平稳过程的谱分解

- 平稳过程相关函数的谱分解
- 平稳过程的谱分解(了解)

平稳过程的谱分解

定理5.5.1 设X={X_t, -∞<t<+ ∞}是均方连续的平稳过程,则其相关函数可以表示为

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\omega\tau}dF_X(\omega),\quad -\infty<\tau<+\infty$$

其中$F_X(\omega)$ 在（$-\infty,+\infty$）上非负，有界，单调不减,右连续，且F（$-\infty$）$=0$，F（$+\infty$）$=2\pi R_X(0)$

证明 由于$\left|R_X(\tau)\right|\le R_X(0)$

若$R_X(0)=0$，则$R_X(\tau)=0$,则取$F_X(\omega)=0$即可.

若$R_X(0)>0$，则令

$$f(\tau)=\frac{R_X(\tau)}{R_X(0)}$$

由$R_X(\tau)$连续，非负定，可得

函数$f(\tau)$满足：连续，非负定，且$f(0)=1.$

所以$f(\tau)$是某个随机变量W的特征函数,即存在分布函数G(ω),使

$$\frac{R_X(\tau)}{R_X(0)}=f(\tau)=\mathrm{E}[e^{j\tau W}]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\tau\omega}dG(\omega)$$

即有$R_X(\tau)=R_X(0)\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\tau\omega}dG(\omega)$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\tau\omega}d(2\pi R_X(0)G(\omega))$$

所以取$F_X(\omega)=2\pi R_X(0)G(\omega)$

即得 $R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\omega\tau}dF_X(\omega),\quad -\infty<\tau<+\infty$

容易验证$F_X(\omega)=2\pi R_X(0)G(\omega)$满足定理中各条件.

称 $R_X(\tau)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\omega\tau}dF_X(\omega),\quad -\infty<\tau<+\infty$

为平稳过程X相关函数的谱展开式或谱分解式.

称函数$F_X(\omega)$为平稳过程X的谱函数.

注意：如果平稳过程的相关函数绝对可积，则谱函数$F_X(\omega)$可微，且有$F'_X(\omega)=S_X(\omega)$，因此也有：

$$F_X(\omega)=\int_{-\infty}^{\omega}S_X(\lambda)d\lambda,\quad -\infty<\omega<+\infty$$

事实上，由$R_X(\tau)$绝对可积，则由维纳-辛钦公式得：

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\omega\tau}S_X(\omega)d\omega$$ 与$R_X(\tau)$的谱分解式比较

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\omega\tau}dF_X(\omega),$$

$\Rightarrow F_X(\omega)$可微，且$F_X'(\omega)=S_X(\omega)$.

$$\Rightarrow F_X(\omega)=\int_{-\infty}^{\omega}S_X(\lambda)d\lambda,\quad -\infty<\omega<+\infty$$

对平稳序列有相类似的结果.

设X={X_n, n=0, ±1, ±2,…}是平稳时间序列,则其相关函数可以表示为

$$R_X(m)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}e^{j\omega m}dF_X(\omega),\quad m=0,\pm1,\cdots \quad (*)$$

其中$F_X(\omega)$ 是在$[-\pi,+\pi]$上非负，有界，单调不减，右连续. 且$F_X(-\pi)=0$，$F_X(+\pi)=2\pi R_X(0)$

称$F_X(\omega)$为平稳序列X的谱函数.

称$(*)$式为平稳序列相关函数的谱展开式, 或谱分解式.

谱密度$S_X(\omega)$和谱函数的有关系

$$F_X(\omega)=\int_{-\pi}^{\omega}S_X(\lambda)d\lambda,\quad -\pi\le\omega\le\pi$$

例(补)　设X,Y是两个相互独立的实随机变量,EX=0,DX=1

Y的分布函数为F(x),令

$$Z_t = Xe^{jtY}, -\infty < t < +\infty,$$

试求Z={Z_t, -∞<t<+ ∞}的谱函数.

解　易知 $m_Z(t)=0$,

$$R_Z(t,t+\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\tau\omega} dF(\omega)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\tau\omega} d(2\pi F(\omega))$$

$\Rightarrow$ Z的谱函数$F_Z(\omega) = 2\pi F(\omega)$

平稳过程的谱分解

定理5.5.2 设$X=\{X_t, -\infty<t<+\infty\}$是零均值均方连续的复平稳过程,其谱函数为$F_X(\omega)$,则$X_t$以表示为

$$X_t=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\omega t}dZ(\omega),\quad -\infty<t<+\infty$$

其中 $$Z(\omega)=\underset{T\to+\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-j\omega t}-1}{-jt}X_t dt,\quad -\infty<\omega<+\infty$$

称之为X的随机谱函数. 且具有性质:

(1) $\mathrm{E}[Z(\omega)]=0$

(2) $\forall\omega_1<\omega_2\le\omega_3<\omega_4, E[\overline{(Z(\omega_2)-Z(\omega_1))}(Z(\omega_4)-Z(\omega_3))]=0$

(3) $\forall\omega_1<\omega_2, E[|Z(\omega_2)-Z(\omega_1)|^2]=\frac{1}{2\pi}(F_X(\omega_2)-F_X(\omega_1)]$

