§2.5　方差的定义和性质

一、随机变量方差的概念及性质

二、重要概率分布的方差

三、例题讲解

四、小结

一、方差（*Variance*）

前面我们介绍了随机变量的数学期望，它体现了随机变量取值的平均水平，是随机变量的一个重要的数字特征。

但对有些实际问题，仅仅知道平均值是不够的。

例1 甲、乙两人射击，射击水平由下表给出：X:甲击中的环数　Y:乙击中的环数

X	8	9	10
P	0.3	0.2	0.5

Y	8	9	10
P	0.2	0.4	0.4

试问哪一个人的射击水平较高？

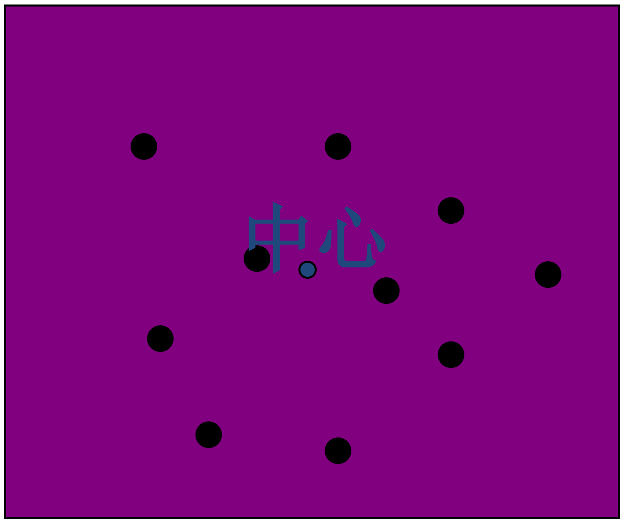
解: 比较两人的平均环数

$$E(X)=8\times0.3+9\times0.2+10\times0.5=9.2\text{（环）}$$

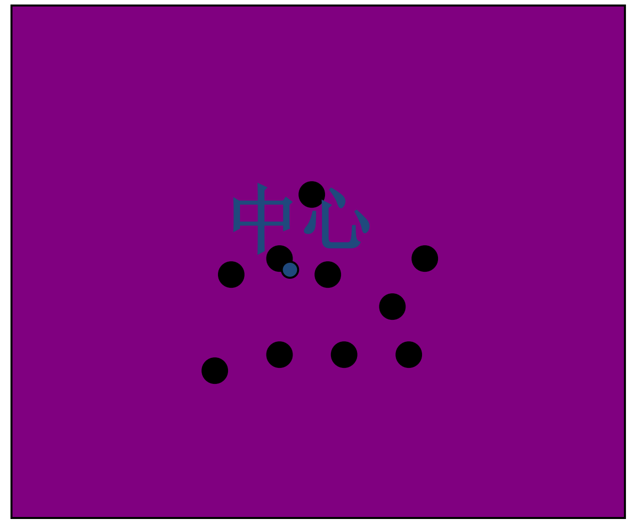
$$E(Y)=8\times0.2+9\times0.4+10\times0.4=9.2\text{（环）}$$

从平均环数上看，不分上下。

又如,甲、乙两门炮同时向一目标射击10发炮弹，其落点距目标的位置如图：



甲炮射击结果



乙炮射击结果

乙炮

你认为哪门炮射击效果好一些呢?

因为乙炮的弹着点较集中在中心附近.

在实际问题中，我们常关心随机变量与其均值的偏离程度，可用 $E\{|X-E(X)|\}$ 表示，但带有绝对值符号时，计算不方便。所以，通常用 $E\{[X-E(X)]^2\}$ 表示随机变量 X 与其均值的偏离程度。

从而得到随机变量的另一个**数字特征**

—— 方差

定义【5.1】设 X 是一个随机变量，若 $E\{[X-E(X)]^2\}$ 存在，则称 $E\{[X-E(X)]^2\}$ 为 X 的**方差**，记为 $D(X)$ 或 $Var(X)$. 即

$$D(X)=Var(X)=E\{[X-E(X)]^2\}$$

$\sqrt{D(X)}$ 称为**标准差**或**均方差**。

说明:方差描述了随机变量的取值与其均值的平均偏离程度。

方差刻划了随机变量的取值对于其数学期望的离散程度 .

若 ξ 的取值比较集中，则方差 $D\xi$ 较小；

若 ξ 的取值比较分散，则方差$D\xi$ 较大.

因此，$D\xi$是刻画X取值分散程度的一个量，它是衡量ξ 取值分散程度的一个尺度。

由定义知，方差是随机变量 X 的函数 $g(X)=[X-E(X)]^2$ 的数学期望。

当 X 是离散型随机变量，且分布列为

$$P\{X=x_k\}=p_k \ (k=1,2,\cdots)$$

有

$$\boxed{D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}=\sum_{k=1}^{\infty}[x_k-E(X)]^2\cdot p_k}$$

