

第三章 多维随机变量及其分布

习题课

一、重点与难点

二、主要内容

三、典型例题

一、重点与难点

1.重点

二维随机变量的分布

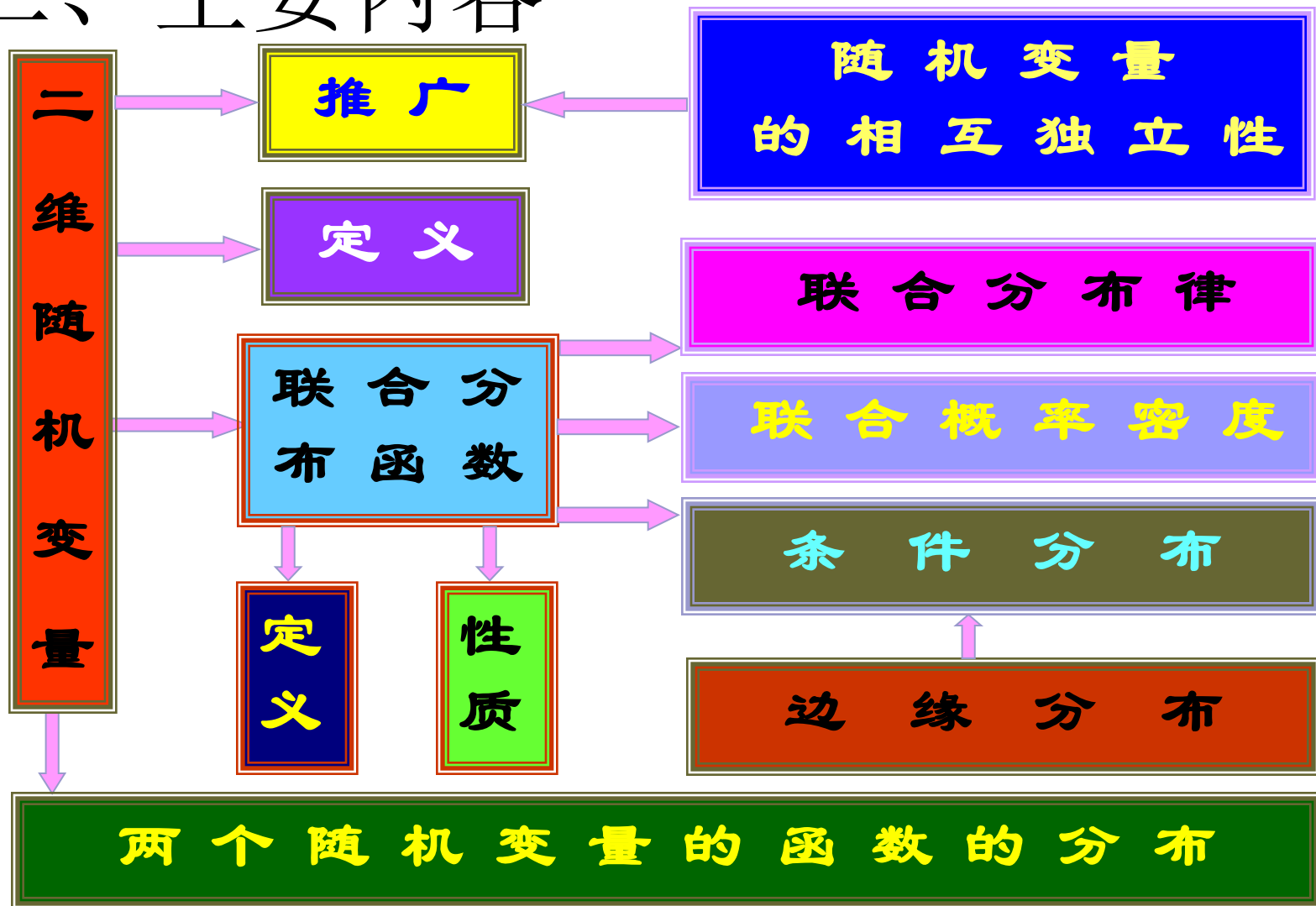
有关概率的计算和随机变量的独立性

2.难点

条件概率分布

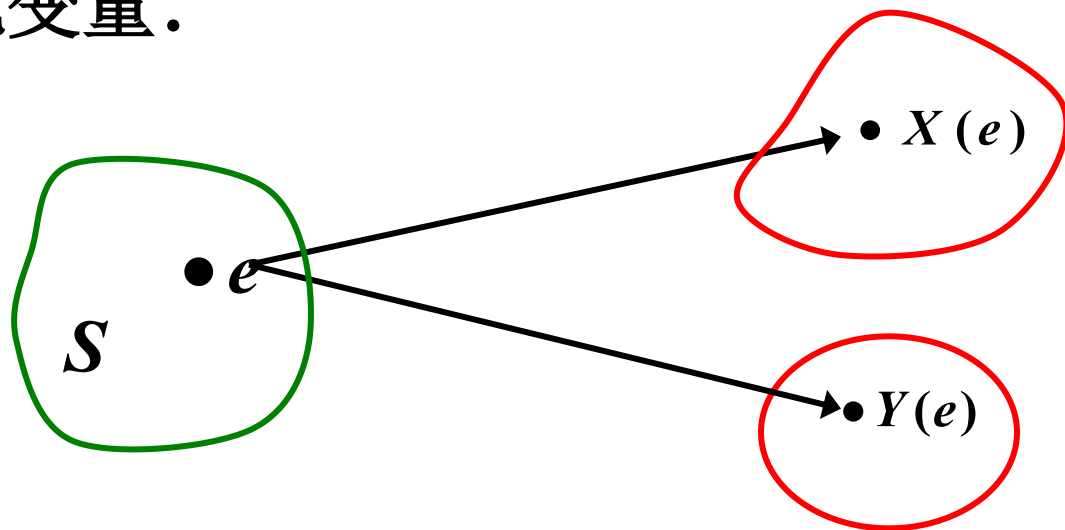
随机变量函数的分布

二、主要内容



二维随机变量

设 E 是一个随机试验, 它的样本空间是 $S = \{e\}$, 设 $X = X(e)$ 和 $Y = Y(e)$ 是定义在 S 上的随机变量, 由它们构成的一个向量 (X, Y) , 叫作二维随机向量或二维随机变量.



二维随机变量的分布函数

(1) 定义

设 (X, Y) 是二维随机变量, 对于任意实数 x, y , 二元函数:

$$F(x, y) = P\{(X \leq x) \cap (Y \leq y)\} = P\{X \leq x, Y \leq y\}$$

称为二维随机变量 (X, Y) 的分布函数, 或称为随机变量 X 和 Y 的联合分布函数.

(2) 性质

1⁰ $F(x, y)$ 是变量 x 和 y 的不减函数, 即对于任意固定的 y , 当 $x_2 > x_1$ 时 $F(x_2, y) \geq F(x_1, y)$; 对于任意固定的 x , 当 $y_2 > y_1$ 时 $F(x, y_2) \geq F(x, y_1)$.

2⁰ $0 \leq F(x, y) \leq 1$, 且有

对于任意固定的 y , $F(-\infty, y) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0$;

对于任意固定的 x , $F(x, -\infty) = \lim_{y \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0$;

$F(-\infty, -\infty) = \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ y \rightarrow -\infty}} F(x, y) = 0$;

$$F(+\infty, +\infty) = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} F(x, y) = 1.$$

3⁰ $F(x, y) = F(x + 0, y), F(x, y) = F(x, y + 0)$,
即 $F(x, y)$ 关于 x 右连续, 关于 y 也右连续.

4⁰ 对于任意 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), x_1 < x_2, y_1 < y_2$,
有 $F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2) \geq 0$.

(3) n 维随机变量的概念

设 E 是一个随机试验, 它的样本空间是 $S = \{e\}$, 设 $X_1 = X_1(e), X_2 = X_2(e), \dots, X_n = X_n(e)$, 是定义在 S 上的随机变量, 由它们构成的一个 n 维向量 (X_1, X_2, \dots, X_n) 叫做 n 维随机向量或 n 维随机变量.

对于任意 n 个实数 x_1, x_2, \dots, x_n , n 元函数

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n\}$$

称为随机变量 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的联合分布函数.

