第一章　　行列式

本章安排：§1.1 引言；§1.2 n 阶行列式；§1.3 行列式的性质；

§1.4 行列式按一行展开；§1.5 克莱默法则

§1.1 引言

问题：二元一次线性方程组的求解

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & \times a_{22} \quad \times(-a_{21}) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & \times(-a_{12}) \quad \times a_{11} \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，由消元法得：

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

引入记号及规则：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \triangleq a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \triangleq b_1 a_{22} - b_2 a_{12}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \triangleq a_{11} b_2 - a_{21} b_1$$

则有：

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \qquad x_2 = \frac{D_2}{D}$$

同理，对三元一次线性方程组，也可引入相似的记号及规则来解决：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \triangleq a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

问题：n 元一次线性方程组是否可有相似方法。

§1.2　n 阶行列式

一、　　n 元排列及其逆序

1、由 n 个不同的正整数构成的一个有序数组称为一个 n 元排列。

例如，对自然数 1，2，3：1 2 3 及 3 1 2 等都是一 3 元排列

对于给定的 n 个数，其 n 元排列共有 n！种。

例如：1，2，3 的全部排列为：1 2 3；1 3 2；2 1 3 ；2 3 1；3 1 2 ；3 2 1，共 3！=6 种。

2、排列的逆序和逆序数

定义：在 n 元排列 $p_1\, p_2 \cdots\ p_n$ 中，如果有一对数的顺序与自然数顺序相反，称之为该排列的一个逆序。一个 n 元排列中的逆序总数称为该排列的逆序数。记为 $\tau\left(p_1\, p_2 \cdots\ p_n\right)$。

例如，5 元排列 5 2 4 1 3 的逆序数为 $\tau\left(5\,2\,4\,1\,3\right)=7$

逆序数为偶数的排列称为偶排列，为奇数的称为奇排列。上例中的 5 元排列为奇排列。

3、对换

定义：将排列中的一对数互换，称为对该排列的一次对换。

注：对换后变为另外一个排列。

定理：对换改变排列的奇偶性。

证明：（1）相邻对换：设原排列为 $p_1\ \cdots p_i p_j \cdots\ p_n$，相邻对换 p_i，p_j 后排列为 $p_1\ \cdots p_j p_i \cdots\ p_n$。显然 $\tau\left(p_1\ \cdots p_j p_i \cdots\ p_n\right)=\tau\left(p_1\ \cdots p_i p_j \cdots\ p_n\right)\pm 1$，奇偶性改变。

（2）设原排列为 $p_1\ \cdots p_i \cdots p_j \cdots\ p_n$，相邻对换 p_i，p_j 后的排列为 $p_1\ \cdots p_j \cdots p_i \cdots\ p_n$。可分解为：

①m 次相邻对换 $p_1\ \cdots p_i \cdots p_j \cdots\ p_n \rightarrow p_1\ \cdots p_i p_j \cdots\cdots\ p_n$ 奇偶性改变 m 次；

②m＋1 次相邻对换 $\rightarrow p_1\ \cdots p_j \cdots p_i \cdots\ p_n$ 奇偶性改变 m＋1 次。

① ②合计，奇偶性改变 2m＋1，奇数次，故奇偶性改变。

二、 n 阶行列式定义

定义 1：由 $n\times n$ 个数 $a_{11}\cdots a_{nn}$ 构成的如下的 n 行 n 列的数阵：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为n阶行列式。其值定义为所有取自不同行、不同列的n个数的乘积的代数和，即：

$$D=\sum_{p_1 p_2 \cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

其中 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 为自然数$1 \sim n$的一个n元排列。

注：（1）每个乘积项中的n个数取自不同行、不同列。

（2）求和共有n！项。

例1：由定义验证2、3阶行列式。

例2：判断下列各式是否为四阶行列式展开式中的项。

（1） $a_{12}a_{21}a_{34}a_{41}$ × （2） $-a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$ √ （3） $a_{31}a_{22}a_{43}a_{14}$ √ （4） $-a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}$ ×

例3：计算上、下三角行列式的值。

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}, \quad D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

由此还有对角行列式的值：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

思考题：计算反三角、反对角行列式的值。

例4：计算分块对角行列式的值：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2p_3p_4}(-1)^{\tau(p_1p_2p_3p_4)} a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$$

$$=\sum_{p_1p_2}\sum_{p_3p_4}(-1)^{\tau(p_1p_2)+\tau(p_3p_4)} a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$$

$$=\sum_{p_1p_2}(-1)^{\tau(p_1p_2)}a_{1p_1}a_{2p_2}\sum_{p_3p_4}(-1)^{\tau(p_3p_4)}a_{3p_3}a_{4p_4}$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}a_{33}&a_{34}\\a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}$$

