r\times r+1}$。令各自线性组合：$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r,\beta_{r+1})X=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)P_{r\times r+1}X=0$，因$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$无关，故有$P_{r\times r+1}X=0$。该方程有非0解，故$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r,\beta_{r+1}$相关。

例1：已知向量组$\alpha_1=(1,0),\alpha_2=(0,1),\alpha_3=(1,1)$，求其一个最大无关组。

解：α_1无关，但不能表示组中所有向量。

α_1,α_2无关，且$\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$，可表示组中所有向量。故是其一个最大无关组。

[注]：实际上α_1,α_3、α_2,α_3均是其一个最大无关组。

例2：已知向量组$\alpha_1=(1,2,3),\alpha_2=(0,1,2),\alpha_3=(0,0,1)$，求其一个最大无关组。

解：显然任意2个都无关；令$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=O\Rightarrow k_i=0$，最大组为自身。

定理1：向量组与其最大无关组等价。

推论：一向量组的不同最大无关组等价。

定理2：设向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$可由向量组$B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表出，

若向量组A线性无关，则$m\le s$

证明：设T_B是向量组B之一最大无关组，因A可由B表出，而B可由T_B表出，故A可由T_B表出。构造向量组$C:A,T_B$，显然T_B也是C之最大无关组，而A只是C之一无关组，因此A中向量个数$m\le T_B$中向量个数$\le B$中向量个数s，即$m\le s$

推论 1（逆否）：设向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 可由向量组 $B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表出，

若 $m>s$，则向量组 A 线性相关。

推论 2：若一向量组的向量个数大于其向量的维数，则该向量组线性相关。

证：因任一 n 维向量均可由 n 维单位向量组 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 线性表出。

推论 3：等价的线性无关向量组包含向量个数相同。

证：设 A,B 是两个等价线性无关向量组，分别含有 m,s 个向量，因

A 可由 B 表出，且 A 线性无关，故 $m\le s$

B 可由 A 表出，且 B 线性无关，故 $s\le m$

因此 $m=s$

由此可知：一向量组的不同最大线性无关组包含向量个数都相同。

定义 2：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的最大线性无关组包含的向量个数称为该向量组的秩，记为 $R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$。

例如：n 维单位向量组的秩为 $R(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=n$，其最大线性无关组为其本身。

推论 4：等价向量组具有相同的秩。

推论 5：若 A 向量组可由 B 向量组线性表出，则 $R(A)\le R(B)$

定理 3：若 $R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)<m$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关。

若 $R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=m$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关。

三、矩阵秩与向量组秩的关系

1、矩阵的行秩与列秩

设有 $m\times n$ 阶矩阵：$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{bmatrix}$

行秩：矩阵的行向量组的秩 $R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$

列秩：矩阵的列向量组的秩 $R(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$

2、关系

定理 1：若矩阵A经有限次初等行变换变为矩阵B则：

（1）A的行向量组与B的行向量组等价。

（2）A的任意k个列向量与B中的对应k个列向量有相同的线性相关性。

[注]：该定理对列也有。

证明：（1）A 经行变换变为 B：$\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{P}$可逆，$\therefore \boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}$。故 A，B 行向量组可互相线性表出，即等价。

（2）设$\boldsymbol{A}=(\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_n)$，$\boldsymbol{B}=(\beta_1\ \beta_2\cdots\beta_n)$，由$\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$有

$$\boldsymbol{P}(\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_n)=(\beta_1\ \beta_2\cdots\beta_n)\text{即}$$

$$(\boldsymbol{P}\alpha_1\ \boldsymbol{P}\alpha_2\cdots\boldsymbol{P}\alpha_n)=(\beta_1\ \beta_2\cdots\beta_n)\text{则}$$