定理的实际意义

由 $X_t=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\omega t}dZ(\omega)$ 即 $X_t=\underset{T\to+\infty}{\mathrm{l.i.m}}\int_{-T}^{+T}e^{j\omega t}dZ(\omega)$

将$[-T, T]$等分为2N个子区间，即有

$$X_t=\underset{T\to+\infty}{\mathrm{l.i.m}}\,\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\sum_{K=-N+1}^{N}e^{jt\frac{k}{N}T}\left[Z\left(\frac{kT}{N}\right)-Z\left(\frac{(k-1)T}{N}\right)\right]$$

即 平稳过程可看成是振幅为 $Z\left(\frac{kT}{N}\right)-Z\left(\frac{(k-1)T}{N}\right)$

角频率为 $\frac{kT}{N}$ 的谐波分量的的有限叠加和的均方极限.

X是谐波分量 $e^{j\omega t}dZ(\omega)$ 无限叠加和.

定理5.5.3 设X={X_t, -∞<t<+ ∞}是零均值均方连续的实平稳过程,其谱函数为$F_X(\omega)$,则X可以表示为

$$X_t=\int_0^{+\infty}\cos\omega t dZ_1(\omega)+\int_0^{+\infty}\sin\omega t dZ_2(\omega), -\infty<t<+\infty$$

其中

$$Z_1(\omega)=\underset{T\to+\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\sin\omega t}{t}X_t dt, -\infty<\omega<+\infty$$

$$Z_2(\omega)=\underset{T\to+\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\frac{1-\cos\omega t}{t}X_t dt, -\infty<\omega<+\infty$$

称为实平稳过程X的随机谱函数.且具有性质:

(1) $\mathrm{E}[Z_1(\omega)] = \mathrm{E}[Z_2(\omega)] = 0$

(2) 若$i \neq j$或$j=i$,则$\forall \omega_1 < \omega_2 \leq \omega_3 < \omega_4$,有

$$E[(Z_i(\omega_2) - Z_i(\omega_1))(Z_j(\omega_4) - Z_j(\omega_3))] = 0, \quad i, j = 1, 2$$

($i \neq j$时，独立增量；$i = j$时，正交增量)

(3) $\forall \omega_1 < \omega_2$,

$$E[Z_1(\omega_2) - Z_1(\omega_1)]^2 = E[Z_2(\omega_2) - Z_2(\omega_1)]^2$$

$$= \frac{1}{\pi}(F_X(\omega_2) - F_X(\omega_1)]$$

定理5.5.4 设X={X_n, n=0, ±1, ±2,…}是零均值的平稳时间序列,其谱函数为$F_X(\omega)$,则Xn可以表示为

$$X_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega n} dZ(\omega), n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

其中 $$Z(\omega) = \frac{1}{2\pi}(\omega X_0 - \sum_{n\neq 0} \frac{e^{-j\omega n} - 1}{-jn} X_n), -\pi \leq \omega \leq \pi$$

称为平稳时间序列X 的随机谱函数.且具有性质:

(1) $\mathrm{E}[Z(\omega)] = 0$

(2) $\forall \omega_1 < \omega_2 \leq \omega_3 < \omega_4, E[\overline{(Z(\omega_2) - Z(\omega_1))}(Z(\omega_4) - Z(\omega_3))] = 0$

(3) $\forall \omega_1 < \omega_2, E[|Z(\omega_2) - Z(\omega_1)|^2] = \frac{1}{2\pi}(F_X(\omega_2) - F_X(\omega_1))$

定理5.5.5 设X={X_n, n=0, ±1, ±2,…}是零均值的实平稳时间序列,其谱函数为$F_X(\omega)$,则X可以表示为

$$X_n=\int_0^{\pi}\cos\omega n dZ_1(\omega)+\int_0^{\pi}\sin\omega n dZ_2(\omega), n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

其中
$$Z_1(\omega)=\frac{1}{\pi}(\omega X_0+\sum_{n\neq0}\frac{\sin\omega n}{n}X_n),-\pi\le\omega\le\pi$$

$$Z_2(\omega)=\frac{1}{\pi}\sum_{n\neq0}\frac{1-\cos\omega n}{n}X_n),-\pi\le\omega\le\pi$$

称为实平稳时间序列X 的随机谱函数.且具有性质:

(1) $\mathrm{E}[Z_1(\omega)] = \mathrm{E}[Z_2(\omega)] = 0$

(2) 若$i \neq j$或$j=i$,则$\forall \omega_1 < \omega_2 \leq \omega_3 < \omega_4$,有

$$E[(Z_i(\omega_2) - Z_i(\omega_1))(Z_j(\omega_4) - Z_j(\omega_3))] = 0, \quad i, j = 1, 2$$

(3) $\forall \omega_1 < \omega_2$,

$$E[Z_1(\omega_2) - Z_1(\omega_1)]^2 = E[Z_2(\omega_2) - Z_2(\omega_1)]^2$$

$$= \frac{1}{\pi}(F_X(\omega_2) - F_X(\omega_1)]$$