随机变量 X 的方差可由下面公式计算

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

证明 $D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}$

$$=E\{X^2-2XE(X)+[E(X)]^2\}$$

$$=E(X^2)-2E(X)E(X)+[E(X)]^2$$

$$=E(X^2)-[E(X)]^2$$

即

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

例1　甲、乙两人射击，射击水平由下表给出：

X:甲击中的环数　　Y:乙击中的环数

X	8	9	10
P	0.3	0.2	0.5

Y	8	9	10
P	0.2	0.4	0.4

试问哪一个人的射击水平较高？

解：比较两人的平均环数

$$E(X)=8\times0.3+9\times0.2+10\times0.5=9.2\text{（环）}$$

$$E(Y)=8\times0.2+9\times0.4+10\times0.4=9.2\text{（环）}$$

从平均环数上看，不分上下。再比较方差

$$D(X)=(8-9.2)^2\times0.3+(9-9.2)^2\times0.2+(10-9.2)^2\times0.5=0.76$$

$$D(Y)=(8-9.2)^2\times0.2+(9-9.2)^2\times0.4+(10-9.2)^2\times0.4=0.624$$

由于$D(X)>D(Y)$，则乙的射击水平比甲稳定。

例2 设随机变量 $X \sim b(1, p)$, 求 $D(X)$

解 X 的分布律为

X	0	1
P	$1-p$	p

$$E(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$$

$$E(X^2) = 0^2 \times (1-p) + 1^2 \times p = p$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

$$X \sim b(1, p) \Rightarrow E(X) = p;\ D(X) = p(1-p)$$

例3 设随机变量 $X \sim P(\lambda)$，求 $D(X)$

解 X 的分布列为 $P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

$(k=0,1,2,\cdots)$

由上面知 $E(X)=\lambda$

$$E(X^2)=E[X(X-1)+X)]=E[X(X-1)]+E(X)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}+\lambda \quad =\lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+\lambda$$

$$=\lambda^2 e^{-\lambda}e^{\lambda}+\lambda=\lambda^2+\lambda$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$$

$$\boxed{X \sim P(\lambda) \Rightarrow E(X)=D(X)=\lambda}$$

方差的性质

$$D(X)=E[X-E(X)]^2$$
$$=E(X^2)-[E(X)]^2$$

（1）设 C 是常数，则 $D(C)=0$

（2）设 C 是常数，X是随机变量，则

$$D(CX)=C^2D(X) \qquad D(X+C)=D(X)$$

（3）设 a,b 是常数，X,Y是随机变量，则

$$D(aX+bY)=a^2D(X)+b^2D(Y)$$
$$+2abE[X-E(X)][Y-E(Y)]$$

(4) $D(X)=0$的充要条件是 X 以概率 1 取常数 C,即 $P\{X=C\}=1.$

$$D(CX) = E\{[CX - E(CX)]^2\}$$

$$= C^2 E\{[X - E(X)]^2\}$$

$$= C^2 D(X).$$

证（3）$D(aX + bY) = E[aX + bY - E(aX + bY)]^2$

$$= E\{a[X - E(X)] + b[Y - E(Y)]\}^2$$

$$= a^2 E\{[X - E(X)]^2\} + b^2 E\{[Y - E(Y)]^2\}$$

$$+2abE\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$$

$$= a^2 D(X) + b^2 D(Y) + 2abE\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$$

特别地，若X , Y相互独立，有

$$D(aX+bY)=a^2D(X)+b^2D(Y)$$

推广　若 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是任意常数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是相互独立的随机变量，有

$$D(a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n)$$
$$=a_1^2D(X_1)+a_2^2D(X_2)+\cdots+a_n^2D(X_n)$$

例4 设随机变量 $X \sim b(n, p)$, 求$E(X)$, $D(X)$

解 令 $X_k = \begin{cases} 1 & A\text{在第}k\text{次试验发生} \\ 0 & A\text{在第}k\text{次试验不发生} \end{cases}$

$(k = 1, 2, \cdots, n)$

由二项分布的定义知 $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

X_k服从两点分布,分布律为

X_k	0	1
p_k	$1-p$	p

$E(X_k) = p$, $D(X_k) = p(1-p)$

$$E(X) = E(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = np$$

又因为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，则

$$D(X) = D(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n} D(X_k) = np(1-p)$$

$$X \sim b(n,p) \Rightarrow E(X) = np,\ D(X) = np(1-p)$$

二、重要概率分布的方差

1. 两点分布

已知随机变量 X 的分布律为

X	1	0
p	p	$1-p$

则有 $E(X)=1\cdot p+0\cdot q=p,$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=1^2\cdot p+0^2\cdot(1-p)-p^2=pq.$$

2. 二项分布

设随机变量 X 服从参数为 n, p 二项分布，其分布律为

$$P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},(k=0,1,2,\cdots,n),$$

$$0<p<1.$$

则有

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n}k\cdot P\{X=k\}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{kn!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{np(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$= np[p+(1-p)]^{n-1}$$

$$= np.$$

$$E(X^2) = E[X(X-1) + X]$$

$$= E[X(X-1)] + E(X)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{k}{n} p^k (1-p)^{n-k} + np$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} + np$$

$$= n(n-1)p^2\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!}p^{k-2}(1-p)^{(n-2)-(k-2)}$$

$$+ np$$

$$= n(n-1)p^2[p+(1-p)]^{n-2} + np$$

$$= (n^2-n)p^2 + np.$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= (n^2-n)p^2 + np - (np)^2$$

$$= np(1-p).$$

3. 泊松分布

设 $X \sim \pi(\lambda)$, 且分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda},\quad k=0,1,2,\cdots,\quad \lambda>0.$$

则有

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\cdot\lambda$$

$$=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\mathrm{e}^{\lambda}=\lambda.$$

$$E(X^2) = E[X(X-1) + X]$$

$$= E[X(X-1)] + E(X)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda} + \lambda$$

$$= \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=2}^{+\infty} \cdot \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda = \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda} \mathrm{e}^{\lambda} + \lambda = \lambda^2 + \lambda.$$

所以 $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.

泊松分布的期望和方差 都等于参数 λ.