二维离散型随机变量的分布律

设二维离散型随机变量 (X, Y) 所有可能取的值为 $(x_i, y_j), i, j = 1, 2, \dots$, 记

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots,$$

称此为二维离散型随机变量 (X, Y) 的分布律, 或随机变量 X 和 Y 的联合分布律.

二维随机变量 (X, Y) 的分布律也可表示为:

$Y \backslash X$	x_1	x_2	\cdots	x_i	\cdots
y_1	p_{11}	p_{21}	\cdots	p_{i1}	\cdots
y_2	p_{12}	p_{22}	\cdots	p_{i2}	\cdots
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	
y_j	p_{1j}	p_{2j}	\cdots	p_{ij}	\cdots
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	

离散型随机变量 (X, Y) 的分布函数为

$$F(x, y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} p_{ij},$$

其中和式是对一切满足 $x_i \leq x, y_j \leq y$ 的 i, j 求和。

二维连续型随机变量的概率密度

(1) 定义

对于二维随机变量 (X, Y) 的分布函数 $F(x, y)$, 如果存在非负的函数 $f(x, y)$ 使对于任意 x, y 有

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(u, v) \, du \, dv,$$

则称 (X, Y) 是连续型的二维随机变量, 函数 $f(x, y)$ 称为二维随机变量 (X, Y) 的概率密度, 或称为随机变量 X 和 Y 的联合概率密度.

(2) 性质

$$1^0 f(x, y) \geq 0.$$

$$2^0 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \, dx \, dy = F(\infty, \infty) = 1.$$

$$3^0 \text{ 若 } f(x, y) \text{ 在 } (x, y) \text{ 连续, 则有 } \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y).$$

4⁰ 设 G 是 xoy 平面上的一个区域, 点 (X, Y) 落在 G 内的概率是

$$P\{(X, Y) \in G\} = \iint_G f(x, y) \, dx \, dy.$$

(3) 说明

几何上, $z = f(x, y)$ 表示空间的一个曲面.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

表示介于 $f(x, y)$ 和 xoy 平面之间的空间区域的全部体积等于1.

$$P\{(X, Y) \in G\} = \iint_G f(x, y) dx dy,$$

$P\{(X, Y) \in G\}$ 的值等于以 G 为底, 以曲面 $z = f(x, y)$ 为顶面的柱体体积.

(4) 两个常用的分布

设 D 是平面上的有界区域, 其面积为 S , 若二维随机变量 (X, Y) 具有概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{S}, & (x, y) \in D, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

则称 (X, Y) 在 D 上服从均匀分布.

若二维随机变量 (X, Y) 具有概率密度

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

$(-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty)$

其中 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 为常数, $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, -1 < \rho < 1$, 则称 (X, Y) 服从参数为 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 的二维正态分布. 记为 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$.

二维正态分布的两个边缘分布都是一维正态分布.

边缘分布函数

设 $F(x, y)$ 为随机变量 (X, Y) 的分布函数, 则

$$F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\},$$

令 $y \rightarrow \infty$, 称

$$P\{X \leq x\} = P\{X \leq x, Y < \infty\} = F(x, \infty)$$

为随机变量 (X, Y) 关于 X 的边缘分布函数 .

记为 $F_X(x) = F(x, \infty)$.

同理令 $x \rightarrow \infty$,

$$F_Y(y) = F(\infty, y) = P\{X < \infty, Y \leq y\} = P\{Y \leq y\}$$

为随机变量 (X, Y) 关于 Y 的边缘分布函数.

离散型随机变量的边缘分布


设二维离散随机变量 (X, Y) 的联合分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, i, j = 1, 2, \dots.$$

记
$$p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = P\{X = x_i\}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

$$p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} = P\{Y = y_j\}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

分别称 $p_{i\cdot}$ ($i = 1, 2, \dots$) 和 $p_{\cdot j}$ ($j = 1, 2, \dots$) 为 (X, Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘分布律.

联合分布  边缘分布

随机变量关于 X 和 Y 的边缘分布函数分别为

$$F_X(x) = F(x, \infty) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij},$$

$$F_Y(y) = F(\infty, y) = \sum_{y_j \leq y} \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}.$$

连续型随机变量的边缘分布

对于连续型随机变量 (X, Y) , 设它的概率密度为 $f(x, y)$, 由于

$$F_X(x) = F(x, \infty) = \int_{-\infty}^x \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x,$$

记
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \mathrm{d}y$$

称为随机变量 (X, Y) 关于 X 的的边缘概率密度.

