第五章　数理统计的基本概念

1. 子样平均数和子样方差的简化计算如下：

设子样值$x_1, x_2, \ldots, x_n$的平均数 $\bar{x}$ 为和方差为s_x^2

作变换 $y_i = \dfrac{x_i - a}{c}$ ，得到$y_1, y_2, \ldots, y_n$,它的平均数为 $\bar{y}$ 和方差为$y_i = \dfrac{x_i - a}{c}$。试证：$\bar{x} = a + c\bar{y}, s_x^2 = c^2 s_y^2$。

解：由变换 $y_i = \dfrac{x_i - a}{c}$，即$x_i = a + cy_i$

$$\sum_i x_i = \sum_i (a + cy_i), n\bar{x} = na + cn\bar{y}, \therefore \bar{x} = a + c\bar{y}$$

$$而s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_i (a + cy_i - a - c\bar{y})^2 = \frac{c^2}{n}\sum_i (y_i - \bar{y})^2 = c^2 s_y^2$$

2. 在五块条件基本相同的田地上种植某种农作物，亩产量分别为92，94，103，105，106（单位：斤），求子样平均数和子样方差。

解：作变换

$$y_i = x_i - 100, a = 100, \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_i y_i = \frac{1}{5}\times 0 = 0$$

$$\overline{x} = a + \overline{y} = 100$$

$$s_x^{\ 2} = s_y^{\ 2} = \frac{1}{n}\sum_i y_i^{\ 2} - \overline{y}^2 = \frac{1}{5}\times[(-8)^2 + (-6)^2 + 3^2 + 5^2 + 6^2] - 0 = 34$$

3. 设$X_1,X_2,\ldots,X_n$是参数为的泊松分布的母体的一个子样，是子样平均数，试求$E\overline{X}$和$\overline{X}$ D

解：$x \sim p(\lambda), E\bar{x} = E(\frac{1}{n}\sum_i x_i) = \frac{1}{n}\sum_i Ex_i = \frac{1}{n} \times n\lambda = \lambda$

$$D\bar{x} = D(\frac{1}{n}\sum_i x_i) = \frac{1}{n^2}\sum_i Dx_i = \frac{1}{n^2}\sum_i Dx = \frac{\lambda}{n}$$

4. 设$X_1,X_2,\ldots,X_n$是区间（-1，1）上均匀分布的母体的一个子样，试求子样平均数的均值和方差。

解：$x \sim U(-1,1), Ex = \frac{-1+1}{2} = 0, Dx = \frac{2^2}{12} = \frac{1}{3}$

$$E\bar{x} = E(\frac{1}{n}\sum_i x_i) = \frac{1}{n}\sum_i Ex_i = Ex = 0$$

$$D\bar{x} = D(\frac{1}{n}\sum_i x_i) = \frac{1}{n} \cdot Dx = \frac{1}{3n}$$

5. 设$X_1,X_2,\ldots,X_n$是分布为的正态母体的一个子样，求$Y=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$的概率分布。

解：

$\because X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则$y_i=\frac{x_i-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$，且$Y_1,\ldots,Y_n$之间相互独立

$$Y=\frac{1}{\sigma^2}\sum_i(x_i-\mu)^2=\sum_i(\frac{x_i-\mu}{\sigma})^2=\sum_i y_i^2$$

由χ^2分布定义$Y\sim\chi^2(n)$，Y服从自由度为n的χ^2分布。

6.设母体X具有正态分布N(0,1)，从此母体中取一容量为6的子样（x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6）。又设$Y=(X_1+X_2+X_3)^2+(X_4+X_5+X_6)^2$。试决定常数C,使得随机变量CY服从$\chi^2$分布。

解： $X \sim N(0,1), Z_1 = X_1 + X_2 + X_3 \sim N(0,3),$

$$\frac{Z_1}{\sqrt{3}} \sim N(0,1), \frac{{Z_1}^2}{3} \sim {\chi_1}^2(1)$$

$Z_2 = X_4 + X_5 + X_6$亦服从N(0,3)且与Z_1相互独立

$$\frac{Z_2}{\sqrt{3}} \sim N(0,1), \frac{{Z_2}^2}{3} \sim \chi^2(1)$$

且与χ^2相互独立。由χ^2分布可加性，

$$\frac{{Z_1}^2}{3} + \frac{{Z_2}^2}{3} = \frac{1}{3}({Z_1}^2 + {Z_2}^2) = \frac{1}{3}Y \sim \chi^2(2), \therefore c = \frac{1}{3}$$

7. 已知 $X \sim t(n)$ **，求证** $X^2 \sim F(1,n)$

证明：令 $X = \dfrac{U}{\sqrt{\chi^2 / n}} \sim t(n)$, 其中 $U \sim N(0,1)$

$\chi^2 \sim \chi^2(n)$, 且 U 与 χ^2 独立, U^2 亦与 χ^2 独立

$$X^2 = \frac{U^2}{\chi^2 / n}, \text{由} F \text{分布定义} \therefore X^2 \sim F(1,n)$$

8设母体$X\sim N(40,5^2)$,从中抽取容量n的样本

求（1）n=36时，$P(38\le \bar{x}\le 43)$

解：$\because \bar{x}\sim N(40,\frac{5^2}{64})$

$$\therefore P\left\{38\le \bar{x}\le 43\right\}=P\{\frac{38-40}{5/6}\le\frac{\bar{x}-40}{5/6}\le\frac{43-40}{5/6}\}$$

$$=P\{-2.4\le U\le 3.6\}=\Phi(3.6)-\Phi(-2.4)=\Phi(2.4)=0.9918$$

（2）n=64时，求$P\{\left|\bar{x}-40\right|<1\}$

解：$\bar{x}\sim N(40,\frac{5^2}{64})$

$$\therefore P\{\left|\bar{x}-40\right|<1\}=P\{\left|\frac{\bar{x}-40}{5/8}\right|<\frac{1}{5/8}\}=p\{\left|U\right|<\frac{8}{5}\}$$

$$=2\Phi(\frac{8}{5})-1=0.8904$$

第七章　　点估计

1. 设母体X具有负指数分布，它的分布密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0 \\ 0, x < 0\end{cases}$$

其中 $\lambda > 0$ 。试用矩法求的估计量。

解：$x \sim e(\lambda)$

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0 \\ 0, x < 0\end{cases} \qquad （\lambda > 0）$$

$$Ex = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}$$

用样本 $\overline{x}$ 估计Ex，则有 $\overline{x} = \frac{1}{\lambda}, \therefore \hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{x}}$

2.设母体X具有几何分布,它的分布列为 P{X=k}=(1-p)$^{k-1}$p,k=1,2,… 先用矩法求p的估计量,再求p的最大似然估计.

