§1.2 概率与频率

一、事件域

事件域F应满足：

（1）$\Omega \in F$

（2）若$A \in F$,则$\overline{A} \in F$

(3)若$A_i \in F, i = 1, 2, \cdots, n$,则$\bigcup_{i=1}^{n} A \in F$

易证F对补运算，有限并运算，差运算封闭

证明：由（3）F对有限并运算封闭

若$\overline{A},\overline{B} \in F$，则$A, B \in F$,则$\overline{A}\,\overline{B} = \overline{A \cup B} \in F$,

F对交封闭

若A，$B \in F$，则$A\text{-}B = A\overline{B} \in F$

F对差封闭

集合论中，把满足上述条件的集合类称为布尔代数（Borel代数）

F是Borel代数

二、概率

定义：随机事件A发生的可能性大小的度量（数值），称为A发生的概率.记作P(A)

$$\text{对于}\forall A \in F,\ A \leftrightarrow P(A)$$

注：P(A)是客观存在的，是随机事件的一个属性，是测度，类似木棒的长度，土块的面积，物体的质量等等.

问题：P(A)究竟有多大？

定义：如果随机事件A,在n次重复试验中发生了n_A次，称 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$ 为A的频率.

易知频率的性质

(1) $0 \le f_n(A) \le 1$；

(2) $f_n(S)=1$； $f_n(\phi)=0$

(3) 可加性：若$AB=\phi$ ，则 $f_n(A \cup B)=f_n(A)+f_n(B)$.

实践证明：当试验次数n增大时，$f_n(A)$ 逐渐趋向一个稳定值。可将此稳定值记作$P(A)$，作为事件A的概率。

因此，概率应具有与频率同样的性质。

由于频率的本质就是概率，要求频率具有概率的性质

$$\forall A \in F \leftrightarrow P(A)$$

概率P实际上就是定义在Borel代数F上的一个集合函数，满足

（1）非负性　$P(A) \geq 0, \forall A \in F$

（2）规范性　$P(\Omega)=1$

（3）有限可加性　若$A_i \in F, i=1,2,\cdots n$，且$A_i A_j = \Phi$

则$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} A_i$