同理得 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \mathrm{d}x.$

随机变量的条件分布

(1) 离散型随机变量的条件分布

设 (X, Y) 是二维离散型随机变量, 对于固定的 j , 若 $P\{Y = j\} > 0$, 则称

$$P\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}},$$
$$i = 1, 2, \dots,$$

为在 $Y = y_j$ 条件下随机变量 X 的条件分布律.

同理可定义

对于固定的 i , $P\{X = x_i\} > 0$, 则称

$$P\{Y = y_j | X = x_i\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{X = x_i\}} = \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}},$$
$$j = 1, 2, \dots,$$

为在 $X = x_i$ 条件下随机变量 Y 的条件分布律。

(2) 连续型随机变量的条件分布

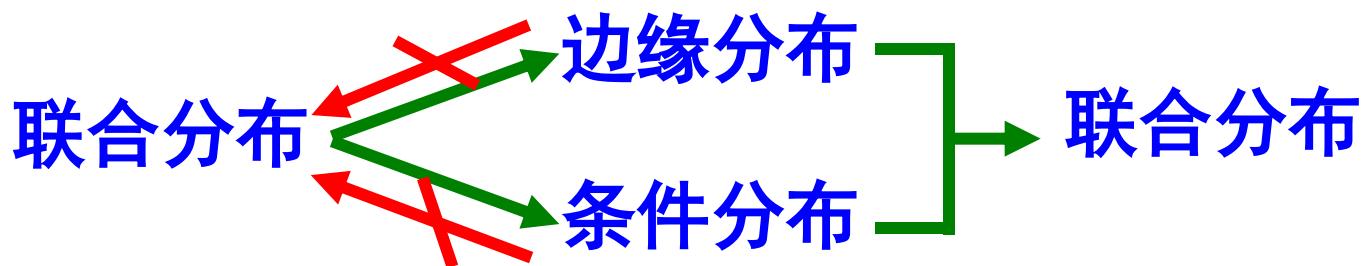
设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$, (X, Y) 关于 Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)$. 若对于固定的 y , $f_Y(y) > 0$, 则称 $\frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$ 为在 $Y = y$ 的条件下 X 的条件概率密度, 记为

$$f_{x|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}.$$

在给定 $X = x$ 的条件下 Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}.$$

联合分布、边缘分布、条件分布的关系



随机变量的相互独立性

设 $F(x, y)$ 及 $F_X(x), F_Y(y)$ 分别是二维随机变量 (X, Y) 的分布函数及边缘分布函数. 若对于所有 x, y 有

$$P\{X \leq x, Y \leq y\} = P\{X \leq x\}P\{Y \leq y\},$$

即 $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$,

则称随机变量 X 和 Y 是相互独立的.

说明

(1) 若离散型随机变量 (X, Y) 的联合分布律为

$$P\{X = i, Y = j\} = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots$$

X 和 Y 相互独立 \Leftrightarrow

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\} \text{ 即 } p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}$$

(2) 设连续型随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为 $f(x, y)$, 边缘概率密度分别为 $f_X(x), f_Y(y)$, 则有

$$X \text{ 和 } Y \text{ 相互独立 } \Leftrightarrow f(x, y) = f_X(x)f_Y(y).$$

(3) X 和 Y 相互独立, 则 $f(X)$ 和 $g(Y)$ 也相互独立.

二维随机变量的推广

(1) n 维随机变量 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的分布函数为

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n\},$$

其中 x_1, x_2, \dots, x_n 为任意实数.

(2) n 维随机变量 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的概率密度函数

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) =$$

$$\int_{-\infty}^{x_n} \int_{-\infty}^{x_{n-1}} \cdots \int_{-\infty}^{x_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

(3) n 维随机变量 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的边缘分布函数

$$F_{X_1}(x_1) = F(x_1, \infty, \infty, \dots, \infty)$$

称为 n 维随机变量 (X_1, X_2, \dots, X_n) 关于 X_1 的边缘分布函数.