此结果可推广为：

$$\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1m}&0&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&\cdots&a_{mm}&0&\cdots&0\\c_{11}&\cdots&c_{1m}&b_{11}&\cdots&b_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\c_{n1}&\cdots&c_{nm}&b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1m}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&\cdots&a_{mm}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{vmatrix}$$

定义 2：n 阶行列式也可表示为：

$$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$$

计算量：10 阶行列式展开项共 10！＝362.88 万

§1.3 行列式的性质

性质 1：行列式 D 与其转置行列式 D^T 相等：

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{n1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{n2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\triangleq D^T$$

性质 2：行列式一行（列）元素的公因子可以提出行列式外：

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ka_{i1}&ka_{i2}&\cdots&ka_{in}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

推论：行列式乘以常数 k，等于其任一行（列）乘以 k。

性质 3：交换行列式的任意两行（列），行列式值改变符号：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明：

$$\begin{aligned} 左 &= \sum_{p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n} (-1)^{\tau\left(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n\right)} a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n} \\ &= \sum_{p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n} (-1)^{\tau\left(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n\right)} a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n} \\ &= -\sum_{p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n} (-1)^{\tau\left(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n\right)} a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n} \\ &= 右 \end{aligned}$$

性质 4：行列式具有分行（列）相加性：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由定义展开即得。

性质 5：将行列式的一行加上另一行的 k 倍后，行列式值不变。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由性质 4、2、3 即得。

性质 6：行列式在以下情况下，其值为 0：

（1） 任一行（列）为 0。

（2） 两行（列）成比例。

（3） 某一行（列）为其它若干行的线性和。

例 1、计算四阶行列式的值：

$$D=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\2&0&1&-1\\-5&1&3&-4\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&-2&3\\2&0&1&-1\\-5&1&3&-4\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&-2&3\\0&-2&5&-7\\0&6&-7&11\\0&-6&5&-6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&-2&3\\0&-2&5&-7\\0&6&-7&11\\0&0&-2&5\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&1&-2&3\\0&-2&5&-7\\0&0&8&-10\\0&0&-2&5\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1&-2&3\\0&-2&5&-7\\0&0&-2&5\\0&0&8&-10\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1&-2&3\\0&-2&5&-7\\0&0&-2&5\\0&0&0&10\end{vmatrix}=-40$$

例 2、计算 n 阶行列式的值：

$$D_n=\begin{vmatrix}x&a&a&\cdots&a\\a&x&a&\cdots&a\\a&a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a&a&a&\cdots&x\end{vmatrix}=\left[x+(n-1)a\right]\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\a&x&a&\cdots&a\\a&a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a&a&a&\cdots&x\end{vmatrix}=\left[x+(n-1)a\right]\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&x-a&0&\cdots&0\\0&0&x-a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&x-a\end{vmatrix}$$

$$=\left[x+(n-1)a\right](x-a)^{n-1}$$

法 2：每行均减去末行。

例 3、计算 3 阶行列式：

$$D=\begin{vmatrix}-2&3&1\\503&201&198\\5&2&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&3&1\\500+3&200+1&200-2\\5&2&2\end{vmatrix}==\begin{vmatrix}-2&3&1\\3&1&-2\\5&2&2\end{vmatrix}=-59$$

例 4、已知 204，527，255 均可被 17 整除，不展开证明 $D=\begin{vmatrix}2&0&4\\5&2&7\\2&5&5\end{vmatrix}$ 也可被 17 整除。

$$D=\begin{vmatrix}2&0&204\\5&2&527\\2&5&255\end{vmatrix}，$$ 末列有公因子 17 可提出，得证。

习题一：1（1）（3），2，4，5（2）（4），6（1）（3）（5）（6）

习题二（2 版）1，2，4，5

§ 1.4 行列式按一行（列）展开

为行列式的降阶算法。

一、　余子式与代数余子式

定义：在行列式$D=\left|a_{ij}\right|$中，去掉元a_{ij}所在的行和列所有元后，剩余的元按原来的顺序构成的n－1阶行列式称为a_{ij}的余子式，记为M_{ij}。称$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$为a_{ij}的代数余子式。

举例说明。

注：余子式和代数余子式均为行列式。

二、　降阶算法

定理：（1）行列式的值等于其任一行（列）所有元乘以其代数余子式之和。即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad,\quad i=1,2,\cdots,n$$

或：$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad,\quad j=1,2,\cdots,n$

（2）行列式的任一行（列）所有元乘以其它一行（列）对应元之代数余子式之和等于0

$$0=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}\quad,\quad i\neq j$$
$$0=a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}\quad,\quad i\neq j$$

