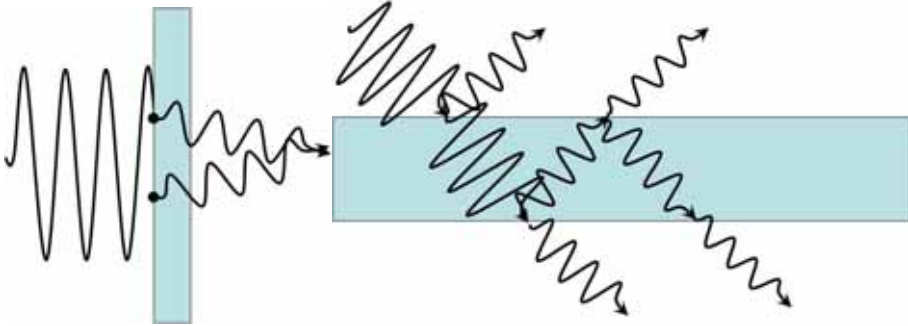


第三章 干涉装置

3.1 干涉装置概述

按照光的相干性的要求及光源的特点，一束光只有和它自身才是相干的。所以，干涉装置，就是要设法将一束波分解为相干的几个部分，然后再进行相干叠加。

将光波进行分解的方法有许多种，第一种，就是在光波场中取两个或几个点，将这些点作为新的光源，这些新光源可以取在一束波（平面波、球面波等）的波面上，即等相位面上，但一般情况下，不容易也不必要这样做。由于光场中的任意一个面都被称作波前，我们可以将这些点所在的面，可能是平面，也可能是曲面，看作一个波前，只要这个波前处在同一束波上即可。那么，这种将波前分解、然后获得相干光的装置就被称作“分波前的干涉装置”。杨氏双孔或双缝干涉就是最典型的分波前的干涉装置。



第二种，是将整个波列分解，例如利用光波在介质分界面的反射和折射，将入射光分为入射和折射（透射）两部分，这两部分往往不能相遇，因而，需要经过多次的反射和透射。这种分解方式是将光的能量分为几个部分，而光的能量与其振幅成正比，所以这种装置被称作“分振幅的干涉装置”。

两种分光的方法相比，不难看出，由于杨氏双孔或双缝干涉分波前的方法只利用了入射光的一小部分，其余的能量都被遮挡掉了，所以效率是比较低的，虽然在物理上有较好的意义，但多数情况并不适用。所以实际应用的分波前干涉装置都是在杨氏装置的基础上改进的。而分振幅的装置，由于有相当大的一部分光的能量用以产生干涉，因而可以充分利用入射光的能量，所以在实际中有极广泛的应用。

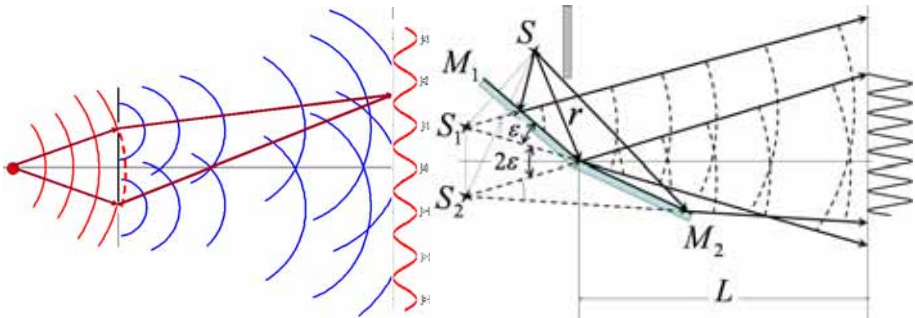
3.2 分波前的干涉装置

3.2.1 杨氏干涉

一列光波经过双缝或双孔，分成相干的两列光波，两列相干光在空间 P 处相遇，位相差为 $\Delta\varphi$ 产生干涉。

第二列光波分成的两列相干光，在 P 处的位相差与第一列光波相同，亦为 $\Delta\varphi$ ，产生与第一列相同的干涉强度分布，与第一列所产生的干涉，进行强度叠加。依此类推，得到一个干涉花样。

