三. 有限维分布函数族

定义2.3.1 设 $X=\{X_t, t\in T\}$是定义在概率空间 (Ω,F,P)上取实值的随机过程. 对任意的自然数 $n\geq 0$,及任意的 $t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$ 和实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in R$, 称n维随机变量$(X_{t_1},X_{t_2},\cdots,X_{t_n})$的联合分布函数

$$F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n)=P(X_{t_1}\leq x_1,\cdots,X_{t_n}\leq x_n),$$

为随机过程X的n维分布函数。

将随机过程X的所有有限维分布函数的全体记为

$$\mathbf{F}=\{F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n):\ \forall n\in\mathbf{N},\ t_1,t_2,\cdots,t_n\in T,\ x_1,x_2,\cdots,x_n\in R\}$$

则称函数集F为随机过程X的n维分布函数族。

有限维分布函数族具有以下相容性条件

（1）对（$1,2,\cdots,n$）的任一个排列（$k_1,\cdots,k_n$），有

$$F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n) = F_{t_{k_1},\cdots,t_{k_n}}(x_{k_1},\cdots,x_{k_n})$$

(2) 若自然数$m<n$, 则有

$$F_{t_1,\cdots,t_m}(x_1,\cdots,x_m) = F_{t_1,\cdots,t_m,t_{m+1},\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_m,+\infty,\cdots,+\infty)$$

补例1. 设随机过程 $X=\{X_t=V\cos\omega t, t\in R\}$ 其中 ω 为常数，随机变量V服从[0, 1]上的均匀分布. 分别计算当 $t=\frac{3\pi}{4\omega}$ 和 $t=\frac{\pi}{2\omega}$ 时,随机过程X的一维分布函数.

解： $t=\frac{3\pi}{4\omega}$ 时， $X_t=V\cos\omega\frac{3\pi}{4\omega}=-\frac{\sqrt{2}}{2}V$

由于函数 $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}V$ 的反函数为

$$V=h(x)=-\sqrt{2}x,$$

其导数为 $h'(x)=-\sqrt{2},$

利用随机变量的函数的概率密度计算公式，得

$$f_{\frac{3\pi}{4\omega}}(x)=\begin{cases} f_V(h(x))\left|h'(x)\right| & 0\le h(x)\le 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \sqrt{2} & 0\le -\sqrt{2}x\le 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\le x\le 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

则X的一维分布函数为

$$F_{\frac{3\pi}{4\omega}}(x)=\int_{-\infty}^{x} f_{X_{\frac{3\pi}{4\omega}}}(t)dt$$

$$=\begin{cases} 0, & x<-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \int_{-\sqrt{2}/2}^{x}\sqrt{2}dt, & -\frac{\sqrt{2}}{2}\le x<0 \\ \int_{-\sqrt{2}/2}^{0}\sqrt{2}dt, & x\ge 0 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 0, & x<-\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}(x-\sqrt{2}/2), & -\sqrt{2}/2\le x<0 \\ 1, & x\ge 0 \end{cases}$$

当$t=\dfrac{\pi}{2\omega}$时，$X_t=V\cos\omega\dfrac{\pi}{2\omega}=0,$

此时$X_{\frac{\pi}{2\omega}}$服从单点分布,则

$$F_{\frac{\pi}{2\omega}}(x)=P\{X_{\frac{\pi}{2\omega}}\le x\}$$

$$=\begin{cases}1 & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

补例2. 设随机过程$X=\{X_t = A\cos t, t\geq 0\}$,其中随机变量A有分布律:

$$P(A=i)=\frac{1}{3},\ \ i=1,2,3.$$

试求 (1)随机过程X的一维分布函数$F_{\frac{\pi}{4}}(x)$

(2)随机过程X的二维分布函数$F_{0,\frac{\pi}{3}}(x_1,x_2)$

解 (1)$\because\ X_{\frac{\pi}{4}} = A\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}A,$

分布律为 $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} & \frac{3}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

