§ 1.4 概率的公理化定义

由投点试验启发我们，可列无穷多个可求面积的平面区域的并仍是可求面积的

即几何概型中要求F对可列无穷多个事件的并封闭

$$\forall A_i \in F, i=1,2,\cdots \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in F$$

推广事件域F的定义

（1）$\Omega \in F$

（2）若$A \in F$,则$\overline{A} \in F$

(3)若$A_i \in F, i=1,2,\cdots,n,\cdots$则$\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in F$

事件域是σ代数

提取频率概率，古典概型和几何概型最基本共同的特征，得到概率的公理化定义

§ 1.4 概率的公理化定义

1.定义 若对随机试验E所对应的样本空间Ω中的每一事件A，均赋予一实数P(A)，集合函数

P(A)满足条件：

(1) $P(A) \geqslant 0$；

(2) $P(\Omega)=1$；

(3) 可列可加性：设A_1，A_2，…, 是一列两两互不相容的事件，即$A_iA_j=\phi$，$(i\neq j)$, $i, j=1, 2, \ldots$, 有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots \quad (1.1)$$

则称P(A)为事件A的概率。

概率是σ代数F上的一个规范化的测度

对一个随机试验，就有一个三元组 (Ω, F, P)

与之对应

称这个三元组(Ω, F, P) 是随机试验的概率空间

2.概率的性质

(1).不可能事件的概率为0

证明：令

$$A_n = \Phi(n = 1, 2, \cdots)$$

$$则\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \Phi,\ 且 A_i \cap A_j = \Phi(i \neq j)$$

$$\therefore P(\Phi) = P(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(\Phi)$$

$$又 \because P(\Phi) \geq 0, \therefore P(\Phi) = 0$$

注：概率为零的事件不一定是不可能事件

(2) 有限可加性：设A_1，A_2，…A_n, 是n个两两互不相容的事件，即$A_iA_j = \phi$，(i≠j), i , j＝1, 2, …, n 则有

$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots P(A_n)$;

证明：令

$$A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \Phi$$

则由可列可加性

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

(3) $\forall A \in F$, 则 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

证明： $A\overline{A} = \Phi, A \cup \overline{A} = \Omega$

$$\therefore P(A) + P(\overline{A}) = 1 \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

（4）若 $A \supset B$,则$P(A-B)=P(A)-P(B)$

证明：

$$\because A \supset B, \therefore A=B\bigcup(A-B)$$

$$且B\bigcap(A-B)=\Phi$$

$$\therefore P(A)=P(B)+P(A-B)$$

$$\therefore P(A-B)=P(A)-P(B)$$

推论1：事件差：

$$\forall A, B, P(A-B) = P(A) - P(AB)$$

推论2：若 $A \supset B$,则$P(A) \geq P(B)$

（5）一般加法公式

$\forall A, B \in F$,有 $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

推论3：

$$\therefore P(A \bigcup B) \leq P(A) + P(B)$$

推广：设 $A, B, C \in F$,则

$$P(A \bigcup B \bigcup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$
$$-P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

一般加法公式

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n} P(A_iA_j)+\sum_{1\le i<j<k\le n} P(A_iA_jA_k)$$

$$-\cdots+(-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

例1：已知

$$P(A)=0.4, P(B)=0.3, P(A\bigcup B)=0.6,\text{求}P(A\overline{B})$$

例2：已知

$$P(AB)=P(\overline{A}\overline{B}),\text{且}P(A)=p,\text{求}P(B)$$

例3：某市有甲,乙,丙三种报纸,订甲种报纸的人数分别占全体市民人数的45%,订乙报的有35%，订丙并报的有30%，同时订甲乙两报的有10%，同时订甲兵的有8%，同时订乙丙两报的有5%，同时订三种报纸的有3%，求以下事件的百分比:

（1）只订甲报纸的

（2）只订甲乙两报纸的

（3）只订一种报纸的

（4）正好订两种报纸的

（5）至少订一种报纸的

（6）不订任何报纸的

例：某人写了n封信，又写了n个信封，如果他任意地将n张信纸 装入n个信封中，问：至少有一封信的信纸和信封是一致的概率。

例：成对配对问题

有n个人各填写：伤情登记表，交一张照片，将登记表和照片任意放入n个 有姓名的袋中（每袋中允许装一伤情登记表与一张照片），求

（1）没有一袋登记表和照片都装对的概率 $P_0(n)$

（2）恰好有r袋（1 ≤ r ≤n)的登记表和照片都装对的概率 $P_r(n)$

并证明

$$\lim_{n\to\infty} P_0(n)=1, \lim_{n\to\infty} P_r(n)=0 \quad (1\le r\le n)$$

例：在线段AB上任取三点x_1, x_2, x_3，求：

（1）x_2位于x_1, x_3之间的概率；

（2）Ax_1, Ax_2, Ax_3能构成一个三角形的概率。