3．3 粒子碰撞过程的相空间产生

高能物理可观测量的计算公式：

$$A=\int_V d\Phi_n\left(p_a+p_b,p_1,\ldots,p_n\right)\frac{\mathrm{M}}{8K\left(s\right)}F\left(A,p_1,\ldots,p_n\right)$$

在微扰计算和事例产生器过程中，在相空间中随机产生末态出射粒子的四动量常常会出现困难。假定对于n粒子末态，它的洛伦兹不变四动量记为$p_1,\ldots,p_n$，对应的质量为$m_1,\ldots,m_n$，则其洛仑兹不变的相空间体积元$d\Phi_n$表示为

$$d\Phi_n\left(P,p_1,\ldots,p_n\right)=\left(2\pi\right)^4\delta^4\left(P-\sum_{i=1}^{n}p_i\right)\prod_{i=1}^{n}\frac{d^4p_i}{\left(2\pi\right)^3}\theta\left(p_i^0\right)\delta\left(p_i^2-m_i^2\right).$$

相空间体积元可按如下公式因子化

$$d\Phi_n\left(P,p_1,\ldots,p_n\right)=\frac{1}{2\pi}dQ^2d\Phi_j\left(Q,p_1,\ldots,p_j\right)d\Phi_{n-j+1}\left(P,Q,p_{j+1},\ldots,p_n\right)$$

其中$Q=\sum_{i=1}^{j}p_j$。

对于无质量的粒子$(m_1=\ldots=m_n=0)$的相空间体积

$$\Phi_n=\int d\Phi_n=\left(2\pi\right)^{4-3n}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}\omega^{2n-4}\Big/\left[\Gamma\left(n\right)\Gamma\left(n-1\right)\right].$$

n粒子末态的反应过程的全截面积分表示可以写为

$$\sigma_n=\int_V d\Phi\rho_n\left(\Phi\right)\mathrm{M}\left(\Phi\right).$$

相空间积分的复杂性主要来自它是一个高维多重积分。被积函数中的δ函数表面上看起来很简单，但是它对积分域的限制却往往很复杂。并且被积变量间也可能是相关的。

一般来讲，对两体末态的过程，相空间积分还比较简单，但

是对三体末态的情况，就已经有多达 4 个非平庸变量，而且相空间积分域也可能找不到简单的形式表述出来。对这样的积分最常用的有效办法就是采用蒙特卡洛方法。

一、 顺序排列法

产生 n 粒子相空间的方法之一是基于反复利用因子化公式，使末态的 n 粒子体系是来源于顺序排列的两体衰变。反复利用公式(3.3.2b)我们得到

$$d\Phi_n(P, p_1, ..., p_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n-2}} dM_{n-1}^2 .....dM_2^2 d\Phi_2(n).....d\Phi_2(2),$$

其中 $M_i^2 = q_i^2$， $q_i = \sum_{j=1}^{i} p_j$ 和 $d\Phi_2(i) = d\Phi_2(q_i, q_{i-1}, p_i)$。不变质量的允许范围在 $(m_1 + ... + m_i)^2 \le M_i^2 \le (M_{i+1} - m_{i+1})^2$ 区间。在 q_i 的静止坐标系中，两粒子相空间 $d\Phi_2(q_i, q_{i-1}, p_i)$ 有如下表示

$$d\Phi_2(q_i, q_{i-1}, p_i) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\sqrt{\lambda(q_i^2, q_{i-1}^2, m_i^2)}}{8q_i^2} d\varphi_i d(\cos\theta_i)$$

其中运动学函数 $\lambda(x, y, z)$ 定义为

$$\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx$$

该相空间产生采用如下步骤：

(1) 首先，让 $i = n$， $q_i = P$ 和 $M_i = \sqrt{q_i^2}$ ；

(2) 洛仑兹变换到 q_i 的静止坐标；

(3) 产生两个 $[0,1]$ 区间的伪随机数 ξ_{i1}, ξ_{i2}，并使 $\varphi_i = 2\pi\xi_{i1}$，$\cos\theta_i = \xi_{i2}$ ；

(4) 如果 $i \ge 3$ 就产生第三个伪随机数 ξ_{i3}，并使 $M_{i-1} = (m_1 + ... + m_{i-1}) + \xi_{i3}(M_i - m_i)$ ；

(5)　取

$$\left|\vec{p}_i{}'\right| = \frac{\sqrt{\lambda\left(M_i^2, M_{i-1}^2, m_i^2\right)}}{2M_i}$$