分布函数为 $F_{\frac{\pi}{4}}(x)=\begin{cases}0, & x<\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1}{3}, & \frac{\sqrt{2}}{2}\le x<\sqrt{2}\\ \frac{2}{3}, & \sqrt{2}\le x<\frac{3}{2}\sqrt{2}\\ 1, & x\ge \frac{3}{2}\sqrt{2}\end{cases}$

（2）$F_{0,\frac{\pi}{3}}(x_1,x_2)=P(X_0\le x_1, X_{\frac{\pi}{3}}\le x_2)$

$$=P(A\le x_1,\frac{A}{2}\le x_2)$$

$$=P(A\le x_1, A\le 2x_2)$$

$$=\begin{cases} P(A\le x_1) & x_1\le 2x_2 \\ P(A\le 2x_2) & x_1>2x_2 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 0, & x_1<1 \\ \frac{1}{3}, & 1\le x_1<2 \\ \frac{2}{3}, & 2\le x_1<3 \\ 1, & x_1\ge 3 \end{cases} \quad (x_1\le 2x_2) \text{ 或 } \begin{matrix} 2x_2<1 \\ 1\le 2x_2<2 \\ 2\le 2x_2<3 \\ 2x_2\ge 3 \end{matrix} \quad (x_1>2x_2)$$

定义2.3.3 设 $X=\{X_t, t\in T\}$ 是定义在概率空间 (Ω,F,P) 上取实值的随机过程. 对任意的自然数 $n\geq 0$ 及任意的 $t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$，称

$$\varphi_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(u_1,u_2,\ldots,u_n)=\mathrm{E}[e^{j(u_1X_{t_1}+\cdots+u_nX_{t_n})}]$$

$$\forall u_1,u_2,\ldots,u_n\in R$$

为随机过程X的n维特征函数.

称函数集合:

$$\Phi=\{\varphi_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(u_1,u_2,\ldots,u_n),\ \ n\in\mathbf{N}, t_i\in T, u_i\in R, i=1,2,..,n\}$$

为随机过程X的有限维特征函数族.

关于随机变量的特征函数的回顾

定义 设随机变量X的分布函数F(x),则称

$$\varphi(u)=\mathrm{E}[e^{juX}] \qquad -\infty < u < +\infty$$

为随机变量X的特征函数.

特征函数的几点说明

(1) 特征函数总是存在的.

对任意实数u, 有 $|e^{jux}|=1$. 故$E[e^{jux}]$总存在.

（2） 若X与Y相互独立,Z=X+Y,则

$$\varphi_Z(u) = \varphi_X(u)\varphi_Y(u)$$

(可推广到n个相互独立随机变量)

（3）设随机变量X的n阶原点矩(即E[X^n])存在，则 $\varphi(u)$ 存在k (k≤n) 阶导数，且有

$$\varphi^{(k)}(0) = j^k \mathrm{E}X^k,\quad k \le n$$

$$\Rightarrow\quad \mathrm{E}X^k = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{j^k},\quad k \le n$$

(4)一些重要分布的特征函数计算

单点分布 P(X=c)=1, c常数.则

$$\varphi(u)=E[e^{juX}]=e^{juc}$$

二项分布 $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$, $k=0,1,\ldots,n.0<p<1,q=1-p.$

则特征函数

$(e^{ju}p)^k$

$$\varphi(u)=E[e^{juX}]=\sum_{k=0}^{n} e^{juk}C_n^k p^k q^{n-k}=(pe^{ju}+q)^n$$

泊松分布 $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k=0,1,2,\ldots$, $\lambda>0$

则特征函数

$$\varphi(u)=E[e^{juX}]=\sum_{k=0}^{\infty}e^{juk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

$$=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^{ju})^k}{k!}=e^{-\lambda}e^{\lambda e^{ju}}=e^{\lambda(e^{ju}-1)}$$