$$\boldsymbol{l}_1\boldsymbol{P}\alpha_1+\boldsymbol{l}_2\boldsymbol{P}\alpha_2+\cdots+\boldsymbol{l}_k\boldsymbol{P}\alpha_k=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow \boldsymbol{l}_1\beta_1+\boldsymbol{l}_2\beta_2+\cdots+\boldsymbol{l}_k\beta_k=\boldsymbol{0}\text{即}$$

$$\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{l}_1\alpha_1+\boldsymbol{l}_2\alpha_2+\cdots+\boldsymbol{l}_k\alpha_k\right)=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow \boldsymbol{l}_1\beta_1+\boldsymbol{l}_2\beta_2+\cdots+\boldsymbol{l}_k\beta_k=\boldsymbol{0}\text{即}$$

$$\boldsymbol{l}_1\alpha_1+\boldsymbol{l}_2\alpha_2+\cdots+\boldsymbol{l}_k\alpha_k=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow \boldsymbol{l}_1\beta_1+\boldsymbol{l}_2\beta_2+\cdots+\boldsymbol{l}_k\beta_k=\boldsymbol{0}$$

推论 1：矩阵A的秩＝A的行秩＝A的列秩

证明：$\boldsymbol{A}\xrightarrow{row}$行阶梯形$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}$中非 0 行数＝$\boldsymbol{B}$行组秩＝$\boldsymbol{A}$行组秩

$\boldsymbol{A}\xrightarrow{colum}$列阶梯形$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{C})=\boldsymbol{C}$中非 0 列数＝$\boldsymbol{C}$列组秩＝$\boldsymbol{A}$列组秩

$\therefore \boldsymbol{A}$行组秩＝$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})$＝$\boldsymbol{A}$列组秩

推论 2：行向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的秩＝矩阵$\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_m\end{bmatrix}$的秩。

列向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的秩＝矩阵$\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m\end{bmatrix}$的秩。

且当$R\left(A\right)<m$时，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关。

当$R\left(A\right)=m$时，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关。

[注]：但为了求向量组的线性关系或最大线性无关组，通常将向量组的每个向量排成矩阵的一列进行初等行变换。

例 1、已知$\alpha_1=\left(1,-2,2,3\right),\alpha_2=\left(-2,4,-1,3\right),\alpha_3=\left(-1,2,0,3\right),\alpha_4=\left(0,6,2,3\right)$求：

（1） 该向量组的秩，是否线性相关。

（2） 求其一个最大线性无关组。

（3） 若其线性相关，求其一个线性关系。

解：由于（2）（3）的要求，宜将向量组排成矩阵的列组进行初等行变换

（1）$A=\begin{bmatrix}\alpha_1^T & \alpha_2^T & \alpha_3^T & \alpha_4^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2 & -1 & 0\\ -2 & 4 & 2 & 6\\ 2 & -1 & 0 & 2\\ 3 & 3 & 3 & 3\end{bmatrix}\xrightarrow{row}\cdots\xrightarrow{row}\begin{bmatrix}1 & -2 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=B$

$\therefore R(A)=3<4$，原向量组线性相关。

（2）由（1）的结果知，B 的 1，2，4 列为其列向量组的一个最大无关组，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 为原向量组的一个最大无关组。（1，3，4 列也是）

（3）对 B 进一步化为行最简形：

$$B\xrightarrow{row}\begin{bmatrix}1 & -2 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -2 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2/3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 1/3 & 0\\ 0 & 1 & 2/3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=C$$

因 C 中 1，2，3 列有线性关系 $\frac{1}{3}c_1+\frac{2}{3}c_2=c_3$，故原向量组的线性关系为：

$$\frac{1}{3}\alpha_1+\frac{2}{3}\alpha_2=\alpha_3，\text{或}\quad \alpha_1+2\alpha_2-3\alpha_3+0\alpha_4=O$$

例 2、已知 $\alpha_1=(2,0,-1,3),\alpha_2=(3,-2,1,-1)$；$\beta_1=(-5,6,-5,9),\beta_2=(4,-4,3,-5)$，证明向量组 α_1,α_2 与 β_1,β_2 等价。