解 :(1)矩法估计

$$EX=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot(1-p)^{k-1}\cdot p=p\sum_{k}[-(1-p)^{k}]'=p\cdot\frac{1}{p^{2}}=\frac{1}{p}$$

$$\therefore \hat{p}=\frac{1}{\overline{x}}$$

$$((\sum_{i}-(1-x)^{i})'=[\frac{x-1}{1-(1-x)}]'=(\frac{x-1}{x})'=\frac{1}{x^{2}})$$

(2)极大似然估计

$$L = \prod_{i=1}^{n} (1-p)^{x_i - 1} \cdot p = (1-p)^{\sum_i x_i - n} \cdot p^n$$

$$\ln L = (\sum_i x_i - n) \cdot \ln(1-p) + n \ln p$$

$$\frac{d \ln L}{dp} = \frac{n - \sum_i x_i}{1-p} + \frac{n}{p} = 0, \hat{p} = \frac{1}{\overline{x}}$$

3.设母体X具有在区间[a,b]上的均匀分布,其分布密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, a\le x\le b\\ 0, 其他\end{cases}$$

其中a,b是未知参数,试用矩法求a与b的估计量.

解: $X\sim U[a,b], EX=\dfrac{a+b}{2}, DX=\dfrac{1}{12}(b-a)^2$

用 $\overline{X}$ **和** S^2 **分别估计EX和DX**

得 $\begin{cases}\overline{X}\triangleq\dfrac{a+b}{2}\\ S^2\triangleq\dfrac{(b-a)^2}{12}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\hat{a}=\overline{X}-\sqrt{3}S\\ \hat{b}=\overline{X}+\sqrt{3}S\end{cases}$

4.设母体X的分布密度为

$$f(x)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, 0<x<1\\ 0, 其他\end{cases}$$ 其中$\theta>0$

(1) 求 θ的最大似然估计量;

(2) 用矩法求 θ 的估计量.

解:

$$x\sim f(x)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, 0<x<1\\ 0, 其他\end{cases} \quad (\ \theta>0\ )$$

1最大似然估计 $L=\prod_{i=1}^{n}\theta\cdot x_i^{\theta-1}=\theta^n\cdot\prod_{i=1}^{n}x_i^{\theta-1}$

$$\ln L=n\ln\theta+(\theta-1)\sum_i\ln x_i$$

$$\frac{d\ln L}{d\theta}=\frac{n}{\theta}+\sum_i\ln x_i=0, \therefore \hat{\theta}=-\frac{n}{\sum_i\ln x_i}$$

2矩法估计

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx=\int_{0}^{1} x\cdot\theta\cdot x^{\theta-1}dx=\frac{\theta}{\theta+1}$$

用 $\overline{X}$ 估计EX

$$\therefore\theta=\frac{\overline{X}}{1-\overline{X}}$$

5.设母体X的密度为$f(x)=\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}},-\infty<x<\infty$

试求 σ的最大似然估计;并问所得估计量是否的无偏估计.

解:

$$L=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}=(\frac{1}{2\sigma})^n e^{-\frac{\sum_i |x_i|}{\sigma}}$$

$$\ln L=-n\ln 2-n\ln\sigma-\frac{\sum_i |x_i|}{\sigma}$$

$$\frac{d\ln L}{d\sigma}=-\frac{n}{\sigma}+\frac{\sum_i |x_i|}{\sigma^2}=0$$

得 $\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sum_i |x_i|$

$$E|x_i| = E|X| = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}} dx = 2\int_{0}^{\infty} x \cdot \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{x}{\sigma}} dx = \sigma$$

$$\therefore E\sigma = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i} |x_i|\right) = \frac{1}{n}\sum_{i} E|x_i| = \sigma$$

$\hat{\sigma}$ 是 σ 的无偏估计.

6.设母体X具有分布密度

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\beta^k}{(k-1)!}x^{k-1}e^{-\beta x}, x>0 \\ 0, 其他 \end{cases}$$

其中k是已知的正整数,试求未知参数的最大似然估计量.

解:似然函数

$$L=\prod_{i=1}^{n}\frac{\beta^k}{(k-1)!}x_i^{k-1}e^{-\beta x_i}=(\frac{1}{(k-1)!})^n\beta^{nk}(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{k-1}e^{-\beta\sum_i x_i}$$

$$\ln L=-n\ln(k-1)!+nk\ln\beta+\ln(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{k-1}-\beta\sum_i x_i$$

$$\frac{d\ln L}{d\beta}=\frac{nk}{\beta}-\sum_i x_i=0, \therefore \hat{\beta}=\frac{k}{\overline{\overline{x}}}\text{或}\hat{\beta}=\frac{k}{\overline{\overline{x}}}$$

7.设母体X具有均匀分布密度 $f(x)=\frac{1}{\beta}, 0\le x\le\beta$ ，从中抽得容量为6的子样数值1.3,0.6,1.7,2.2,0.3,1.1,试求母体平均数和方差的最大似然估计量的值.

解: $X\sim U(0,\beta)$ ，β 的最大似然估计

$$\hat{\beta}=\max x_i=2.2$$

β

$$\mu=EX=\frac{\beta}{2},\therefore \hat{\mu}=\frac{\hat{\beta}}{2}=1.1$$

$$\sigma^2=DX=\frac{\beta^2}{12},\therefore \hat{\sigma}^2=\frac{1}{12}\hat{\beta}^2=0.4033$$

8.设母体X的分布密度为

$$f(x)=\begin{cases} e^{-(x-\theta)}, x \ge \theta \\ 0, x < 0 \end{cases}$$

试求 θ的最大似然估计。

解：

$$X \sim f(x) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)}, x \ge \theta \\ 0, x < 0 \end{cases}$$

