3．2 事例产生器

在核及粒子物理研究中，往往要做出微分截面或全截面的理论预言，并将其与实验结果进行对比。为此实验工作者需要知道，理论上得到的截面值在多大精度范围内会被实验装置测量出来。这就需要将理论上得到的精确微分截面表达式，在实验探测相空间内进行积分。

困难：

(1) 目前的各种实验装置都相当复杂，对这样的相空间做解析积分几乎是不可能的。

(2) 我们在计算总截面时，往往都要变换相空间的变量。这样就要增加雅可比行列式的因子，因而相空间积分的运算就更加复杂。

(3) 假如我们要考虑各探测器的效率，就必须引入各种随机统计的效应。解析求积分的方法这时就无法处理这类统计问题，而只能用蒙特卡洛探测器模拟方法来解决。

这样的模拟程序需要使用蒙特卡洛事例产生器。

所谓事例产生器是一个随机产生“ 非加权 ”事例的模拟程序。“ 非加权 ” 的含义是指末态粒子的四动量是按精确的微分截面来产生的。

通过该产生器产生的这些事例，最终可以得到全截面的蒙特卡洛的估计值。

采用事例产生器，我们就很容易地只对某个运动学变量的值

产生事例，来得到相对于该变量的微分截面。

假定微分截面公式用如下符号表示：

$$d\sigma = \frac{d\sigma}{d\vec{x}}(\vec{x})d\vec{x} \text{ .}$$

这里$\vec{x}$表示张开相空间的运动学变量。根据蒙特卡洛理论，总截面$\sigma = \int d\sigma$的蒙特卡洛估计值为

$$\sigma' = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{d\sigma}{d\vec{x}}(\vec{x}_i)\cdot\int d\vec{x}$$

式中$\vec{x}_i$是均匀分布的随机矢量。

蒙特卡洛积分要求σ'具有如下的特性：

(1) 当 N 很大时，σ'收敛于σ。

(2) σ'的期望值等于σ。

(3) 当 N 足够大时，σ'是服从正态分布的。

(4) σ'的标准误差为$\left[V\left\{\frac{d\sigma}{d\vec{x}}(\vec{x})\right\}/N\right]^{1/2}$。

利用事例产生程序来产生非加权事例，常用的方法有两种。

(1) 自适应抽样法，它是将重要抽样法和分层抽样法结合起来的迭代算法；

(2) 重要抽样法。它们都可以减小计算出的截面方差。

当事例产生程序采用自适应抽样法时，原则上并不需要事先对微分截面$\frac{d\sigma}{d\vec{x}}(\vec{x})$的性质有一些了解。程序自身可以根据函数特性来调整。

步骤：

(1) 随机地选择一个子空间。这些子空间的划分是自适应蒙特卡洛方法程序运行第一阶段自动调整子区间的边界得到的。

(2) 在这个子空间内随机地抽取一个事例样本，并计算该事例的权重w。该权重定义为对应于该事例参数的微分截面值与在该子空间内的最大微分截面值之比。

(3) 采用舍选法选择事例：取[0，1]上的均匀分布随机数ξ，如果$\xi \le w$，该事例被接受；反之，该事例被舍弃。

(4) 重复上面（1）—（3)，直到获得所需要的事例数。

按照相对论量子力学理论，总截面可以表示为

$$\sigma = \int M \rho dv$$

M 为描述过程的矩阵元平方，与过程发生相关的动力学机制则包含在其中；ρ为相空间密度，它是运动学变量的函数。积分是对所有的运动学变量构成的空间v进行的。不变矩阵元平方 M 显然与微分截面相关。

在被积函数的峰值特性很强的情况下，采用这种具有自动调整子空间边界的自适应蒙特卡洛抽样的事例产生器往往不是很有效。因而我们只好事先要对矩阵元平方的函数特性有所了解，以便更合理地划分子空间。当矩阵元平方的峰数不多时，依函数的特性来划分子区间可能不太困难，但是如果峰数很多时，要这样做就很困难。我们有时采用将积分变量作变量代换。

被选择的新积分变量要使矩阵元平方的峰变平坦。此时就可以使用自适应蒙特卡洛抽样程序的自调整功能来得到精确结果。

重要抽样法的非权重事例产生器程序产生事例的基本步骤为：

(1) 找出一个被积微分截面$\frac{d\sigma}{d\vec{x}}(\vec{x})$函数的近似表达式。该近似表达式在相空间内应当是解析可积的，并且其函数必须具有与$\frac{d\sigma}{d\vec{x}}(\vec{x})$的精确表达式有相同的峰值结构。

(2) 根据该微分截面近似表达式的分布，随机抽取事例样本。

(3) 对产生的事例加权重，其权重因子w等于该事例对应的精确截面值与对应的近似微分截面值之比。

(4) 采用舍选法抽取非权重事例。取[0，1]区间上均匀分布随机数ξ，若$\xi \le w / w_{\max}$，则接收该事例；反之，则舍弃该事例。这样得到的事例即为非加权事例。

(5) 重复（2）—（4）过程，直至获得所需数量的事例数。

显然，这种方法与具体处理的反应过程关系很密切。不同的研究过程，甚至不同实验参数截断值的选取，都需要选择不同的近似函数，甚至采用不同的事例产生程序。因而与自适应抽样法产生事例相比，重要抽样产生事例存在不具通用性的困难。

重要抽样法存在的第二个困难也同样是出现在当矩阵元平方的峰值特性复杂的情况。此时难于得到精确结果。这个困难有

时可以采用多道蒙特卡洛抽样方法来解决。该方法是基于迭加原理。

其具体步骤：

（1）　将精确微分截面$d\sigma$分成若干$d\sigma_i$的迭加。每个$d\sigma_i$有它自己的峰值结构特性。

（2）　对每个$d\sigma_i$编写按上述步骤产生事例的子产生器程序。在具体产生事例时，随机选择一个子产生器，而选择第i个子产生器的概率正比于对应于σ_i的近似截面值$\tilde{\sigma}_i$。对于由第i个产生器产生的事例计算权重因子$w_i = d\sigma_i / d\tilde{\sigma}_i$。

（3）　用舍选法得到以$d\sigma$分布的事例。

（4）　从在产生事例过程中得到的w_i可以算出总截面值为：

$$\sigma = \int d\sigma = \sum_{i=1}^{N} \int d\sigma = \sum_{i=1}^{N} \langle w_i \rangle_{d\tilde{\sigma}_i} \tilde{\sigma}_i = \langle w \rangle \tilde{\sigma} ,$$

其中 $\tilde{\sigma} = \sum_{i=1}^{N} \tilde{\sigma}_i$ ，　$\tilde{\sigma}_i = \int d\tilde{\sigma}_i$ ，　$(i = 1,2,\cdots,N)$.

这里$\langle w_i \rangle_{d\tilde{\sigma}_i}$表示以近似微分截面$d\tilde{\sigma}_i$分布的事例的权重因子$w_i$的平均值；$\langle w \rangle$表示按如下方法产生事例的权重因子$w$的平均值，即选择在[0，1]区域上均匀分布随机数$\xi$，判断满足不等式

$$\sum_{j=1}^{i-1} \tilde{\sigma}_j \Big/ \tilde{\sigma} \le \xi < \sum_{j=1}^{i} \tilde{\sigma}_j \Big/ \tilde{\sigma}$$

的i值。然后按$d\tilde{\sigma}_i$分布产生事例。

通常一个事例产生器的效率定义为

$$E = \frac{\langle w \rangle}{w_{\max}} .$$