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = F(x_1, x_2, \infty, \infty, \dots, \infty)$$

称为 n 维随机变量 (X_1, X_2, \dots, X_n) 关于 (X_1, X_2) 的边缘分布函数.

其它依次类推.

(4) n 维随机变量 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的边缘概率密度

若 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的概率密度, 则 (X_1, X_2, \dots, X_n) 关于 X_1 , 关于 (X_1, X_2) 的边缘概率密度分别为

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_2 dx_3 \cdots dx_n,$$

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_3 dx_4 \cdots dx_n,$$

同理可得 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的 k ($1 \leq k < n$) 维边缘概率密度.

(5) 随机变量相互独立的定义的推广

若对于所有的 x_1, x_2, \dots, x_n 有

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2) \cdots F_{X_n}(x_n)$$

则称 X_1, X_2, \dots, X_n 是相互独立的.

若对于所有的 $x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n$ 有

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ = F_1(x_1, x_2, \dots, x_m)F_2(y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned}$$

其中 F_1, F_2, F 依次为随机变量 (X_1, X_2, \dots, X_m) (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) 和 $(X_1, X_2, \dots, X_m, Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ 的分布函数, 则称随机变量 (X_1, X_2, \dots, X_m) 与 (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) 是相互独立的.

定理 设 (X_1, X_2, \dots, X_m) 和 (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) 相互独立. 则 $X_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 和 $Y_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 相互独立. 又若 h, g 是连续函数. 则 $h(X_1, X_2, \dots, X_m)$ 和 $g(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ 相互独立.

随机变量函数的分布

(1) 离散型随机变量函数的分布

若二维离散型随机变量的联合分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots$$

则随机变量函数 $Z = g(X, Y)$ 的分布律为

$$P\{Z = z_k\} = P\{g(X, Y) = z_k\} = \sum_{z_k = g(x_i, y_j)} p_{ij},$$
$$k = 1, 2, \dots.$$

(2) 连续型随机变量函数的分布

$Z = X + Y$ 的分布

设 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$, 则 $Z = X + Y$ 的密度函数为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y, y) dy.$$

当 X, Y 独立时, $f_Z(z)$ 也可表示为

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy. \end{aligned}$$

$Z = \frac{X}{Y}$ 的分布

设 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$, 则 $Z = \frac{X}{Y}$ 的

密度函数为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |y| f(yz, y) dy.$$

当 X, Y 独立时,

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |y| \cdot f_X(yz) \cdot f_Y(y) dy.$$

$M = \max(X, Y)$ 及 $N = \min(X, Y)$ 的分布

设 X, Y 是两个相互独立的随机变量, 它们的分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$,

则有

$$F_{\max}(z) = F_X(z)F_Y(z),$$

$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)].$$

推广

设 X_1, X_2, \dots, X_n , 是 n 个相互独立的随机变量, 它们的分布函数分别为 $F_{X_i}(x_i)$, ($i = 1, 2, \dots, n$) 则 $M = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 及 $N = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的分布函数分别为

$$F_{\max}(z) = F_{X_1}(z)F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z),$$

$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_{X_1}(z)][1 - F_{X_2}(z)]\cdots[1 - F_{X_n}(z)].$$

若 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立且具有相同的分布函数 $F(x)$, 则

$$F_{\max}(z) = [F(z)]^n, F_{\min}(z) = 1 - [1 - F(z)]^n.$$

三、典型例题

例1 在10件产品中有2件一等品、7件二等品和一件次品,从10件产品中不放回地抽取3件,用 X 表示其中的一等品数, Y 表示其中的二等品数.求:

- (1) (X, Y) 的联合分布律;
- (2) X, Y 的边缘分布律;
- (3) X 和 Y 是否独立;
- (4) 在 $X = 0$ 的条件下, Y 的条件分布律.