其物理过程为：第一步是相干叠加，第二步是强度叠加（非相干）。



3.2.2 菲涅耳 (Fresnel) 双面镜

如图，两个反射镜 M_1 、 M_2 之间有以较小的夹角 ε ，光源 S 位于两反射镜的上方。在光源与接收装置（例如接收屏）间有一个不透光的挡板，使得光不能直接射到接收屏幕上，而只有经过两镜反射的光才能到达屏幕。对于屏幕而言，经反射镜 M_1 、 M_2 射过来的光，就相当于分别是来自 S 的像 S_1 、 S_2 射过来的，而 S_1 、 S_2 是同一个光源的像，因而是相干的。这两列反射光在屏幕上的交叠区域，进行相干叠加，产生干涉条纹。

因为反射镜的大小总是有限的，所以反射光只能照射屏幕上有效大小的区域，而两列光的交叠区域还要小，因而只能在屏幕上一个较小的区域内产生干涉。

经过简单的几何推算，可以得到，两相光源 S_1 、 S_2 对反射镜交线的张角等于反射镜之间夹角的两倍，即 2ε 。如果两镜交线到光源 S 的距离为 r ，到屏幕的距

离为 L ，则像光源到屏幕的距离为

$$L + r \cos \varepsilon$$

而两像光源间的距离为 $2r \sin \varepsilon$

将该装置与杨氏双缝干涉比较，在满足近轴条件时，相当于双缝间距

$$d = 2r \varepsilon$$

双缝到接收屏的距离

$$D = L + r$$

所以条纹间距为

$$\Delta x = \frac{L+r}{2r\varepsilon} \lambda \quad (3.2.1)$$

例题 设菲涅尔双面镜的夹角为 $20'$ ，缝光源距两镜交线 10cm ，接受屏幕与光源的两个像点的连线平行，且与两镜连线间的距离为 210cm ，光波长为 600.0nm ，问：

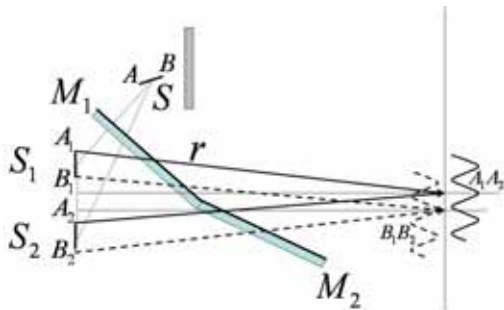
- (1) 干涉条纹的间距为多少？
- (2) 如果光源到两镜交线的距离增大一倍，干涉条纹有何变化？
- (3) 如果光源与两镜交线的距离保持不变，而在横向有所移动，干涉条纹有何变化？
- (4) 如果要在屏幕上观察到有一顶反衬度的干涉条纹，所允许的缝光源的最大宽度是多少？

解：(1) 利用上述式，可得

$$\Delta x = \frac{L+r}{2r\varepsilon} \lambda = \frac{210+10}{2 \cdot 10 \cdot \frac{20}{60} \cdot \frac{\pi}{180}} \cdot 600.0\text{nm} = 1.13\text{mm}$$

$$(2) \Delta x' = \frac{L+r'}{2r'\varepsilon} \lambda = \frac{210+20}{2 \cdot 20 \cdot \frac{20}{60} \cdot \frac{\pi}{180}} \cdot 600.0\text{nm} = 0.59\text{mm}$$

(3) 光源做横向移动时，由于距离 r 保持不变，所以干涉条纹没有变化。



(4)

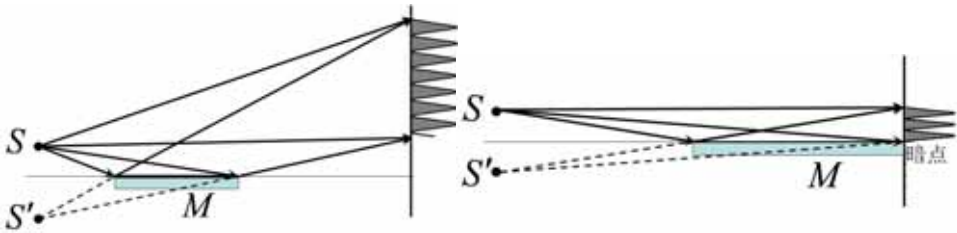
光源有一定宽度，所成的像亦有一定宽度，即光源 AB 的像光源为 A_1B_1 和