似然函数 $L = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \prod_{i=1}^{n} e^{-(x_i-\theta)}$

$$\ln L = -(\sum_i x_i - n\theta), \frac{d\ln L}{d\theta} = 0\text{无解}$$

为了使L达到最大，$\sum_i x_i - n\theta \ge 0$，尽可能小，尽可能大，而 $\hat{\theta}$

$$\theta \le x_i, \therefore \hat{\theta} = \min_{1 \le i \le n} x_i = x_{(1)}$$

9设母体X服从正态分布 $N(\mu,1),(X_1,X_2)$是从此母体中抽取的一个子样。试验证下面三个估计量

（1）$\hat{\mu}_1=\frac{2}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2$

（2）$\hat{\mu}_2=\frac{1}{4}X_1+\frac{3}{4}X_2$

（3）$\hat{\mu}_3=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2$

都是 μ 的无偏估计，并求出每个估计量的方差。问哪一个方差最小？

解：$E\hat{\mu}_1=E(\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2)=\frac{2}{3}Ex_1+\frac{1}{3}Ex_2=\frac{2}{3}\mu+\frac{1}{3}\mu=\mu$

同理：$\hat{\mu}_2$和$\hat{\mu}_3$都是 μ 的无偏估计。

$$D\hat{\mu}_1 = (\frac{2}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2 = \frac{5}{9}, D\hat{\mu}_2 = (\frac{1}{4})^2 + (\frac{3}{4})^2 = \frac{5}{8}, D\hat{\mu}_3 = (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$$

$\therefore \hat{\mu}_3$ 方差最小为有效

对形如$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} x_i x_i$, 且$\sum_i x_i \equiv 1$时, $E\mu = \mu$, 以 $\bar{x}$ 为最有效

$$D\bar{x} = \frac{\sigma^2}{n}$$

10. 设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是具有泊松分布$P(\lambda)$ 母体的一个子样。试验证：子样方差S^{*2} 是λ的无偏估计；并且对任一值$\alpha \in [0,1], \alpha \overline{X} + (1-\alpha) S^{*2}$也是$\lambda$ 的无偏估计，此处$\overline{X}$为子样的平均数

解：$X \sim P(\lambda), EX = \lambda, DX = \lambda, E\overline{X} = \lambda, ES^{*2} = \lambda$

$E(\alpha \overline{X} + (1-\alpha) S^{*2}] = \alpha E\overline{X} + (1-\alpha) ES^{*2} = \alpha\lambda + (1-\alpha)\lambda = \lambda$

11 .设$X_1,X_2,\ldots,X_n$为母体$N(\mu,\sigma^2)$的一个子样。试选择适当常数C,使$C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$为$\sigma^2$的无偏估计。

解：$\sum_i (x_{i+1}-x_i)^2 = \sum_i [(x_{i+1}-\mu)-(x_i-\mu)]^2$

$$= \sum_i (x_i-\mu)^2 - 2\sum_i (x_{i+1}-\mu)(x_i-\mu) + \sum_i (x_i-\mu)^2$$

$$\left(E(x_{i+1}-\mu)(x_i-\mu)=0\right)$$

$$E\sum_i (x_{i+1}-x_i)^2 = E\sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1}-\mu)^2 - 2\sum_i E(x_{i+1}-\mu)(x_i-\mu) + E\sum_{i=1}^{n-1}(x_i-\mu)^2$$

$$=(n-1)\sigma^2+0+(n-1)\sigma^2 = 2(n-1)\sigma^2$$

$$E\left[\frac{\sum_i (x_{i+1}-x_i)^2}{2(n-1)}\right]=\sigma^2, \therefore c=\frac{1}{2(n-1)}$$

12.从一批电子管中抽取100只,若抽取的电子管的平均寿命为1000小时,标准差s为40小时,试求整批电子管的平均寿命的置信区间(给定置信概率为95%).

解:n=100, $\bar{x}=1000$ 小时,s=40小时

用 $\bar{x}$ 估计 μ,构造函数 $u=\dfrac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}\overset{近似}{\sim}N(0,1)$

给定置信概率 $1-\alpha$,有 $P\{|u|\le u_{\frac{\alpha}{2}}\}\approx 1-\alpha$

即 $P(\bar{x}-u_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{s}{\sqrt{n}}\le\mu\le\bar{x}+u_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{s}{\sqrt{n}})\approx 1-\alpha$

$\therefore$ 置信下限 $\bar{\mathrm{x}}-u_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{s}{\sqrt{n}}=1000-1.96\times\dfrac{40}{10}=992.2$

置信上限 $\bar{\mathrm{x}}+u_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{s}{\sqrt{n}}=1000+1.96\times\dfrac{40}{10}=1007.8$

$\therefore$ 整批电子管的平均寿命置信概率为95%的置信区间为(992.2,1007.8)小时.

13.随机地从一批钉子中抽取16枚,测得其长度(单位:cm)为

2.14,2.10,2.13,2.15,2.13,2.12,2.13,2.10,2.15,2.12,2.14,2.10,2.13,2.11,2.14,2.11。设钉长分布为正态的，试求母体平均数 μ 的置信概率为90%的置信区间：（1）若已知 $\sigma=0.01(cm)$;（2）若 σ 未知。

解：n=16, $\bar{x}=2.125, s^{*}=0.017$

(1)若已知 $\sigma=0.01(cm)$，构造函数 $u=\dfrac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

给定置信概率90%，有 $P\{|u|\leq u_{\frac{\alpha}{2}}\}=1-\alpha$

即 $P(\bar{x}-u_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\leq\mu\leq\bar{x}+u_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}})=1-\alpha$

$\therefore$ 置信区间为 $(\bar{x}\pm u_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}})$ 为 (2.125 ± 0.0041)

（2）若σ 未知

构造函数 $T=\dfrac{x-\mu}{S^{*}/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

给定置信概率90%，查得 $t_{0.05}(15)=1.7531$，有

$$p(|T|<t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))=1-\alpha$$

$\therefore$ 母体平均数 μ 的置信概率为90%的置信区间为 $(\bar{x}\pm t_{0.05}(15)\dfrac{s^{*}}{\sqrt{n}})$ ，即（2.125±0.0075）

14.假定每次试验时，出现事件A的概率p相同但未知。如果在60次独立试验中，事件A出现15次，试求概率p的置信区间（给定置信概率为0.95）。

解：n=60,m=15,x~“0-1”分布，$\bar{x}=\frac{m}{n}, s=\sqrt{\frac{m}{n}(1-\frac{m}{n})}$

构造函数$u=\frac{x-p}{s/\sqrt{n}} \overset{近似}{\sim} N(0,1)$

给定置信概率95%，有$P\{|u|<u_{\frac{\alpha}{2}}\}\approx 1-\alpha$

即 $p(\frac{m}{n}-u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{n}\frac{m}{n}(1-\frac{m}{n})}<p<\frac{m}{n}+u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{n}\frac{m}{n}(1-\frac{m}{n})}\}\approx 1-\alpha$

故p的置信概率为95%的置信区间为（0.25±0.11）

15.对于方差σ^2 为已知的正态母体，问需抽取容量n为多大的子样，才使母体平均数μ的置信概率为$1-\alpha$ 的置信区间的长度不大于L?