并且 $\vec{p}_i{}' = \left|\vec{p}_i{}'\right| \cdot \left(\sin\theta_i \sin\varphi_i, \sin\theta_i \cos\varphi_i, \cos\theta_i\right)$，进一步置

$$p_i' = \left(\sqrt{\left|\vec{p}_i'\right|^2 + m_i^2}, \vec{p}_i'\right), \qquad q_{i-1}' = \left(\sqrt{\left|\vec{p}_i'\right|^2 + M_{i-1}^2}, -\vec{p}_i'\right);$$

(6)　变换回到原来的洛仑兹系统；

(7)　将 $i \Rightarrow i-1$。如果 $i \geq 2$，则回到第（2）步，反之，则置 $p_1 = q_1$；

该方法产生随机事例的权重为

$$W = (2\pi)^{4-3n} 2^{1-2n} \frac{1}{M_n} \prod_{i=2}^{n} \frac{\sqrt{\lambda\left(M_i^2, M_{i-1}^2, m_i^2\right)}}{M_i}.$$

二、　RAMBO 算法

RAMBO 子程序就是一个能够在相空间中产生非加权事例的程序。RAMBO 算法就是通过 $4n$ 个 $[0,1]$ 区间均匀分布的伪随机数，产生质心系能量为 $\sqrt{P^2}$ 情况下 n 个末态粒子的四动量。对无质量的末态粒子，粒子四动量是以均匀权重产生，我们首先讨论这种情况。

取 $P^\mu = (\omega, 0, 0, 0)$ 为类时四矢量。质心系能量为 ω 的 n 个无质量粒子的相空间体积为

$$\Phi_n = \int (2\pi)^4 \delta^4\left(P - \sum_{i=1}^{n} p_i\right) \prod_{i=1}^{n} \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^3} \theta\left(p_i^0\right) \delta\left(p_i^2\right)$$

为推导 RAMBO 算法，我们先来考察如下定义的量

$$R_n = \int (2\pi)^4 f\left(q_i^0\right) \prod_{i=1}^{n} \frac{d^4 q_i}{(2\pi)^3} \theta\left(q_i^0\right) \delta\left(q_i^2\right) = (2\pi)^{4-2n} \left(\int_0^\infty x f(x)\, dx\right)^n.$$

R_n 量可以看作是描述 n 个无质量粒子四动量 q_i^μ 系统，该四动量不

受动量守恒限制，但其出现具有权重 f，以保持总体积有限。四矢量 q_i^μ 通过下式与物理四动量相关联：

$$p_i^0 = x\left(\gamma q_i^0 + \vec{b}\cdot\vec{q}_i\right), \qquad \vec{p}_i = x\left(\vec{q}_i + \vec{b}q_i^0 + a\left(\vec{b}\cdot\vec{q}_i\right)\vec{b}\right),$$

其中

$$Q^\mu = \sum_{i=1}^{n} q_i^\mu, \qquad M = \sqrt{Q^2}, \qquad \vec{b} = -\frac{1}{M}\vec{Q},$$

$$\gamma = \frac{Q^0}{M} = \sqrt{1+\vec{b}^2}, \qquad a = \frac{1}{1+\gamma}, \qquad x = \frac{\omega}{M}.$$

我们将这个变换和其逆变换表示为

$$p_i^\mu = xH_{\vec{b}}^\mu\left(q_i\right), \qquad q_i^\mu = \frac{1}{x}H_{-\vec{b}}^\mu\left(p_i\right).$$

做变量代换得到

$$R_n = \int (2\pi)^4 \delta^4\left(P - \sum_{i=1}^{n} p_i\right)\prod_{i=1}^{n}\frac{d^4 p_i}{(2\pi)^3}\theta\left(p_i^0\right)\delta\left(p_i^2\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\prod_{i=1}^{n} f\left(\frac{1}{x}H_{-\vec{b}}^0\left(p_i\right)\right)\right)\frac{\left(P^2\right)^2}{x^{2n+1}\gamma}d^3b\,dx$$

选择 $f(x) = e^{-x}$，对 $\vec{b}$ 和 x 积分得到

$$R_n = \Phi_n \cdot S_n$$

其中

$$S_n = 2\pi\left(P^2\right)^{2-n}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma(n-1)\Gamma(2n)\Big/\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right).$$