均匀分布 r.v.X～U(a,b],密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

则特征函数

$$\varphi(u)=\mathrm{E}[e^{juX}]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jux}f(x)dx$$

$$=\int_a^b e^{jux}\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{jt(b-a)}(e^{jbu}-e^{jua})$$

正态分布 **X～N(μ, σ²),密度函数为**

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},-\infty<x+\infty,\mu,\sigma(>0)\text{常数}$$

则特征函数

$$\varphi(u)=E[e^{juX}]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jux}f(x)dx \qquad \text{令 } v=\frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jux}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ju(\sigma v+\mu)}e^{-\frac{v^2}{2}}dv$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{j\mu u-\frac{1}{2}\sigma^2u^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(v-ju)^2}{2}}dv=e^{j\mu u-\frac{1}{2}\sigma^2u^2}$$

特别X～N(0,1)时

$$\varphi(u)=e^{-\frac{u^2}{2}}$$

指数分布

r.v.X服从参数为λ（>0）的指数分布，概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x\geq 0\\ 0, \quad x<0\end{cases}$$

则特征函数

$$\varphi(u)=\mathrm{E}[e^{juX}]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jux}f(x)dx$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{jux}\lambda e^{-\lambda x}dx=\int_0^{+\infty}\lambda e^{(ju-\lambda)x}dx$$

$$=\frac{\lambda}{\lambda-ju}$$

(5) 随机变量的分布函数与其特征函数相互唯一确定.

n维随机变量$X=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$的特征函数

$$\varphi(u_1,u_2,\cdots u_n) = \mathrm{E}[e^{j(u_1X_1+u_2X_2+\cdots+u_nX_n)}]$$

$$= \mathrm{E}[e^{juX^T}]$$

也称多元特征函数

特征函数应用举例:

补例3.设X服从参数为λ的泊松分布，求$\mathrm{EX},\mathrm{EX}^2,\mathrm{DX}$

解：　由题意$\varphi(u)=e^{\lambda(e^{ju}-1)}$

则　$\varphi'(u)=j\lambda e^{ju}e^{\lambda(e^{ju}-1)},\varphi''(u)=-(\lambda e^{ju}+\lambda^2e^{2ju})e^{\lambda(e^{ju}-1)}$

则利用特征函数性质：$\varphi^{(k)}(0)=j^k\mathrm{EX}^k$

得　$EX=\dfrac{\varphi'(0)}{j}=\lambda$　　$EX^2=\dfrac{\varphi''(0)}{j^2}=\lambda+\lambda^2$

$\therefore DX=EX^2-(EX)^2=\lambda$

补例4. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立，且

X_k服从正态分布：$N(\mu_k,\ \sigma_k^2)$，$k=1,2,\cdots,n$

用特征函数求随机变量$Y=\sum_{k=1}^{n} X_k$的概率分布

解：由题意$\varphi_{X_k}(u)=e^{j\mu_k u-\frac{1}{2}\sigma_k^2u^2},k=1,2,\ldots,n$

$$\therefore \varphi_Y(u)=\prod_{k=1}^{n}\varphi_{X_k}(u)=\prod_{k=1}^{n}e^{j\mu_k u-\frac{1}{2}\sigma_k^2u^2}=e^{j(\sum_{k=1}^{n}\mu_k)u-\frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2)u^2}$$

$\therefore$ $Y=\sum_{k=1}^{n} X_k$服从正态分布：$N(\sum_{k=1}^{n}\mu_k,\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2)$

例2.3.5（2）设$f(u)$是$Y_n(n=1,2,\ldots)$的特征函数，试计算复合泊松过程的一维特征函数.

$$f_{X_t}(u)=\mathrm{E}[e^{juX_t}]=\mathrm{E}[e^{ju\sum_{n=1}^{N_t}Y_n}]$$

$$=\mathrm{E}[\mathrm{E}[e^{ju\sum_{n=1}^{N_t}Y_n}\,|N_t]]$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\mathrm{E}(e^{ju\sum_{n=1}^{m}Y_n}\,|N_t=m)P(N_t=m)$$

Y_n与N_t独立

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\mathrm{E}(e^{ju\sum_{n=1}^{m}Y_n})P(N_t=m)$$

Y_n独立同分布

$$=\sum_{m=0}^{\infty}(f(u))^m(\lambda t)^m e^{-\lambda t}/m!$$

$$=e^{-\lambda t}\sum_{m=0}^{\infty}(\lambda t f(u))^m/m!=e^{\lambda t(f(u)-1)}$$

补例5　独立增量过程的有限维分布函数由其一维分布函数和增量分布函数确定.