解：$X \sim N(\mu,\sigma^2),\sigma^2$已知

构造函数 $u=\dfrac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

给定置信概率$1-\alpha$，有$u_{\frac{\alpha}{2}}$，使

$$P\{|u| \le u_{\frac{\alpha}{2}}\}=1-\alpha$$

即 $P(\bar{x}-u_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{x}+u_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})=1-\alpha$

置信区间长度 $2u_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \le L$ $\quad\therefore n \ge 4\sigma^2 u_{\frac{\alpha}{2}}^{\ 2}/L^2$

16.从正态母体中抽取一个容量为n的子样，算得子样标准差s^*的数值。设（1）n=10, s^*=5.1(2)n=46, s^* =14。试求母体标准差σ的置信概率为0.99的置信区间。

解: $X \sim N(\mu,\sigma^2), \mu,\sigma^2$未知

（1）n=10, $s^{*2}=5.1$

用s^{*2}估计σ^2 ,构造函数$\chi^2=\dfrac{(n-1)s^{*2}}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

给定置信概率$1-\alpha$=99%,查表得

$$\chi^2_{0.005}(9)=23.589, \chi^2_{0.995}(9)=1.735$$

使 $p\{\chi^2_{0.995}(9)<\chi^2<\chi^2_{0.005}(9)\}=0.99$

母体 σ 的置信概率为0.99的置信区间是

$$\left(\frac{3s^*}{\sqrt{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(9)}},\frac{3s^*}{\sqrt{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}}\right)$$ 即(3.150,11.62)

(2)n=46, $s^{*}=14$ 时,所求的置信区间是

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)s^{*2}}{\chi^2_{0.005}(45)}},\sqrt{\frac{(n-1)s^{*2}}{\chi^2_{0.995}(45)}}\right)$$ 即(10.979,19.047)

17.设母体X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，$\overline{X}$ 和 $S_n^{\ 2}$ 是子样$X_1,X_2,\ldots,X_n$的平均数和方差；又设 $X_{n+1} \sim N(\mu,\sigma^2)$，且与$X_1,X_2,\ldots,X_n$独立，试求统计量 $\dfrac{X_{n+1}-\overline{X}}{S_n}\sqrt{\dfrac{n-1}{n+1}}$ 的抽样分布.

解: $E(X_{n+1}-\overline{X})=\mu-\mu=0$

$D(X_{n+1}-\overline{X})=\sigma^2+\dfrac{\sigma^2}{n}=(1+\dfrac{1}{n})\sigma^2$，又 $X_{n+1},\overline{X}$

服从正态分布，故$\mu=\dfrac{X_{n+1}-\overline{X}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}\sigma}\sim N(0,1)$，$\dfrac{nS_n^{\ 2}}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

又 $S_n^{\ 2}$ 与 $X_{n+1},\overline{X}$ 独立

根据t分布定义

$$T=\frac{U}{\sqrt{\frac{nS_n^2}{\sigma^2(n-1)}}}=\frac{X_{n+1}-\overline{X}}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}}\sqrt{\frac{n-1}{nS_n^2}}=\frac{X_{n+1}-\overline{X}}{S_n}\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\sim t(n-1)$$

18.设$X_1,X_2,\ldots,X_m$和$Y_1,Y_2,\ldots,Y_n$分别是从分布

为$N(\mu_1,\sigma^2)$和$N(\mu_2,\sigma^2)$两个母体中抽取的独立随机子样，$\overline{X}$和$\overline{Y}$ 分别表示X和Y的子样平均数，S_x^* 和S_y^* 分别表示X和Y的子样方差.对任意两个固定实数 α 和β ，试求随机变量

$$Y=\frac{\alpha(\overline{X}-\mu_1)+\beta(\overline{Y}-\mu_2)}{\sqrt{\frac{mS_x^{*2}+nS_y^{*2}}{m+n-2}}\sqrt{\frac{\alpha^2}{m}+\frac{\beta^2}{n}}}$$

的概率分布.

解: $\alpha\overline{X}+\beta\overline{Y}$ 是正态变量线性组合,仍服从正态分布.

$$E(\alpha\overline{X}+\beta\overline{Y})=\alpha\mu_1+\beta\mu_2$$

$$D(\alpha\overline{X}+\beta\overline{Y})=(\frac{\alpha^2}{m}+\frac{\beta^2}{n})\sigma^2$$

$$\therefore U=\frac{(\alpha\overline{X}+\beta\overline{Y})-(\alpha\mu_1+\beta\mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{\alpha^2}{m}+\frac{\beta^2}{n}}}\sim N(0,1)$$

又 $\frac{mS_x^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(m-1),\frac{nS_y{}^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ 且相互独立

由 χ^2 分布可加性 $\frac{mS_x^2+nS_y^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(m+n-2)$ 且与 $\overline{X}$, $\overline{Y}$ 独立

根据t分布定义 $T=\frac{U}{\sqrt{\frac{mS_x{}^2+nS_y{}^2}{\sigma^2(m+n-2)}}}=\frac{\alpha(\overline{X}-\mu_1)+\beta(\overline{Y}-\mu_2)}{\sqrt{\frac{mS_x{}^2+nS_y{}^2}{m+n-2}}\sqrt{\frac{\alpha^2}{m}+\frac{\beta^2}{n}}}\sim t(m+n-2)$

19.从正态母体中抽取一个n>45的大子样,利用第一章2.2中χ^2分布的性质3,证明方差σ^2的置信区间(给定置信概率为$1-\alpha$)是

$$\left(\frac{S^{*2}}{1+\sqrt{\frac{2}{n-1}}u_{\frac{\alpha}{2}}},\frac{S^{*2}}{1-\sqrt{\frac{2}{n-1}}u_{\frac{\alpha}{2}}}\right)$$