证明：（1）只证$i=1$的情况。

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}+0+\cdots+0&0+a_{12}+\cdots+0&\cdots&0+\cdots+0+a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&a_{12}&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix}0&0&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}+(-1)^1\begin{vmatrix}a_{12}&0&\cdots&0\\a_{22}&a_{21}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n2}&a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}+\cdots+(-1)^{n-1}\begin{vmatrix}a_{1n}&0&\cdots&0\\a_{2n}&a_{21}&\cdots&a_{2n-1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{nn}&a_{n1}&\cdots&a_{nn-1}\end{vmatrix}$$
$$=a_{11}M_{11}+a_{12}(-1)^1M_{12}+\cdots+a_{1n}(-1)^{n-1}M_{1n}$$
$$=a_{11}M_{11}+a_{12}(-1)^{1+2}M_{12}+\cdots+a_{1n}(-1)^{n+1}M_{1n}$$
$$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$$

（2）由（1），式右可看作如下行列式按第j行展开的值：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{\text{按j行展开}}{=} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0$$

例1、 利用定理计算上节之例 1

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 & 2 \\ -13 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -5 & -5 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ -13 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = 40$$

例2、 计算 n 阶行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & x & y \\ 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} + y(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} y & \cdots & 0 & 0 \\ x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix} = x^n + (-1)^{n+1} y^n$$

例3、 计算 n 阶行列式：$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 2 & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{vmatrix}$

解：$D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$，所以有 $D_n - D_{n-1} = D_{n-1} - D_{n-2}$

故 $D_1, D_2, \cdots, D_n$ 构成一等差数列，首项 $D_1 = 2$，公差 $D_2 - D_1 = 1$

因此：$D_n = 2 + 1 \times (n-1) = n+1$

法 2：也可利用性质消为上三角行列式计算。

例4、 计算 n 阶行列式：$D_n = \begin{vmatrix} 4 & 1 & & & \\ 3 & 4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 3 & 4 & 1 \\ & & & 3 & 4 \end{vmatrix}$

解：$D_n = 4D_{n-1} - 3D_{n-2}$

所以有 $D_n - D_{n-1} = 3\left(D_{n-1} - D_{n-2}\right) = \cdots = 3^{n-2}\left(D_2 - D_1\right) = 3^n$

及 $D_n - 3D_{n-1} = D_{n-1} - 3D_{n-2} = \cdots = D_2 - 3D_1 = 1$

联立解之有：$D_n = \dfrac{1}{2}\left(3^{n+1} - 1\right)$

例5、 证明范得蒙（Vandermonde）行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \ge i > j \ge 1} \left(x_i - x_j\right)$$

证明：数学归纳法

$n = 2$: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$ 成立。

设 $n-1$ 阶成立，则对 n 阶有：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_{n-1} - x_1 & x_n - x_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & x_2^{n-3}\left(x_2 - x_1\right) & \cdots & x_{n-1}^{n-3}\left(x_{n-1} - x_1\right) & x_n^{n-3}\left(x_n - x_1\right) \\ 0 & x_2^{n-2}\left(x_2 - x_1\right) & \cdots & x_{n-1}^{n-2}\left(x_{n-1} - x_1\right) & x_n^{n-2}\left(x_n - x_1\right) \end{vmatrix}$$

$$= \left(x_n - x_1\right)\left(x_{n-1} - x_1\right)\cdots\left(x_2 - x_1\right) \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_2^{n-3} & \cdots & x_{n-1}^{n-3} & x_n^{n-3} \\ x_2^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= \left(x_n - x_1\right)\left(x_{n-1} - x_1\right)\cdots\left(x_2 - x_1\right) \prod_{n \ge i > j \ge 2} \left(x_i - x_j\right)$$

$$= \prod_{n \ge i > j \ge 1} \left(x_i - x_j\right)$$

§ 1.5 克莱默法则

定理：若 n 元一次线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则方程组有唯一解，且

$$x_j=\frac{D_j}{D}, \quad j=1,2,\cdots,n$$

其中 D_j 为将 D 中 j 列用常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 替换后的行列式。

证明：（不证存在性）设解为 x_j， $j=1,2,\cdots,n$，则

$$x_jD=x_j\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j}x_j & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj}x_j & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{11}x_1+\cdots+a_{1j}x_j+\cdots+a_{1n}x_n & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n1}x_1+\cdots+a_{nj}x_j+\cdots+a_{nn}x_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D_j, \quad j=1,2,\cdots,n$$

当 $D\neq 0$ 时即有： $x_j=\frac{D_j}{D}$， $j=1,2,\cdots,n$

推论：对齐次线性方程组（$b_1=b_2=\cdots=b_n=0$），若 $D\neq 0$，则方程组只有 0 解。

例、解方程组： $\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3=7 \\ x_1-3x_2=15 \\ 2x_2-x_3=-7 \end{cases}$

解： $D=|\cdots|=-3\neq 0$， $D_1=|\cdots|=-9$， $D_2=|\cdots|=12$， $D_3=|\cdots|=3$

$\therefore \quad x_1=\frac{D_1}{D}=3$， $x_2=\frac{D_2}{D}=-4$， $x_3=\frac{D_3}{D}=-1$

习题一：7，8（1）（2），9（1），12

习题二（2 版）6，7，8，9，12