定义 设 (X,Y) 是二维离散型随机变量,对于固定的 j, 若 $P\{Y=y_j\}>0$, 则称

$$P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}},$$

为在$Y=y_j$条件下随机变量 X 的条件分布律.

对于固定的 i, 若 $P\{X=x_i\}>0$, 则称

$$P\{Y=y_j \mid X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}},$$

为在$X=x_i$条件下随机变量 Y 的条件分布律.

其中$i,j=1,2,\cdots$.

请同学们思考

怎么来定义连续性随即变量的件分布函数 $F_{X|Y}(x|y)$?

直观上来讲条件分布是指在一个随机变量取某个确定值的条件下,另一个随机变量的分布,即

$$F_{X|Y}(x|y) = P\{X \le x | Y = y\}.$$

由于$P\{Y = y\}$可能为零(连续型时一定为零).故直接用条件概率来定义时,会出现分母为零.

$$F_{X|Y}(x|y) = P\{X \le x | Y = y\}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} P(X \le x | y < Y \le y + \Delta y\}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{P(X \le x, y < Y \le y + \Delta y\}}{P(y < Y \le y + \Delta y\}}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\int_{-\infty}^{x} \int_{y}^{y+\Delta y} p(u,v)dudv}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{y}^{y+\Delta y} p(u,v)dudv}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\int_{-\infty}^{x} \int_{y}^{y+\Delta y} p(u,v)dudv}{\int_{y}^{y+\Delta y} p_Y(v)dv}$$

$$
= \frac{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \int_{-\infty}^{x} \int_{y}^{y+\Delta y} p(u,v)\,du\,dv \Big/ \Delta y}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \int_{y}^{y+\Delta y} p_Y(u,v)\,dv \Big/ \Delta y}
$$

$$
= \frac{\int_{-\infty}^{x} p(u,y)\,du}{p_Y(y)} = \int_{-\infty}^{x} \frac{p(u,y)}{p_Y(y)}\,du
$$

$$
p_{X|Y}(x|y) = F_{X|Y}{}'(x|y) = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)}
$$

二、连续型随机变量的条件分布

定义

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $p(x,y)$, (X,Y) 关于 Y 的边缘概率密度为$p_Y(y)$.若对于固定的 y, $p_Y(y)>0$, 则称 $\dfrac{p(x,y)}{p_Y(y)}$ 为在 $Y=y$ 的条件下 X 的条件概率密度, 记为

$$p_{X|Y}(x|y)=\frac{p(x,y)}{p_Y(y)}.$$

称 $\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\,\mathrm{d}x$ 为在 $Y=y$ 的条件下, X 的条件分布函数,记为

$$P\{X \le x | Y = y\} \text{ 或 } F_{X|Y}(x|y),$$

即 $$F_{X|Y}(x|y) = P\{X \le x | Y = y\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\,\mathrm{d}x.$$

同理定义在 $X=x$ 的条件下 Y 的条件概率密度为

$$F_{Y|X}(y|x) = P\{Y \le y | X = x\} = \int_{-\infty}^{y} \frac{f(x,y)}{f_X(x)}\,\mathrm{d}y.$$

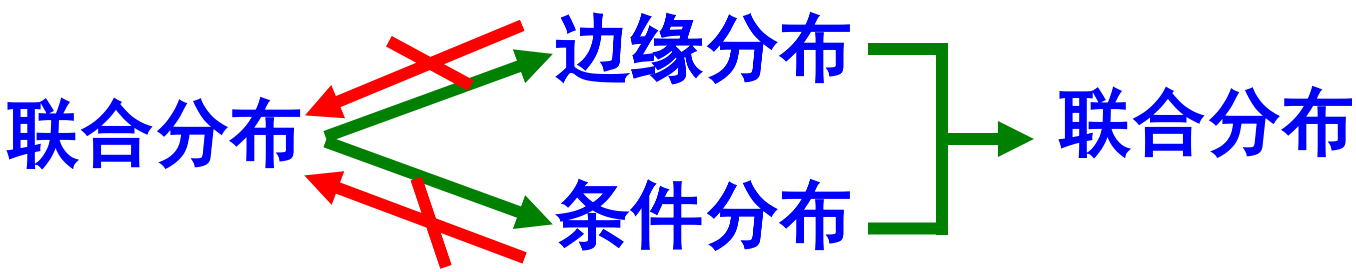
条件分布函数与条件密度函数的关系

$$F_{X|Y}(x|y)=\int_{-\infty}^{x}f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{x}[f(x,y)/f_Y(y)]\,\mathrm{d}x.$$

$$F_{Y|X}(y|x)=\int_{-\infty}^{y}f_{Y|X}(y|x)\,\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{y}[f(x,y)/f_X(x)]\,\mathrm{d}y.$$

说明

联合分布、边缘分布、条件分布的关系如下



例4 设数 X 在区间 $(0,1)$ 上随机地取值,当观察到 $X=x\ (0<x<1)$ 时,数 Y 在区间 $(x,1)$ 上随机地取值.求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$.

解 由题意知 X 具有概率密度

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

对于任意给定的值 $x(0<x<1)$, 在$X=x$的条件下,

Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & 0<x<y<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

因此 X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y) = f_{Y|X}(y|x) f_X(x)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1-x}, & 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

故得 Y 的边缘概率密度

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_0^y \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}\,x = -\ln(1-y), 0 < y < 1, \\ 0, \qquad \text{其它}. \end{cases}$$

条件期望

定义：如果$r.v.\xi$在$\eta=y$的条件下的条件概率密度函数为

$p_{\xi|\eta}(x|y)$，且$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|p_{\xi|\eta}(x|y)dx<+\infty$，则称

$$E(\xi|\eta=y)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp_{\xi|\eta}(x|y)dx$$

为ξ在$\eta=y$条件下的条件数学期望，或简称为条件期望.

条件期望的性质：

(1)若$a \le \xi \le b$,则$a \le E(\xi|\eta = y) \le b$

(2)若k_1, k_2为两个常数，且$E(\xi_i|\eta = y)\,(i = 1, 2)$存在，则

$E(k_1\xi_1 + k_2\xi_2|\eta = y) = k_1 E(\xi_1|\eta = y) + k_2 E(\xi_2|\eta = y)$

(3)$E(E(\xi|\eta)) = E\xi$