证明:对正态母体 σ^2 的置信概率为 $1-\alpha$ 的置信区间是

$$\left(\frac{(n-1)S^{*2}}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S^{*2}}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right) \qquad (1)$$

当n>45时, $\chi^2_{\alpha}(n) \approx n + \sqrt{2n}u_{\alpha}$

$$\therefore \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \approx (n-1) + \sqrt{2(n-1)}u_{\frac{\alpha}{2}}$$

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \approx (n-1) + \sqrt{2(n-1)}u_{1-\frac{\alpha}{2}} = (n-1) - \sqrt{2(n-1)}u_{\frac{\alpha}{2}}$$

代入(1)式,即

$$\left(\frac{S^{*2}}{1+\sqrt{\frac{2}{n-1}}u_{\frac{\alpha}{2}}}, \frac{S^{*2}}{1-\sqrt{\frac{2}{n-1}}u_{\frac{\alpha}{2}}}\right) \qquad \text{证毕.}$$

20.随机地从A批导线中抽取4根,从B批导线中抽取5根,测得其电阻(单位:欧姆)并计算得:

$$\bar{x}_A = 0.1425, 3s_A^{*2} = 0.000025$$

$$\bar{x}_B = 0.1392, 4s_B^{*2} = 0.000021$$

设测试数据分别具有分布$N(\mu_1,\sigma^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma^2)$.试求 $\mu_1-\mu_2$ 的置信概率为95%的置信区间.

解: $X_A \sim N(\mu_1, \sigma^2), X_B \sim N(\mu_2, \sigma^2), \quad n_A = 4, n_B = 5$

$\overline{x}_A = 0.1425, 3s_A^{*2} = 0.000025$

$\overline{x}_B = 0.1392, 4s_B^{*2} = 0.000021$

构造函数 $T = \dfrac{\overline{X_1} - \overline{X_2} - (\mu_1 - \mu 2)}{\sqrt{\dfrac{1}{n_A} + \dfrac{1}{n_B}} S^*} \sim t(n_A + n_B - 2)$

给定置信概率95%,查得 $t_{0.025}(7) = 2.3646$,使

$$P(|T| < t_{0.025}(7)) = 95\%$$

所求置信下限为:

$$\overline{x_A} - \overline{x_B} - t_{0.025}(7)\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{5}} s^* = 0.0033 - 0.00406 = -0.00076$$

置信上限为:0.0033+0.00406=0.00736

$\therefore$ (-0.00076,0.00736)为$\mu_1 - \mu_2$的置信概率为95%的置信区间.

21.两台机床加工同一种零件,分别抽取6个和9个零件,测得其长度计算得$s_1^{*2}=0.245, s_2^{*2}=0.357$ 假定各台机床零件长度服从正态分布.试求两个母体方差之比$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信区间(给定置信概率为95%).

解: $n_1=6, s_1^{*2}=0.245; n_2=9, s_2^{*2}=0.357$

构造函数 $F=\frac{\sigma_1^2/\sigma_2^2}{S_1^{*2}/S_2^{*2}} \sim F(n_2-1, n_1-1)$

给定置信概率 $1-\alpha=95\%$,有

$$P\{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2-1,n_1-1)\frac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}}<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<F_{\frac{\alpha}{2}}(n_2-1,n_1-1)\frac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}}\}=1-\alpha$$

查表 $F_{0.025}(8,5)=6.76, \frac{1}{F_{0.025}(5,8)}=\frac{1}{4.82}$

$\therefore$ 所求置信区间的置信下限为$\frac{1}{4.82}\times\frac{0.245}{0.357}=0.142$

置信上限为$6.76\times\frac{0.245}{0.357}=4.64$

22.从一批某种型号电子管中抽出容量为10的子样,计算得标准差$s^* = 45$ (小时).设整批电子管服从正态分布.试给出这批管子寿命标准差 σ 的单侧置信上限(置信概率为95%).

解:n=10, $s^* = 45$(小时)

构造函数 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^{*2}}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

给定置信概率95%,查$\chi^2_{0.95}(9) = 3.325$,使

$P\{\chi^2 \geq \chi^2_{1-\alpha}(n-1)\} = 1-\alpha$ 即

$$P\{\sigma^2 < \frac{(n-1)s^{*2}}{\chi^2_{0.95}(9)}\} = 0.95$$

故所求σ 的置信概率为95%的置信上限为

$$\sqrt{\frac{9 \times 45^2}{3.325}} = \frac{3 \times 45}{1.823} = 74.05$$

第七章 假设检验

1.从已知标准差 $\sigma = 5.2$ 的正态母体中,抽取容量为n=16的子样,由它算得子样平均数 $\bar{x} = 27.56$.试在显著水平0.05下,检验假设H$_0$: $\mu = 26$

解:1.建立原假设H$_0$: $\mu = 26$

2.在H$_0$成立前提下,构造统计量 $u = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$

3.给定显著水平 $\alpha = 0.05$,有 $u_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$,使

$$P\{|u| \geq u_{\frac{\alpha}{2}}\} = \alpha \quad \text{即} \quad P\{\frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \geq 1.96\} = 0.05$$

4.由样本n=16, $\bar{x} = 27.56$ 代入

$$|u| = \frac{27.56 - 26}{5.2 / 4} = 1.2 < u_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96 \quad \therefore \text{接受H}_0$$

2.从正态母体 $N(\mu,1)$ 中取100个样品,计算得 $\bar{x}=5.32$

(1)试检验H_0: $\mu=5$ 是否成立$(\alpha=0.01)$?

(2)计算上述检验在 $\mu=4.8$ 时犯第二类错误的概率.