A_2B_2 。注意, A_1 、 A_2 对应于光源上 A ; 而 B_1 、 B_2 对应于光源上 B 。所以, A_1 、

A_2 是一对相干光源, 而 B_1 、 B_2 是另一对, A_1 、 A_2 和 B_1 、 B_2 之间是不相干的。

由图可见, 它们的对称轴是错开的, 间距为缝光源的宽度, 因而各自的干涉条纹也错开, 同一级干涉纹间距也是光源的宽度。当两套干涉纹的同级亮纹错开半个条纹间距时, 由于一套的亮纹恰与另一套的暗纹重叠, 则条纹布可分辨。因而光源的宽度要小于 (1) 或 (2) 中条纹间距的一半。

3.2.3 罗埃镜

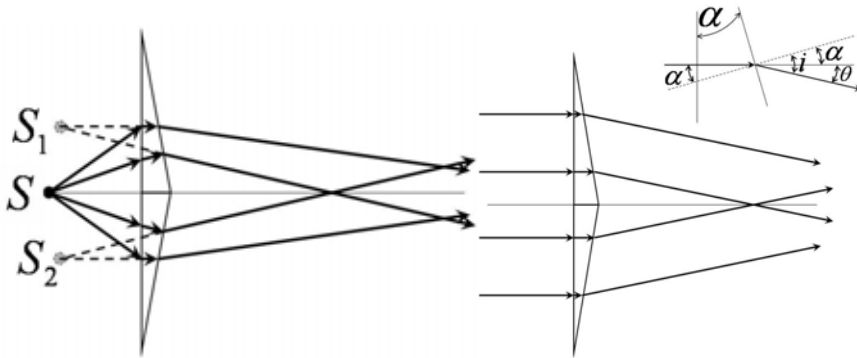


在平面反射镜的上方有一光源, 则光源发出的光, 一部分直接到达接收屏, 另一部分经镜面反射后到达接收屏。在它们重叠的区域, 产生干涉。光源 S 与它的几何像 S' , 等效于杨氏干涉装置中的双孔或双缝。

与菲涅尔双面镜相比, 干涉光中, 有一列没有经过镜面反射、而是直接到达了屏幕。这样一来, 就产生了不同的结果。实验研究发现, 如果让反射镜的前端抵住接收屏, 则镜与幕的接触点应该是整个装置的对称中心, 按照杨氏干涉的原理, 这应该是 0 级亮条纹的位置。然而, 实验表明, 这里却出现了暗纹。这当然不是由于测量上的误差而产生的, 而是由物理上的原因。

两光源到上述接触点的光程是相等的, 两列波在此本来应该是同相的, 而事实上出现了暗纹, 说明两列波的相位相反, 相当于世纪的光程相差半个波长。而这半个波长的光程差只能是由于其中的一列波反射而产生的, 因而称其为“斑驳损失”, 意思是其中一个波列由于反射而损失了 (当然也可以说是额外增加了) 半个波长的光程。半波损失的原因在之后的一节中将得到说明。

3.2.4 菲涅耳 (Fresnel) 双棱镜



将两个完全相同的三棱镜的底面相对，粘合起来，就组成了一个三棱镜。从光源 S 发出的光经棱镜折射后，就相当于从两个虚像点 S_1 、 S_2 射过来的，在重叠区域产生干涉。这种装置被称作菲涅尔双棱镜。实际上，并不需要先做好两块一模一样的棱镜再将其粘合，而是用一块薄的等腰三棱镜即可。

如果是平行光入射，设棱镜的顶角为 α ，玻璃的折射率为 n ，由于

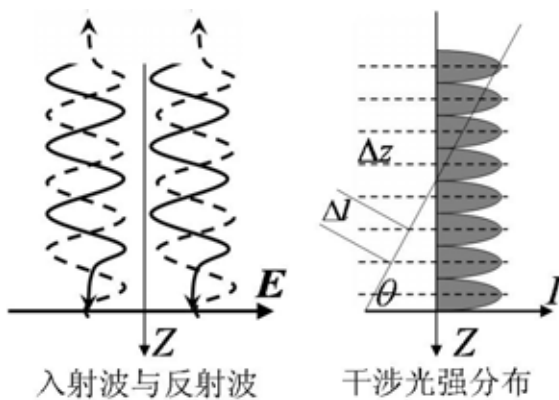
$$\sin i = n \sin \alpha$$

而 α 是小角， $\sin i = n \sin \alpha \approx n\alpha$ ，故折射光的倾角为

$$\theta = i - \alpha = (n - 1)\alpha \quad (3.2.2)$$

等效于平行光的干涉。

3.2.5 维纳驻波的干涉



入射波 $\psi_1 = A_1 \cos(kz - \omega t)$

设反射波的振幅与入射波相等，表示为

$$\psi_2 = A_2 \cos(-kz - \omega t + \varphi) = A_2 \cos(kz + \omega t - \varphi), \text{ 设 } A_1 = A_2$$