证明：构造矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix}$ 只要证明 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 具有相同的行最简形即可

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1 & 3\\ 3 & -2 & 1 & -1\end{bmatrix}\xrightarrow{row}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1/2 & 3/2\\ 0 & -2 & 5/2 & -11/2\end{bmatrix}\xrightarrow{row}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1/2 & 3/2\\ 0 & 1 & -5/4 & 11/4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 6 & -5 & 9\\ 4 & -4 & 3 & -5\end{bmatrix}\xrightarrow{row}\begin{bmatrix}-1 & 2 & -2 & 4\\ 4 & -4 & 3 & -5\end{bmatrix}\xrightarrow{row}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1/2 & 3/2\\ 0 & 1 & -5/4 & 11/4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{bmatrix}$$

α_1,α_2 与 β_1,β_2 均与 γ_1,γ_2 等价，由等价的传递性，α_1,α_2 与 β_1,β_2 等价

例 3、A,B 为二矩阵，证明 $R(AB)\le\min\{R(A),R(B)\}$

证明：由等价部分的例 1 有

（1） AB 的列向量组可由 A 的列向量组线性表出。$\therefore R(AB) \le R(A)$

（2） AB 的行向量组可由 B 的行向量组线性表出。$\therefore R(AB) \le R(B)$

因此有 $R(AB) \le \min\{R(A), R(B)\}$

四、小节：线性相关性的判别

（1） 定义（最常用）

（2） 定理

（3） 矩阵求秩（分量已知）

习题四（1、2 版）：10，11，12，13，15*

§3.4 n 维向量空间

一、向量空间

定义 1：设 V 为 n 维向量构成的非空集合，若

（1）对任意的$\alpha, \beta \in V$，有$\alpha + \beta \in V$　　（加法封闭）

（2）对任意的$\alpha \in V$，$k \in R$，有$k\alpha \in V$．　　（数乘封闭）

称集合V为一向量空间.

例 1：$\mathrm{R}^n = \{\alpha \mid \alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n), a_i \in \mathrm{R}\}$ 是向量空间

n＝1 时，一维数轴
n＝2 时，二维几何平面
n＝3 时，三维几何空间

例 2：$V_0 = \{\alpha \mid \alpha = (a_1, \cdots, a_{n-1}, 0), a_i \in R\}$ 是向量空间

n＝2：X－Y 平面上的 X 轴
n＝3：X－Y－Z 空间上的 X－Y 平面

例 3：$V = \{\alpha \mid \alpha = (a_1, \cdots, a_{n-1}, 1), a_i \in R\}$ 不是向量空间

$\because \quad 0 \cdot (a_1, \cdots, a_{n-1}, 1) = (0, 0, \cdots, 0) \notin V$，即数乘运算不封闭.

[注]：表明向量空间必须含有 0 向量。只含 0 向量的空间称为零空间。

例 4：任给n维向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ $(m \ge 1)$，

$$V = \{\alpha \mid \alpha = k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m, k_i \in R\}$$

是向量空间．称之为由向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 生成的向量空间，记作

$$L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m) \text{ 或者 } \mathrm{span}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$$

证：设$\alpha,\beta\in V$，则 $\alpha=k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m$，$\beta=t_1\alpha_1+\cdots+t_m\alpha_m$，于是有

$$\alpha+\beta=(k_1+t_1)\alpha_1+\cdots+(k_m+t_m)\alpha_m\in V$$

$$k\alpha=(k\,k_1)\alpha_1+\cdots+(k\,k_m)\alpha_m\in V \quad (\forall k\in \mathrm{R})$$

故V是向量空间.

二、子空间

定义 2：设V_1和V_2都是向量空间，且$V_1\subset V_2$，称V_1为V_2的子空间.