解:(1)1.建立原假设H_0: $\mu=5$

2.在H_0成立前提下,构造统计量 $u=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

3.给定显著水平 $\alpha=0.01$,有$u_{\frac{\alpha}{2}}=2.575$,使

$$P\{|u|\geq u_{\frac{\alpha}{2}}\}=\alpha \text{ 即 } P\{\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma_0/\sqrt{n}}\geq 2.575\}=0.01$$

代入

$$|u|=\frac{5.32-5}{1/10}=3.2>2.575 \quad \therefore \text{ 拒绝} H_0$$

(2)真实 $\mu = 4.8$ 时，

$$\beta = \int_{H_0\text{接受域}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{(\bar{x}-\mu_1)^2}{2\frac{\sigma_0^2}{n}}} d\bar{x}$$

$$= \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} + u_{\frac{\alpha}{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} - u_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{5-4.8}{1/10} + 2.575\right) - \Phi\left(\frac{5-4.8}{1/10} - 2.575\right)$$

$$= \Phi(4.575) - \Phi(-0.575)$$

$$= \Phi(0.575)$$

$$= 0.719$$

3.某批砂矿的5个样品中的镍含量经测定为

x(%) 3.25 3.27 3.24 3.26 3.24

设测定值服从正态分布。问在下$\alpha=0.01$能否接受假设：这批矿砂的(平均)镍含量为3.25。

解：设 $x\sim N(\mu,\sigma^2)$ ，σ^2未知，计算$\overline{x}$ ＝3.252， s^*=0.013。

（1）建立假设 H_0 ：$\mu=3.25$

（2）在假设成立的前提下，构造统计量

$$t=\frac{(\bar{x}-\mu_0)}{s^*/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

（3）给定 α ,查得 $t_{\frac{\alpha}{2}}$ =4.6041

$$P\left\{|T|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n\underset{u=x}{-}1)\right\}=\alpha$$

（4）由样本计算，

$|t|$ = $\frac{3.525-3.25}{0.013/\sqrt{5}}$ =0.34 < $t_{\frac{\alpha}{2}}(4)$

$\therefore$ 接受 H_0

4.某电器零件的平均电阻一直保持在2.64欧姆。改变加工工艺后，测得100个零件的平均电阻为2.62欧姆，电阻标准差（s）为0.06欧姆，问新工艺对此零件的电阻有无显著影响 $(\alpha = 0.01)$？

解：（1）建立假设 H_0：$\mu = 2.64\Omega$

n=100, $\bar{x} = 2.62$,s=0.06

（2）在 H_0 成立前提下，构造统计量

$$u = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

（3）给定 $\alpha = 0.01$，有 $u_{\frac{\alpha}{2}} = 2.575$，使

$$p\left\{|u| \geq u_{\frac{\alpha}{2}}\right\} \approx \alpha$$

（4）由样本计算：

$$|u| = \frac{|2.62 - 2.64|}{0.06/10} = \frac{0.02 \times 10}{0.06} = \frac{10}{3} > u_{\frac{\alpha}{2}} = 2.575$$

$\therefore$ 拒绝 H_0，有显著影响。

5.某纺织厂在正常的运转条件下，各台布机一小时内经纱平均断头数为0.973根，断头数的标准差为0.162根。该厂进行工艺改革，减少轻纱上浆率。在200台布机上试验，结果每台一小时内经纱平均断头数为0.994根，标准差（s）为0.16根，问新工艺经纱断头数与旧工艺有无显著差异（$\alpha = 0.05$）？

解：（1）建立假设 H_0： $\mu = 0.973$

n=100, $\bar{x} = 2.62$,s=0.06

（2）在 H_0 成立的前提下，构造统计量

$$u=\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

（3）给定 $\alpha=0.05$ ，查得 $u_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$ ，使

$$p\left\{|u|\geq u_{\frac{\alpha}{2}}\right\}\approx\alpha$$

（4）由样本计算，

$$|u|=\frac{0.994-0.973}{0.16/\sqrt{200}}=\frac{21}{16}\times\sqrt{2}=1.86<u_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$$

$\therefore$ 接受 H_0

6.某产品的次品率为0.17。现对此产品进行新工艺试验，从中抽取400件检验，发现有次品56件。能否认为这项新工艺显著地影响产品的质量（ $\alpha = 0.05$ ）？

解：（1）建立假设 H_0： $p = 0.17$

（2）在 H_0 成立的前提下，构造统计量

$$u = \frac{\bar{x} - p_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{\frac{m}{n} - p_0}{\sqrt{\frac{1}{n} p_0 (1 - p_0)}} \sim N(0,1)$$

（3）给定 $\alpha = 0.05$ ，查的 $u_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$，使得

$$p\left\{|u| \geq u_{\frac{\alpha}{2}}\right\} \approx \alpha$$

（4）由样本计算，

$$|u| = \frac{\left|\frac{56}{400} - 0.17\right|}{\sqrt{\frac{1}{400} \times 0.17 \times 0.83}} = \frac{0.03}{0.0188} = 1.595 < u_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

$\therefore$ 接受 H_0

7.某切割机正常工作时，切割每段金属棒的平均长度为10.5cm。今在某段时间内随机的抽取15段进行测量，某结果如下（cm）：10.4，10.6，10.1，10.4，10.5，10.3，10.3，10.2，10.9，10.6，10.8，10.5，10.7，10.2，10.7。问此段时间内该机工作是否正常（$\alpha = 5\%$）假定金属棒长度服从正态分布。

解：（1）建立假设 H_0 ： $\mu = 10.5$

n=15, $\bar{x} = 10.48$, $s^* = 0.2366$

（2）在 H_0 成立的前提下，构造统计量

$$T=\frac{\bar{x}-\mu_0}{s^*/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

（3）给定 $\alpha=0.05$，查得 $t_{\frac{\alpha}{2}}(14)=2.1448$，使

$$p\left\{|T|>t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}=\alpha$$

（4）由样本计算，

$$|T|=\frac{|10.48-10.5|}{0.2366/\sqrt{15}}=\frac{0.02\times\sqrt{15}}{0.2336}=0.327<t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=2.1448$$

$\therefore$ 接受 H_0，工作正常。

8.从某种实验物中取出24个样品，测量其发热量，计算得 $\bar{x}=11958$ 子样标准差 $s^*=323$ ，问以5%的显著水平是否可认为发热量的期望值是12100（假定发热量服从正态分布）？

解：（1）建立假设 H_0： $\mu=12100$

n=24， $\bar{x}=11958$ ， $s^*=323$

（2）在 H_0 成立的前提下，构造统计量

$$T=\frac{\bar{x}-\mu_0}{s^*/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

（3）给定 $\alpha=0.05$ ， 查得 $t_{0.025}(23)=2.069$

（4）由样本计算，

$$|t| = \frac{|11958 - 12100|}{323/\sqrt{24}} = \frac{142 \times \sqrt{24}}{323} = 2.1537 > t_{0.025}(23) = 2.069)$$