解 由题设知 X 只能取 $0, 1, 2,$

Y 只能取 $0, 1, 2, 3.$

当 $i + j < 2$ 或 $i + j > 3$ 时,有

$$P\{X = i, Y = j\} = 0.$$

当 $2 \leq i + j \leq 3$ 时,由古典概率知

$$P\{X = i, Y = j\} = \frac{\binom{2}{i} \binom{7}{j} \binom{1}{3-i-j}}{\binom{10}{3}},$$

$(i = 0, 1, 2, j = 0, 1, 2, 3).$

因此的 (X, Y) 的分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2	3
0	0	0	$\frac{21}{120}$	$\frac{35}{120}$
1	0	$\frac{14}{120}$	$\frac{42}{120}$	0
2	$\frac{1}{121}$	$\frac{7}{120}$	0	0

(2) X, Y 的边缘分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2	3	$P_{i\cdot}$
0	0	0	$\frac{21}{120}$	$\frac{35}{120}$	$\frac{56}{120}$
1	0	$\frac{14}{120}$	$\frac{42}{120}$	0	$\frac{56}{120}$
2	$\frac{1}{120}$	$\frac{7}{120}$	0	0	$\frac{8}{120}$
$P_{\cdot j}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{21}{120}$	$\frac{63}{120}$	$\frac{35}{120}$	1

(3) 因为 $P\{X = 0, Y = 0\} = 0$,

$$P\{X = 0\}P\{Y = 0\} = \frac{56}{120} \times \frac{1}{120} \neq 0,$$

所以 X 与 Y 不相互独立.

(4) 在 $X = 0$ 的条件下, Y 的条件概率为

$$P\{Y = j | X = 0\} = \frac{P\{X = 0, Y = j\}}{P\{X = 0\}}, \quad j = 0, 1, 2, 3.$$

因此 Y 的条件分布律为

$$Y = j | X = 0$$

2

3

P

$\frac{3}{8}$

$\frac{5}{8}$

例2 设 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ 独立同分布, 且

$$P\{\xi_i = 0\} = 0.6, \quad P\{\xi_i = 1\} = 0.4, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

求: (1) 行列式 $\xi = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \xi_3 & \xi_4 \end{vmatrix}$ 的概率分布;

(2) 方程组 $\begin{cases} \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 = 0 \\ \xi_3 x_1 + \xi_4 x_2 = 0 \end{cases}$ 只有零解的概率.

[思路] 要求行列式 ξ 的分布律, 先要将 ξ 的所有可能值找到, 然后利用独立性将取这些值的概率计算出来, 而第二问就是求系数行列式 $\xi \neq 0$ 的概率.

解 (1) 记 $\eta_1 = \xi_1\xi_4, \eta_2 = \xi_2\xi_3,$

则 $\xi = \xi_1\xi_4 - \xi_2\xi_3 = \eta_1 - \eta_2,$

由于 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ 相互独立, 故 η_1, η_2 也相互独立,

且 η_1, η_2 都只能取 0, 1 两个值,

而 $P\{\eta_1 = 1\} = P\{\eta_2 = 1\} = P\{\xi_2 = 1, \xi_3 = 1\}$

$$= P\{\xi_2 = 1\}P\{\xi_3 = 1\} = 0.16,$$

$$P\{\eta_1 = 0\} = P\{\eta_2 = 0\} = 1 - 0.16 = 0.84.$$

随机变量 $\xi = \eta_1 - \eta_2$ 有3个可能取值 $-1, 0, 1$.

$$\begin{aligned} P\{\xi = -1\} &= P\{\eta_1 = 0, \eta_2 = 1\} = P\{\eta_1 = 0\}P\{\eta_2 = 1\} \\ &= 0.84 \times 0.16 = 0.1344, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{\xi = 1\} &= P\{\eta_1 = 1, \eta_2 = 0\} \\ &= P\{\eta_1 = 1\}P\{\eta_2 = 0\} \\ &= 0.16 \times 0.84 = 0.1344, \end{aligned}$$

$$P\{\xi = 0\} = 1 - P\{\xi = -1\} - P\{\xi = 1\} = 0.7312.$$

于是行列式 ξ 的分布律为

ξ	-1	0	1
P	0.1344	0.7312	0.1344

(2) 由于齐次方程

$$\begin{cases} \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 = 0 \\ \xi_3 x_1 + \xi_4 x_2 = 0 \end{cases}$$

只有零解的充要条件是系数行列式不为0, 等价于

$$P\{\xi \neq 0\} = 1 - P\{\xi = 0\} = 1 - 0.7312 = 0.2688.$$

例3 设随机变量 (X, Y) 服从

$D = \{(x, y) | y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的均匀分布, 定义随机变量 U, V 如下

$$U = \begin{cases} 0, & X < 0, \\ 1, & 0 \leq X < Y, \\ 2, & X \geq Y. \end{cases} \quad V = \begin{cases} 0, & X \geq \sqrt{3}Y, \\ 1, & X < \sqrt{3}Y. \end{cases}$$

求 (U, V) 的联合概率分布, 并计算 $P\{UV \neq 0\}$.