例 5：前面例 2 中的V_0是R^n的子空间．例 4 中的 $L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$ 也是R^n的子空间.

三、向量空间的基与维数

定义 3：设V是向量空间，$\alpha_1,\cdots,\alpha_m\in V$，若

（1） $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关；

（2） $\forall\alpha\in V$，α 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性表示.

称 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 为V的一组基(基组)，称m为V的维数，记作$\dim V=m$.

[注]:（1）零空间没有基，其维数为 0.

（2）基组不唯一。若$\dim V=m$，则V中任意m个线性无关的向量都可作为V的基。

（3） $V=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$，即空间本身可由其基组生成。

因为$\forall\alpha\in V$，$\alpha=k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m\in L$，$\therefore V\subset L$

$\forall\alpha\in L$，$\alpha=k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m\in V$，$\therefore L\subset V$

（4）向量空间的维数与向量的分量个数一般不相等。

例 6：R^n上的单位向量：$\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0)$，$\varepsilon_2=(0,1,\cdots,0)$，$\cdots,\varepsilon_n=(0,0,\cdots,1)$ 线性无关。$\forall\alpha\in\mathrm{R}^n$，$\alpha$可由$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$线性表出，所以$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是$\mathrm{R}^n$的一个基组，$\dim\mathrm{R}^n=n$。且

$$\begin{aligned}\mathrm{R}^n&=\{\alpha \mid \alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n), a_i\in\mathrm{R}\}\\&=\{\alpha\mid\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n, a_i\in\mathrm{R}\}=L(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\end{aligned}$$

四 向量在基组下的坐标

定义 4：设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是向量空间V的一组基，$\forall\alpha\in V$，有

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

称$(x_1, x_2, \cdots, x_m)^{\mathrm{T}}$为$\alpha$在基组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 下的坐标.

[注]： α 为 n 维向量，α 在 V 的基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 下的坐标为 m 维列向量，且唯一.

例 7　设向量空间V_0的基为$\alpha_1 = (1,1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2 = (1,1,-1,0)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_3 = (1,-1,-1,0)^{\mathrm{T}}$

求$\alpha = (1,2,1,0)^{\mathrm{T}}$在该基下的坐标.

解　设 $\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$，比较等式两端的对应分量可得：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \text{，解之} \\ x_1 - x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right], \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

五、基组的过渡矩阵及坐标变换

1、基组变换

设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$与$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$是 m 维向量空间$V$的两个基组，则此二基组等价，可互相线性表出。设

$$\begin{cases} \beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \cdots a_{m1}\alpha_m \\ \beta_2 = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots a_{m2}\alpha_m \\ \qquad \vdots \\ \beta_m = a_{1m}\alpha_1 + a_{2m}\alpha_2 + \cdots a_{mm}\alpha_m \end{cases}$$

用矩阵表示为：

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)A$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

定义 5：称上式的矩阵 A 为由基组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$到基组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$的过渡矩阵。

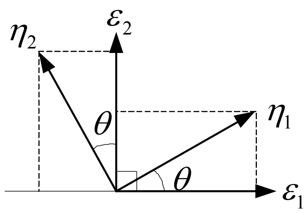
[注]:（1）注意 A 的元素的排列与系数的排列不同（转置关系）

（2）因两组基可相互唯一表示，故 A 可逆，即有

$$\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\right)=\left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m\right)A^{-1}$$

即 A^{-1} 是由基组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 到基组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的过渡矩阵。

例：R^2 上的坐标轴逆时针旋转 θ 角，旋转前后的基组分别为 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 及 η_1,η_2。求由 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 到 η_1,η_2 的过渡矩阵。



解：由题意，η_1,η_2 分别用 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 表示为

$$\eta_1=\cos\theta\varepsilon_1+\sin\theta\varepsilon_2$$
$$\eta_2=-\sin\theta\varepsilon_1+\cos\theta\varepsilon_2$$