$\therefore$ 拒绝 H_0

9.有一种新安眠药，据说在一定剂量下，能比某种安眠药平均增加睡眠时间3小时。根据质料用旧安眠药睡眠时间平均为20.8小时，标准差为1.6小时。为了检验这个说法是否正确，收集到一组使用新安眠药的睡眠时间为 26.7，22.0，24.1，21.0，27.2，25.0，23.4

试问：从这组数据能否说明新安眠药的睡眠时间已达到新的疗效（假定睡眠时间服从正态分布，取 $\alpha = 0.05$ ）？

解： $x_1 \sim (20.8, 1.6^2)$ $x_2 \sim (\mu, \sigma_2{}^2)$

1、（1）建立假设 H_0 ： $\sigma^2 = \sigma_0{}^2 = 1.6^2$

$s^* = 2.296$

（2）在 H_0 成立的前提下，构造统计量

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^*}{\sigma_0} \sim \chi^2(n-1)$$

（3）给定 $\alpha = 0.05$ ，查得

$$\chi_{\frac{\alpha}{2}}{}^2(5) = 14.49 \qquad \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}{}^2(5) = 1.237$$

（4）由样本计算，

$$\chi^2=\frac{6\times 2.296^2}{1.6^2}=12.355<\chi_{\frac{\alpha}{2}}^{\ 2}(6)=14.49$$

∴ 接受 H_0

2、（1）建立假设 $H_0: \mu=23.8$

（2）在 H_0 成立的前提下，构造统计量

$$t=\frac{\bar{x}-\mu_0}{s^*/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

（3）给定 $\alpha=0.05$，查得 $t_{\frac{\alpha}{2}}(6)=2.4469$

（4）由样本计算，$|t|=\frac{|24.2-23.8|}{2.296/\sqrt{7}}=\frac{0.4\times\sqrt{7}}{2.296}=0.46<t_{\frac{\alpha}{2}}(6)$

∴ 接受 H_0，认为达到效果

10.为了比较两种枪弹的速度（单位：米/秒），在相同的条件下进行速度测定。算得子样平均数和子样标准差

枪弹甲 $n_1 = 110$ $\bar{x}_1 = 2805$ $s_1 = 120.41$

枪弹乙 $n_2 = 100$ $\bar{x}_2 = 2680$ $s_2 = 105.00$

在显著水平 $\alpha = 0.05$ 下，这两种枪弹(平均)速度有无显著差异？

解：（1）建立假设 $H_0: \mu_1 = \mu_2$

（2）在 H_0 成立的前提下，构造统计量

$$u=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

（3）给定 $\alpha=0.05$ ，查得 $u_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$

（4）由样本计算

$$|u|=\frac{|2805-2680|}{\sqrt{\frac{120^2}{110}+\frac{105^2}{100}}}=\frac{125}{\sqrt{130.9+110.25}}=\frac{125}{15.53}=8.04>u_{\frac{\alpha}{2}}$$

∴ 拒绝 H_0 ，有显著差异。

11.在十块田地上同时试种甲、乙两种品种作物，根据产量计算得 $\bar{x}=30.97$，$\bar{y}=21.79$ ，$s_x^*=26.7$ $s_y^*=21.1$ 。试问这两种品种产量有无明显差异（$\alpha=1\%$）？假定两种品种作物产量分别服从正态分布，且方差相等。

解：1、（1）建立假设 H_0：$\sigma_x^2=\sigma_y^2$

（2）在 H_0 成立的前提下，构造统计量

$$F=\frac{s_x^{*2}}{s_y^{*2}}\sim F(n_1-1,n_2-1)$$

给定显著水平$\alpha=0.01$，查得$F_{9,9}(\frac{0.01}{2})=6.54$

当$F=\frac{s_x^{*2}}{s_y^{*2}}>1$时，有$p\{F\geq F_{0.005}(9,9)\}=0.005$

（4）由样本计算，$\frac{s_x^{*2}}{s_y^{*2}}=\frac{26.7^2}{21.1^2}=1.6<F_{0.005}(9,9)$

$\therefore$接受H_0，认为两正态母体方差相等。

2、（1）建立假设 H_0： $\mu_1 = \mu_2$

（2）在 H_0成立的前提下，构造统计量

$$T = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s^* / \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1, n_2)$$

(3)给定显著水平 $\alpha = 0.01$，查 $t_{\frac{\alpha}{2}}(18) = 2.8784$

(4)由样本计算，

$$s^* = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_x^2 + (n_2 - 1)s_y^2}{n_1 + n_2 - 2}} = 8.02$$

$$|t| = \frac{|26.7 - 21.1|}{8.02 \times \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9}}} = \frac{5.6}{8.02} \times \sqrt{5} = 1.561 < t_{0.005}(18)$$

$\therefore$ 接受H_0，认为这两种作物产量无明显差异。

12.为确定肥料的效果,取1000株植物做试验。在没有施肥的100株植物中，有53株长势良好；在已施肥的900株中，则有783株长势良好。问施肥的效果是否显著（ $\alpha = 0.01$ ）？

解：（1）建立假设 $H_0: p_1 = p_2$

（2）在H_0成立的前提下，构造统计量

$$u=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1{}^2}{n_1}-\frac{s_2{}^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

(3)给定显著水平$\alpha=0.01$，查得$u_{\frac{\alpha}{2}}=2.575$,使

$$\mathrm{p}\left\{|\mathrm{u}|\geq \mathrm{u}_{\frac{\alpha}{2}}\right\}\approx\alpha$$

(4)由样本计算,$\hat{p}_1=0.53,\hat{p}_2=0.87$

$s_1{}^2=\hat{p}_1\hat{q}_1=0.53\times0.47,s_2{}^2=\hat{p}_2\hat{q}_2=0.87\times0.13$

$n_1=100,n_2=900,$代入

$$|u| = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\frac{s_1{}^2}{n_1} - \frac{s_2{}^2}{n_2}}} = \frac{|\hat{p}_1 - \hat{p}_2|}{\sqrt{\frac{0.53 \times 0.47}{100} - \frac{0.87 \times 0.13}{900}}}$$

$$= \frac{0.34}{0.51} = 6.65 > u_{\frac{\alpha}{2}} = 2.575$$

$\therefore$ 拒绝H_0,认为施肥效果有显著差异。

13.某电工器材厂生产一种保险丝。测量其融化时间，依通常情况方差为400。今从某天产品中抽取容量为25的子样，测量其融化时间并计算得$\bar{x}=62.24$，$s^{*2}=404.77$，问这天保险丝融化时间分散度与通常有无明显差异（$\alpha=1\%$）？假定融化时间是正态母体。

