§2.3 随机变量函数的分布列

一、一维离散型随机变量的分布列

若$\xi: d.r.v.$ $f(x)$是实变量x的单值函数，则当ξ只取有限个值或可列个值时，$\eta=f(\xi)$也只能取有限个或可列个值.

若η的可列个值分别为$b_i(i=1,2,\cdots)$, 令

$B_i=\{a_j : f(a_j)=b_i\}$

则$(\eta=b_i)=(\xi\in B_i)$

于是$P(\eta=b_i)=P(\xi\in B_i)=\sum\limits_{a_i\in B_j}P(\xi=a_j), i=1,2\cdots$

所以η得分布列完全由ξ的分布列决定

例1：离散型随机变量X的分布列如下

X	-2	0	3
P	1/6	1/3	1/2

设$Y=X-1$，求Y的分布列

例2：离散型随机变量X的分布列如下

X	-1	0	1	2
P	0.2	0.3	0.1	0.4

设$Y=(X-1)^2$，求Y的分布列

例3：离散型随机变量X的分布列如下

X	1	2	…	n	…
P	$1/2$	$1/2^2$	…	$1/2^n$	…

设$Y=g(X)$，$g(X)=1$，当x是偶数，$g(X)=-1$，当x是奇数，求Y的分布列.

二、一维离散型随机变量的分布列

设（ξ，η）是二维$d.r.v.$　　$f(x，y)$是实变量x, y的单值函数，这时$\zeta=f(\xi，\eta)$仍然是一个$d.r.v.$.

若ξ, η, ζ的可列个值分别为$a_i, b_j, c_k\ (i, j, k=1,2,\cdots)$，令

$C_i=\{(a_j, b_k): f(a_j, b_k)=c_i\}$　是事件域F中的元素.

则$(\zeta=c_i)=((\xi,\eta)\in C_i)$

于是$P(\zeta=c_i)=P((\xi,\eta)\in C_i)=\sum\limits_{(a_j,b_k)\in C_i} P(\xi=a_j, \eta=b_k), i, j=1,2\cdots$

所以ζ的分布列完全由（ξ，η）的分布列决定

例：设X,Y是相互独立的$r.v.$，它们分别服从参数为λ_1，λ_2的泊松分布，试证：$Z=X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

证明：$P(X=k)=\dfrac{\lambda_1^k e^{-\lambda_1}}{k!},k=0,1,2,\cdots$

$$P(Y=m)=\frac{\lambda_2^m e^{-\lambda_2}}{m!},m=0,1,2,\cdots$$

$$\therefore P(Z=k)=P(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i;Y=k-i)$$

$$=\sum_{i=0}^{k}P(X=i)P(Y=k-i)=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^i e^{-\lambda_1}}{i!}\frac{\lambda_1^{(k-i)}e^{-\lambda_2}}{(k-i)!}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!\lambda_1^i}{i!}\frac{\lambda_1^{(k-i)}}{(k-i)!}=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}(\lambda_1+\lambda_2)^k \qquad k=0,1,2,$$

结论：

1.泊松分布对加法封闭，或泊松分布具有可加性。

2.对二项分布有类似的结论

$$X\sim B(n_1,p),\ \ Y\sim B(n_2,p)\text{且}X,Y\text{相互独立}\Rightarrow X+Y\sim B(n_1+n_2,p)$$

例：已知X,Y的分布列

X	-1	0	1	Y	0	1
P	1/3	1/2	1/6	P	0.5	0.5

且$P(XY=0)=1$

求(1)(X,Y)的联合分布律；

(2)X与Y是否相互独立.

例3：设$r.v.\xi$与η相互独立，且$P(\xi=\pm 1)=P(\eta=\pm 1)=0.5$

定义$\zeta=\xi\eta$.证明：ξ，η，ζ两两独立但不相互独立.

例：X:一天出生的婴儿数

Y：一天出身的男婴数，有

$$P(X=n,Y=m)=\frac{e^{-14}(7.14)^{m}(6.86)^{n-m}}{m!(n-m)!},\quad \begin{matrix} n=0,1,2,\cdots \\ m=0,1,2,\cdots,n \end{matrix}$$

$m>n$不可能事件，即$P(m>n)=0$

求：（1）边际分布列

（2）条件分布列