即，$\left(\eta_1,\eta_2\right)=\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2\right)\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$

所以，所求过渡矩阵为 $A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$

2、坐标变换

设 A 是空间 V 上基组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 到基组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 的过渡矩阵，$\forall\alpha\in V$，α 必可由二基组表示, 设表示式分别为：

$$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\right)\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_m\end{bmatrix}$$

$$\alpha=y_1\beta_1+y_2\beta_2+\cdots+y_m\beta_m=\left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m\right)\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_m\end{bmatrix}$$

因 $\left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m\right)=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\right)A$，代入第二式有

$$\alpha=\left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m\right)\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_m\end{bmatrix}=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\right)A\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_m\end{bmatrix}$$

因同一基组下坐标的唯一性，故有：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}，或 \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

称为同一向量在不同基组下的坐标变换公式。

例：上例中，若已知向量α在基组$\varepsilon_1, \varepsilon_2$下的坐标为$(x_1, x_2)^T$，求$\alpha$在基组$\eta_1, \eta_2$下的坐标为$(y_1, y_2)^T$。

解：$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta x_1 + \sin\theta x_2 \\ -\sin\theta x_1 + \cos\theta x_2 \end{bmatrix}$，即转轴公式

例 8：设R^3的两组基为：

$$\alpha_1 = (1,0,-1)^T, \alpha_2 = (2,1,1)^T, \alpha_3 = (1,1,1)^T$$
$$\beta_1 = (0,1,1)^T, \beta_2 = (-1,1,0)^T, \beta_3 = (1,2,1)^T$$

（1） 求由基组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$到基组$\beta_1, \beta_2, \beta_3$的过渡矩阵 A

（2） 求向量$\alpha = \alpha_1 - 3\alpha_2 + 2\alpha_3$在基组$\beta_1, \beta_2, \beta_3$下的坐标。

解：（1）将已知代入$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) A$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} A$$

所以，

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

（2）已知$\alpha = \alpha_1 - 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

习题四（1，2 版）： 18，19，20

§3.5 欧氏空间

一、向量的内积

定义 1：设实向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$， $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in V$，称实数

$$<\alpha,\beta>=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\alpha\beta^T=\beta\alpha^T$$

为向量α与β的内积.

称定义了内积的向量空间R^n为欧几里德（Euclid）空间，简称欧氏空间。

性质：设$\alpha,\beta,\gamma\in V$，$k\in R$

(1) $<\alpha,\beta>=<\beta,\alpha>$

(2) $<k\alpha,\beta>=k<\alpha,\beta>$

(3) $<\alpha+\beta,\gamma>=<\alpha,\gamma>+<\beta,\gamma>$

(4) $\langle\alpha,\alpha\rangle\geq 0$；当且仅当$\alpha=O$时，$<\alpha,\alpha>=0$.

(5) $\langle\alpha,\beta\rangle^2\leq\langle\alpha,\alpha\rangle\langle\beta,\beta\rangle$，当且仅当$\beta=k\alpha$时，等号成立。

称为柯西—施瓦茨（Cauchy—Schwarz）不等式。

证(5)　$\forall t\in\mathrm{R}$，由$\langle\alpha+t\beta,\alpha+t\beta\rangle\geq 0$可得

$$\langle\alpha,\alpha\rangle+2\langle\alpha,\beta\rangle t+\langle\beta,\beta\rangle t^2\geq 0$$

$$4\langle\alpha,\beta\rangle^2-4\langle\alpha,\alpha\rangle\cdot\langle\beta,\beta\rangle\leq 0\quad,\qquad\Delta\leq 0$$

$$\langle\alpha,\beta\rangle^2\leq\langle\alpha,\alpha\rangle\langle\beta,\beta\rangle$$

二、向量的长度（范数）

定义 2：设实向量$\alpha=\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)$，称实数

$$\|\alpha\|=\sqrt{<\alpha,\alpha>}=\sqrt{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+\cdots+a_n^{\ 2}}$$

为向量α的长度或范数.