[思路] 写出 (U, V) 的所有可能取值, 并利用均匀分布的特征计算其取值的概率.

解 由题设知 (X, Y) 的联合密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}, & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D. \end{cases}$$

(U, V) 有6个可能取值：

$(0, 0)$ $(0, 1)$ $(1, 0)$ $(1, 1)$ $(2, 0)$ $(2, 1)$

$$P = \{U = 0, V = 0\} = P(\emptyset) = 0,$$

$$P = \{U = 1, V = 0\} = P(\emptyset) = 0,$$

$$P = \{U = 1, V = 1\} = P\{0 \leq X < Y, X < \sqrt{3}Y\}$$

$$= P\{0 \leq X < Y\} = \iint_{0 \leq x < y} f(x, y) dx dy$$

$$= \iint_{0 \leq x < y} \frac{2}{\pi} dx dy = \frac{1}{4}.$$

$$P = \{U = 0, V = 1\} = P\{X < 0, X < \sqrt{3}Y\}$$

$$= P\{X < 0\} = \frac{1}{2},$$

$$P = \{U = 2, V = 0\} = P\{Y \leq X, X \geq \sqrt{3}Y\}$$

$$= P\{X \geq \sqrt{3}Y\} = \frac{1}{6},$$

$$P = \{U = 2, V = 1\} = P\{Y \leq X, X < \sqrt{3}Y\}$$

$$= P\{Y \leq X < \sqrt{3}Y\} = \frac{1}{12}.$$

所以 (U, V) 的联合概率分布为

$V \backslash U$	0	1	2
0	0	0	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

从而

$$P\{UV \neq 0\}$$

$$= P\{U = 1, V = 1\} + P\{U = 2, V = 1\}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}.$$

例4 设随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} cxe^{-y}, & 0 < x < y < +\infty, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

- (1) 求常数 c ;
- (2) X 与 Y 是否独立?为什么?
- (3) 求 $f_{X|Y}(x|y), f_{Y|X}(y|x)$;
- (4) 求 $P\{X < 1|Y < 2\}, P\{X < 1|Y = 2\}$;
- (5) 求 (X, Y) 的联合分布函数;
- (6) 求 $Z = X + Y$ 的密度函数;
- (7) 求 $P\{X + Y < 1\}$; (8) 求 $P\{\min(X, Y) < 1\}$.

解 (1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$, 得

$$1 = \int_0^{+\infty} dy \int_0^y cxe^{-y} dx = \frac{c}{2} \int_0^{+\infty} y^2 e^{-y} dy = \frac{c}{2} \Gamma(3) = c,$$

$$\Rightarrow c = 1.$$

$$(2) \quad f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_x^{+\infty} xe^{-y} dy, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$
$$= \begin{cases} xe^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

$$= \begin{cases} \int_0^y x e^{-y} dx, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} y^2 e^{-y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

由于在 $0 < x < y < +\infty$ 上, $f(x, y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$,
故 X 与 Y 不独立.

$$(3) \quad f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

$$= \begin{cases} \frac{2x}{y^2}, & 0 < x < y < +\infty, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$$

$$= \begin{cases} e^{x-y}, & 0 < x < y < +\infty, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$(4) \quad P\{X < 1|Y < 2\} = \frac{P\{X < 1, Y < 2\}}{P\{Y < 2\}}$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^1 \int_{-\infty}^2 f(x, y) dx dy}{\int_{-\infty}^2 f_Y(y) dy} = \frac{\int_0^1 dx \int_x^2 xe^{-y} dy}{\int_0^2 \frac{1}{2} y^2 e^{-y} dy}$$

$$= \frac{1 - 2e^{-1} - \frac{1}{2}e^{-2}}{1 - 5e^{-2}}.$$

又由条件密度的性质知

$$P\{X < 1|Y = 2\} = \int_{-\infty}^1 f_{X|Y}(x|2) dx,$$

而 $f_{X|Y}(x|2) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

从而有

$$P\{X < 1|Y = 2\} = \int_0^1 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{4}.$$

(5) 由于 $F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}$, 故有:

当 $x < 0$ 或 $y < 0$ 时, 有 $F(x, y) = 0$.