提示：利用特征函数

证明 对$\forall n\geq 1$及$t_1<t_2<\cdots<t_n\in T$， n维随机变量的（$X_{t_1},X_{t_2},\cdots,X_{t_n}$）的特征函数为

$$\varphi_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(u_1,u_2,\ldots,u_n)=\mathrm{E}[e^{j(u_1X_{t_1}+\cdots+u_nX_{t_n})}] \quad ①$$

令 $Y_1=X_{t_1},Y_2=X_{t_2}-X_{t_1},\cdots,Y_n=X_{t_n}-X_{t_{n-1}}$

由题意知 $Y_1,Y_2,\ldots,Y_n$独立

则
$$X_{t_1}=Y_1,$$
$$X_{t_2}=Y_1+Y_2,$$
$$\cdots,$$
$$X_{t_n}=Y_1+Y_2+\cdots+Y_n$$
代入①式

$$\varphi_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(u_1,u_2,\ldots,u_n) = \mathrm{E}[e^{j(u_1X_{t_1}+\cdots+u_nX_{t_n})}]$$

$$= \mathrm{E}[e^{j(u_1Y_1+u_2(Y_1+Y_2)+\cdots+u_n(Y_1+Y_2+\cdots+Y_n))}]$$

$$= \mathrm{E}[e^{j((u_1+u_2+\cdots+u_n)Y_1+(u_2+u_3+\cdots+u_n)Y_2+\cdots+u_nY_n)}]$$

$$= \mathrm{E}[e^{j(u_1+u_2+\cdots+u_n)Y_1}e^{j(u_2+u_3+\cdots+u_n)Y_2}\cdots\cdot e^{ju_nY_n}]$$

由$Y_1Y_2,\ldots,Y_n$的独立性

$$= \mathrm{E}[e^{j(u_1+u_2+\cdots+u_n)Y_1}]\mathrm{E}[e^{j(u_2+u_3+\cdots+u_n)Y_2}]\cdots\cdot \mathrm{E}[e^{ju_nY_n}]$$

$$= \varphi_{Y_1}(u_1+u_2+\cdots+u_n)\varphi_{Y_2}(u_2+u_3+\cdots+u_n)\cdots\cdot\varphi_{Y_n}(u_n)$$

证毕

例2.3.5（1） 试计算布朗运动的有限维特征函数

提示：利用独立增量过程的有限维特征函数

例2.3.1 验证：等价的两个随机过程具有相同的有限维分布函数.

定义2.1.5 设$X=\{X_t, t\in T\}$，$Y=\{Y_t, t\in T\}$均是定义在概率空间（Ω，F，P）上的随机过程，如果对任意的$t\in T$，有

$$P(X_t=Y_t)=1$$

则称随机过程X等价于随机过程Y.

练习题

1. 利用重复掷硬币的试验定义一个随机过程

$$X_t = \begin{cases} \cos \pi t, & 出现正面 \\ 2t, & 出现反面 \end{cases} \quad 0 \le t < +\infty$$

出现正面与反面的概率相等.

2. 利用掷一枚硬币的试验定义一个随机过程

$$X_t = \begin{cases} \cos \pi t, & 出现正面 \\ 2t, & 出现反面 \end{cases} \quad 0 \le t < +\infty$$

(1) 求X_t的一维分布函数$F(1/2;\ x)$, $F(1;\ x)$.

(2) 求X_t的二维分布函数$F(1/2,1;\ x_1,x_2)$.