向量的单位化（标准化）：若$\alpha\neq O$，称$\alpha_0=\dfrac{\alpha}{\|\alpha\|}$为与$\boldsymbol{\alpha}$同方向的单位向量.

例 1：画图说明R^2上向量长度的几何意义。

性质：(1) $\|\alpha\|\geq 0$；当且仅当$\alpha=O$时，$\|\alpha\|=0$.

(2) $\|k\alpha\|=|k|\cdot\|\alpha\|$ $\quad(\forall k\in\mathrm{R})$

(3) $\|\alpha+\beta\|\leq\|\alpha\|+\|\beta\|$ 三角不等式（画图说明）

(4)* $\left|\|\alpha\|-\|\beta\|\right|\leq\|\alpha-\beta\|$

证(3) $\|\alpha+\beta\|^2=<\alpha+\beta,\alpha+\beta>=<\alpha,\alpha>+2<\alpha,\beta>+<\beta,\beta>$

$$\leq\|\alpha\|^2+2\|\alpha\|\|\beta\|+\|\beta\|^2=\left(\|\alpha\|+\|\beta\|\right)^2$$

证(4) $\alpha-\beta\Rightarrow\alpha$ 有

$$\|\alpha\|-\|\beta\|\leq\|\alpha-\beta\|$$

$\beta-\alpha\Rightarrow\beta$ 有

$$\|\beta\|-\|\alpha\|\leq\|\alpha-\beta\|$$

三、向量间的夹角

由柯西—施瓦茨（Cauchy—Schwarz）不等式：$\langle\alpha,\beta\rangle^2\leq\|\alpha\|^2\cdot\|\beta\|^2$ 有：

$$\frac{|\langle\alpha,\beta\rangle|}{\|\alpha\|\cdot\|\beta\|}\leq 1$$

1、定义 3：设α, β为非 0 实向量，称 $\theta=\arccos\dfrac{<\alpha,\beta>}{\|\alpha\|\|\beta\|}$，为向量$\alpha$与$\boldsymbol{\beta}$之间的夹角。记为$(\widehat{\alpha,\beta})$

定义 4：若$<\alpha,\beta>=0$，称向量$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$正交，记作$\alpha\perp\beta$.

性质：若$\alpha\perp\beta$，则有勾股定理：$\|\alpha+\beta\|^2=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2$ （画图说明）

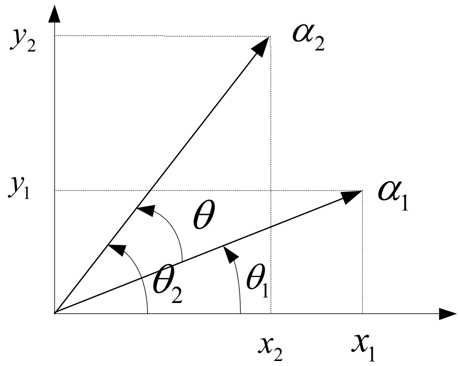
[注]： (1) $\alpha\perp\beta\Leftrightarrow\theta=\dfrac{\pi}{2}$;

(2) 0 向量与任意向量正交，但θ无意义.

例 2：R^2上向量夹角的几何意义：

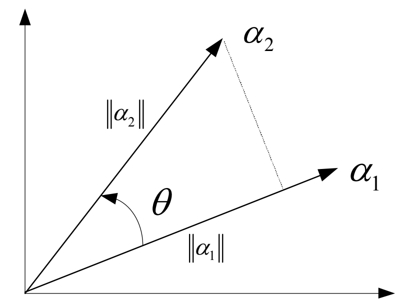
设$\alpha_1=(x_1,y_1),\alpha_2=(x_2,y_2)$，则

$$\cos(\widehat{\alpha_1,\alpha_2}) = \frac{<\alpha_1,\alpha_2>}{\|\alpha_1\|\|\alpha_2\|} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$$
$$= \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}} + \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}\frac{y_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$$
$$= \cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2$$
$$= \cos\left(\theta_2-\theta_1\right) = \cos\theta$$