当 $0 \leq y < x < +\infty$ 时, 有

$$\begin{aligned} F(x, y) &= P\{X \leq x, Y \leq y\} \\ &= \int_0^y dv \int_0^v ue^{-v} du = \frac{1}{2} \int_0^y v^2 e^{-v} dv \\ &= 1 - \left(\frac{y^2}{2} + y + 1\right)e^{-y}. \end{aligned}$$

当 $0 \leq x < y < +\infty$ 时, 有

$$\begin{aligned} F(x, y) &= P\{X \leq x, Y \leq y\} = \int_0^x du \int_u^y ue^{-v} dv \\ &= \int_0^x u(e^{-u} - e^{-y}) du \\ &= 1 - (x + 1)e^{-x} - \frac{1}{2}x^2e^{-y}. \end{aligned}$$

故得

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ 或 } y < 0, \\ 1 - \left(\frac{y^2}{2} + y + 1\right)e^{-y}, & 0 \leq y < x < \infty, \\ 1 - (x + 1)e^{-x} - \frac{1}{2}x^2e^{-y}, & 0 \leq x < y < \infty. \end{cases}$$

(6) 根据 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx$,

由于要被积函数 $f(x, z-x)$ 非零, 只有当

$0 < x < z-x$, 即 $0 < x < \frac{z}{2}$ 时, 从而有:

当 $z < 0$ 时, $f_Z(z) = 0$;

$$\text{当 } z \geq 0 \text{ 时, } f_Z(z) = \int_0^{\frac{z}{2}} x e^{-(z-x)} dx$$

$$= e^{-z} \int_0^{\frac{z}{2}} x e^x dx$$

$$= e^{-z} + \left(\frac{z}{2} - 1\right) e^{-\frac{z}{2}};$$

因此
$$f_Z(z) = \begin{cases} e^{-z} + \left(\frac{z}{2} - 1\right) e^{-\frac{z}{2}} & z \geq 0, \\ 0, & z < 0. \end{cases}$$

$$(7) \quad P\{X + Y < 1\} = \int_{-\infty}^1 f_Z(z) dz$$

$$= \int_0^1 [e^{-z} + (\frac{z}{2} - 1)e^{-\frac{z}{2}}] dz = 1 - e^{-\frac{1}{2}} - e^{-1}.$$

$$(8) \quad P\{\min(X, Y) < 1\} = 1 - P\{\min(X, Y) \geq 1\}$$

$$= 1 - P\{X \geq 1, Y \geq 1\}$$

$$= 1 - \int_1^{+\infty} dv \int_0^v ue^{-v} du$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} v^2 e^{-v} dv = 1 - \frac{5}{2} e^{-1}.$$

例5 设随机变量 (X, Y) 在矩形

$$G = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$$

上服从均匀分布, 试求边长为 X 和 Y 的矩形面积 S 的概率密度 $f(s)$.

解 由题设知二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{若 } (x, y) \in G, \\ 0, & \text{若 } (x, y) \notin G. \end{cases}$$

$S = X \cdot Y$, 设 $F(s) = P\{S \leq s\}$ 为 S 的分布函数, 则当 $s < 0$ 时, $F(s) = P\{XY \leq s\} = 0$,

当 $s \geq 2$ 时, $F(s) = P\{XY \leq s\} = 1,$

当 $0 \leq s < 2$ 时,

$$F(s) = P\{S \leq s\} = P\{XY \leq s\} = 1 - P\{XY > s\}$$

$$= 1 - \iint_{xy > s} f(x, y) dx dy = 1 - \int_s^2 dx \int_{\frac{s}{x}}^1 \frac{1}{2} dy$$

$$= \frac{s}{2}(1 + \ln 2 - \ln s).$$

故 $f(s) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln s), & 0 \leq s < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$