这就给出了按照相空间产生无质量粒子四动量 p_i^μ 的蒙特卡洛算法。

该算法的两个步骤：

(1)　产生相互独立的 n 个无质量粒子四动量 q_i^μ，它们具有角度

各向同性分布，能量 q_i^0 服从分布密度函数 $g(q_i^0)=q_i^0 e^{-q_i}$。利用 $4n$ 个 $[0,1]$ 区间均匀分布的伪随机数 ξ_i，则可以按以下公式得到按要求分布的四动量 q_i^μ。

$$c_i = 2\xi_{i1}-1, \qquad \varphi_i = 2\pi\xi_{i2}, \qquad q_i^0 = -\ln\left(\xi_{i3}\xi_{i4}\right),$$

$$q_i^x = q_i^0\sqrt{1-c_i^2}\cos\varphi_i, \qquad q_i^y = q_i^0\sqrt{1-c_i^2}\sin\varphi_i, \qquad q_i^z = q_i^0 c_i .$$

(2)　将四矢量 q_i^μ 变换为四矢量 p_i^μ。

这样得到的每个事例都有相同的权重，该权重等于

$$W_0 = (2\pi)^{4-3n}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}\omega^{2n-4}\Big/\left[\Gamma(n)\Gamma(n-1)\right]$$

有质量粒子的相空间构造可以从无质量构造开始产生，然后再变换到要求的有质量构造。

步骤：

（1）让 p_i^μ 为 一组无质量粒子的动量。我们又从无质量粒子相空间开始计算

$$\Phi_n(\{p\}) = \int (2\pi)^4\delta^4\left(P-\sum_{i=1}^n p_i\right)\prod_{i=1}^n \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^3}\theta\left(p_i^0\right)\delta\left(p_i^2\right).$$

（2）利用下式将 p_i^μ 变换到四动量 k_i^μ：

$$k_i^0 = \sqrt{m_i^2+\zeta^2\left(p_i^0\right)^2}, \qquad \vec{k}_i = \zeta\vec{p}_i$$

其中 ζ 为如下方程的根：

$$\omega = \sum_{i=1}^n \sqrt{m_i^2+\left(p_i^0\right)^2\zeta^2}. \qquad (3.3.22)$$

它的逆变换，即将 k_i^μ 变换到四动量 p_i^μ 可以得到：

$$p_i^0 = \sqrt{\left(k_i^{02} - m_i^2\right)/\zeta^2}\text{，}\qquad \vec{p}_i = \vec{k}_i/\zeta$$

与上面相似，ζ 为如下方程的根：

$$\omega = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{\left(k_i^{02} - m_i^2\right)/\zeta^2}\text{ .}\qquad (3.3.23)$$

（3）经过一些数学计算后，我们得到：

$$\Phi_n\left(\{p\}\right) = \int (2\pi)^4\,\delta^4\left(P - \sum_{i=1}^{n} k_i\right)\cdot\left\{\zeta^{3(1-n)}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{k_i^0}{p_i^0}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\left|\vec{k}_i\right|^2}{k_i^0}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\left|\vec{p}_i\right|^2}{p_i^0}\right)^{-1}\right\}\cdot$$

$$\cdot\prod_{i=1}^{n}\frac{d^4k_i}{(2\pi)^3}\theta\left(k_i^0\right)\delta\left(k_i^2 - m_i^2\right)$$

其中$\{p\}$和$\{k\}$分别为一组可能的四动量 p_i^μ 和 k_i^μ。明显地，我们可以看到交换两组四动量$\{p\}$和$\{k\}$，相空间蒙特卡洛模拟权重可写为

$$W\left(\{p\},\{k\}\right) = \zeta^{3(n-1)}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i^0}{k_i^0}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\left|\vec{p}_i\right|^2}{p_i^0}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\left|\vec{k}_i\right|^2}{k_i^0}\right)^{-1}\text{ .}$$

我们可以得到

$$\zeta = \sum_{i=1}^{n}\left|\vec{k}_i\right|/\omega\text{ .}$$

则权重等于

$$W_m = \omega^{4-2n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\vec{k}_i\right|\right)^{2n-3}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{\left|\vec{k}_i\right|}{k_i^0}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\left|\vec{k}_i\right|^2}{\vec{k}_i}\right)^{-1}\text{ .}$$

与无质量的情况比较，这个权重不再是常数，而是在相空间中变化的。

在相空间中产生n个有质量末态粒子的步骤：

(1)　产生n各无质量末态粒子的事例；

(2)　数值求解方程(3.3.23)的根；

(3)　利用公式(3.3.22)得到有质量粒子的动量。

这样的事例权重为

$$W = W_m \cdot W_0 \text{，}$$