2．R^2 上向量内积的几何意义：

由夹角公式有 $<\alpha_1,\alpha_2>=\|\alpha_1\|\cdot\|\alpha_2\|\cos(\widehat{\alpha_1,\alpha_2})$，下图，如做功问题。



四、正交向量组

定义 5：若一组非零向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 两两正交，即 $\alpha_i\perp\alpha_j, i\neq j$，称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 为一正交向量组。

定理：正交向量组线性无关。

证明：令 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=O$，两边与 α_i 取内积：

$$<\alpha_i, k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m> = k_1<\alpha_i,\alpha_1>+k_2<\alpha_i,\alpha_2>+\cdots+k_m<\alpha_i,\alpha_m>$$
$$= k_i<\alpha_i,\alpha_i> = k_i\|\alpha_i\|^2 = 0,\quad i=1,2,\cdots,m$$

因 $\alpha_i\neq 0, \|\alpha_i\|>0$，故 $k_i=0, i=1,2,\cdots,m$

[注]:（1）反过来不成立。

（2）不能含 0 向量。
（3）约定单个非 0 向量为一正交组

定义 6：设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 为向量空间 $\boldsymbol{V}$ 的一组基且两两正交，则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 为 $\boldsymbol{V}$ 的正交基；若还有 $\|\alpha_i\|=1 \quad (i=1,2,\cdots,m)$，称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 为 $\boldsymbol{V}$ 的标准正交基.

例如：$\mathbf{R}^n$ 的一个标准正交基为 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$.

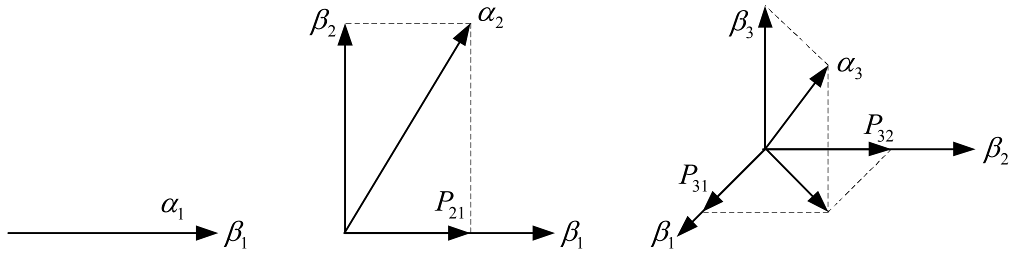
[注]：特点，当 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 为正交基时，对于 $\forall\alpha\in V$，有

$$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m\,,\quad x_i=\frac{<\alpha,\alpha_i>}{\|\alpha_i\|^2}\quad (i=1,2,\cdots,m):$$

当 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 为标准正交基时，有

$$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m\,,\quad x_i=<\alpha,\alpha_i>\quad (i=1,2,\cdots,m)$$

五、施密特（Schmidt）正交化



设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 为一线性无关向量组，令

$$\beta_1=\alpha_1$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{<\alpha_2,\beta_1>}{<\beta_1,\beta_1>}\beta_1\,,$$ 图解 $\beta_2=\alpha_2-\frac{<\alpha_2,\beta_1>}{\|\beta_1\|^2}\beta_1=\alpha_2-<\alpha_2,\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}>\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{<\alpha_3,\beta_1>}{<\beta_1,\beta_1>}\beta_1-\frac{<\alpha_3,\beta_2>}{<\beta_2,\beta_2>}\beta_2$$

....