解：（1）建立假设H_0：$\sigma^2=\sigma_0{}^2=400$

（2）在H_0成立前提下，构造统计量

$$\chi^2=\frac{(n-1)\ s^{*2}}{\sigma_0^{\ 2}}\sim\chi^2(n-1)$$

（3）给定显著水平$\alpha=0.01$，查得

$\chi^2{}_{0.005}(24)=45.559$，$\chi^2{}_{0.995}(24)=9.886$，使

$$p\left\{\chi^2{}_{0.995}\le\chi^2\le\chi_{0.005}{}^{2}\right\}=\alpha$$

（4）由样本计算，

$$\chi^2=\frac{(n-1)\ s^{*2}}{\sigma_0^{\ 2}}=\frac{24\times404.77}{400}=24.286$$

有：$\chi^2{}_{0.995}(24)<\chi^2<\chi^2{}_{0.005}(24)$

。

$\therefore$ 接受H_0

这天保险丝融化时间分散度与通常无显著差异

14.测得两批电子器材的电阻的子样值为

A批 x（欧姆）：0.140，0.138，0.143，0.142，0.144，0.137

B批 y（欧姆）：0.135，0.140，0.142，0.136，0.138，0.140

设这两批器材的电阻分别服从分布 $N(\mu_1,\sigma^2{}_1)$ 与 $N(\mu_2,\sigma^2{}_2)$

(1)检验假设H_0：$\sigma_1^{\ 2}=\sigma_2^{\ 2}$，$\alpha=5\%$

(2)检验假设H_0：$\mu_1=\mu_2$，$\alpha=5\%$

解：由样本计算，

$$\bar{x}=0.1407, s_x^{\ *2}=2.80^2, \bar{y}=0.1385, s_y^{\ *2}=2.66^2$$

(1)检验假设H_0：$\sigma_1^{\ 2}=\sigma_2^{\ 2}$

在H_0成立的前提下，构造统计量

$$F=\frac{s_x^{\ *2}}{s_y^{\ *2}}\sim F(n_1-1,n_2-1)$$

当$\dfrac{s_x^{*2}}{s_y^{*2}} > 1$时

给定显著水平α，查表$F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)$,有

$$p\left\{F \geq F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)\right\} = \alpha$$

由样本计算，$F = \left(\dfrac{2.80}{2.66}\right)^2 = 1.108 < F_{0.025}(5,5) = 7.15$

$\therefore$ 接受H_0,认为$\sigma_1^{\ 2} = \sigma_1^{\ 2}$

(2)检验假设H_0：$\mu_1 = \mu_2$

在H_0成立的前提下，构造统计量

$$T = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s^* \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

给定显著水平,查表$t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2)$,有

$$p\left\{F \geq F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1)\right\} = \alpha$$

由样本计算,

$$|t| = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{s^* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{|0.1407 - 0.1385|}{\sqrt{\frac{5 \times 2.80^2 + 5 \times 2.66^2}{10}} \times \sqrt{\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}}}$$

$$= \frac{0.0022 \times \sqrt{3}}{2.73} = 0.0014 < t_{0.025}(10) = 2.2281$$

$\therefore$ 接受H_0,认为μ_1与μ_2无显著差异.

15.检验一颗筛子的六个面是否匀称 (取$\alpha = 5\%$)

现在掷120，结果如下：

点数	1，	2，	3，	4，	5，	6
频数	21，	28，	19，	24，	16，	12

解：(1)建立假设 H_0：

$$p\{x = i\} = p_i = \frac{1}{6}, i = 1,2,\ldots\ldots 6$$

（2）在 H_0成立的前提下，构造统 计量

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{6} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} \sim \chi^2(5)$$

(3)给定显著水平 $\alpha=0.05$，查得 $\chi_{0.05}{}^2(5)=11.7$

使 $p\left\{\chi^2 \geq \chi_\alpha{}^2(15)\right\}\approx\alpha$

（4）由样本计算，

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{6}\frac{(m_i-np_i)^2}{np_i}=\frac{1}{120\times\frac{1}{6}}[(21-20)^2+(28-20)^2$$

$$+(19-20)^2+(24-20)^2+(16-20)^2+(12-20)^2]$$

$$=8.1<\chi^2{}_{0.05}(5)=11.07$$

$\therefore$ 接受H_0，即认为六个面是均匀的。

16.有一正四面体，将此四面体分别途为红、黄、蓝、白四色。现在任意的抛掷它直到它与地面相接触为止。记录其抛掷的次数，作为一盘试验。做200盘这样的试验，结果如下：

抛掷次数	1，	2，	3，	4，	5
频数	56，	48，	32，	28，	$\geq$36

问该四面体是否均匀？

$(\alpha = 0.05)$

解：母体X的分布律为：

x	1	2	3	4	>=5
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2$	$\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^3$	$\frac{81}{256}$

建立假设 H_0：母体X的分布律为上述分布律

在 H_0 成立的前提下，构造统计量

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{5}\frac{(m_i-np_i)^2}{np_i}\sim\chi^2(4)$$

给定显著水平 α，查得 $\chi_\alpha^{\ 2}(4)$

使$p\{\chi^2 \geq \chi_\alpha{}^2(4)\} \approx \alpha$

由样本计算，

$$\chi^2 = \frac{(56-50)^2}{50} + \frac{\left(48 - 200\times\frac{3}{16}\right)^2}{200\times\frac{3}{16}} +$$

$$\frac{\left(32 - 200\times\frac{9}{64}\right)^2}{200\times\frac{9}{64}} + \frac{\left(28 - \frac{27}{256}\right)^2}{\frac{27}{256}} + \frac{\left(36 - \frac{81}{256}\right)}{\frac{81}{256}}$$

$$= 0.72 + 2.94 + 0.53 + 2.26 + 0.60 = 7.05 \langle \chi_{\alpha}^{2}(4) = 9.488$$

$\therefore$ 接受H_0