$$\beta_m=\alpha_m-\frac{<\alpha_m,\beta_1>}{<\beta_1,\beta_1>}\beta_1-\frac{<\alpha_m,\beta_2>}{<\beta_2,\beta_2>}\beta_2-\cdots-\frac{<\alpha_m,\beta_{m-1}>}{<\beta_{m-1},\beta_{m-1}>}\beta_{m-1}$$

则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 为一正交向量组，且与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 等价

进一步令：$\gamma_j=\frac{1}{\|\beta_j\|}\beta_j$，则 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m$ 是一标准正交向量组。

例 3：已知线性无关向量组

$$\alpha_1=(1,1,0,0)，\quad \alpha_2=(1,0,1,0)，\quad \alpha_3=(-1,0,0,1)$$

试将其标准正交化.

解 $\beta_1=\alpha_1=(1,1,0,0)$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{<\alpha_2,\beta_1>}{<\beta_1,\beta_1>}\beta_1=\alpha_2-\frac{1}{2}\beta_1=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,0)$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{<\alpha_3,\beta_1>}{<\beta_1,\beta_1>}\beta_1-\frac{<\alpha_3,\beta_2>}{<\beta_2,\beta_2>}\beta_2=\alpha_2+\frac{1}{2}\beta_1+\frac{1}{3}\beta_2=(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},1)$$

β_1,β_2,β_3为一正交向量组。

令

$$\gamma_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0)$$

$$\gamma_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},0)$$

$$\gamma_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}=(-\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$为一标准（单位）正交向量组。

注：正交化顺序不同，其结果一般不同

六、正交矩阵

定义 7：如果 n 阶实方阵 A 满足 $A^TA=E$，则称 A 为正交矩阵。

性质：（1） $A^TA=AA^T=E$， $A^{-1}=A^T$

（2） $|A|=+1\ or\ -1$

（3） A^T, A^{-1}, A^* 也是正交阵

（4）若 A, B 都是正交矩阵，则 AB 也是正交矩阵

（5）A 的行、列向量组均为标准正交向量组。

证（5）设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 则

$$A^T A=\begin{bmatrix}\alpha_1{}^T\\ \alpha_2{}^T\\ \vdots\\ \alpha_n{}^T\end{bmatrix}\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right)=\begin{bmatrix}\alpha_1{}^T\alpha_1 & \alpha_1{}^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1{}^T\alpha_n\\ \alpha_2{}^T\alpha_1 & \alpha_2{}^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2{}^T\alpha_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_n{}^T\alpha_1 & \alpha_n{}^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n{}^T\alpha_n\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}<\alpha_1,\alpha_1> & <\alpha_1,\alpha_2> & \cdots & <\alpha_1,\alpha_n>\\ <\alpha_2,\alpha_1> & <\alpha_2,\alpha_2> & \cdots & <\alpha_2,\alpha_n>\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ <\alpha_n,\alpha_1> & <\alpha_n,\alpha_2> & \cdots & <\alpha_n,\alpha_n>\end{bmatrix}=E$$

所以$<\alpha_i,\alpha_j>=\delta_{ij}\triangleq\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$，故 A 的列向量组为标准正交组。

同理，由 $AA^T=E$ 可证 A 的行向量组为标准正交组。

定理：设α,β为 n 维列向量，A 为 n 阶正交矩阵，则

（1）$\|A\alpha\|=\|\alpha\|$

（2）$<A\alpha,A\beta>=<\alpha,\beta>$

（3）$\left(A\alpha\hat{,}A\beta\right)=\left(\alpha\hat{,}\beta\right)$

证：（1）$\|A\alpha\|^2=<A\alpha,A\alpha>=\left(A\alpha\right)^T A\alpha=\alpha^T A^T A\alpha=\alpha^T\alpha=\|\alpha\|^2$

（2）（3）同理。

注：在$\boldsymbol{R}^2$上，$\boldsymbol{A}\alpha$相当于将α旋转一个角度。其中$\boldsymbol{A}$为二阶正交阵。

习题四（1、2 版）：22，23，24