$$\begin{aligned} \text{合振动 } \psi &= \psi_1 + \psi_2 = A \cos(kz - \omega t) + A \cos(kz + \omega t - \varphi) \\ &= 2A \cos\left(\omega t - \frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(kz - \frac{\varphi}{2}\right) \end{aligned}$$

在上述表达式中，时间因子 ωt 与空间因子 kz 分开，这种形式的波动无法在空间传播，而只能在原位振动，因而形成驻波。实验表明，在 $z=0$ 处， $I=0$ ，说明 $\varphi=\pi$ ，即反射时有半波损失。则

$$\psi = -2A \sin \omega t \sin kz, \quad (3.2.3)$$

$$\text{光强 } I = 4A^2 \sin^2 kz, \quad (3.2.4)$$

$z=0$ 处， $I=0$ ，为极小值。

可以由 $k\Delta z = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta z = \pi$ 求得暗纹间隔，即

$$\Delta z = \frac{\lambda}{2} \quad (3.2.5)$$

板 G 上条纹间隔为

$$\Delta l = \Delta z / \sin \theta = \lambda / 2 \sin \theta \quad (3.2.6)$$

斜入射时，将波矢分解为平行和垂直于 z 的两部分。与 z 平行部分无反射波，不发生干涉。

3.3 菲涅耳 (Fresnel) 公式

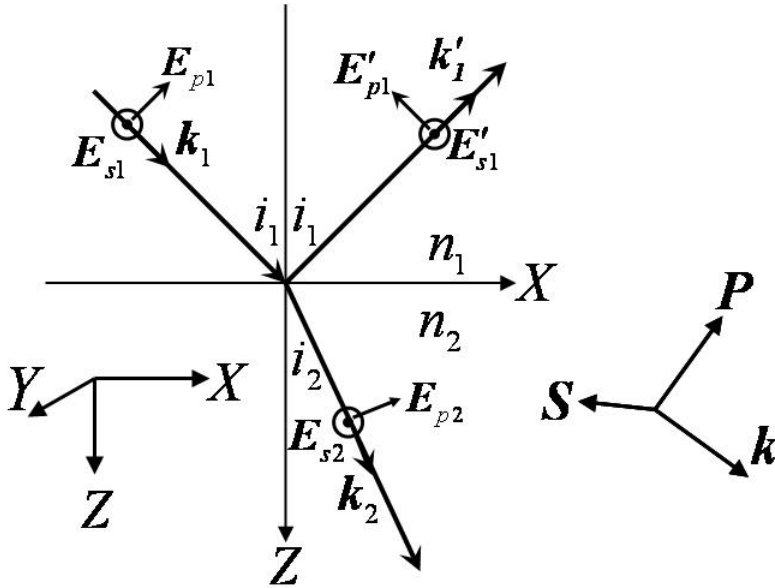
入射光在媒质界面处分为反射和折射两部分，反射波、折射波的情况与介质的光学常数、入射角、以及入射波振动适量的方向都有关系。这种关系，最初是菲涅尔表达出来的，因而被称作菲涅尔公式。

菲涅尔公式可以通过在一定的边界条件下求解 Maxwell 方程组得到，是电动力学的基本关系。菲涅尔公式给出了反射波和折射波的电场强度、磁场强度与入射波的电场强度、磁场强度间的关系。由于光学仅讨论电场强度，故磁场部分不予考虑。本书不对推导过程作介绍，只将其结果进行应用。

3.3.1 振动矢量的分解

设入射波从折射率为 n_1 的介质射向折射率为 n_2 的介质，电矢量为 E_1 ，波矢为 k_1 。反射波、折射波的电矢量和波矢分别记为 E_1' 、 k_1' ， E_2 、 k_2 。将振动矢

量分解为垂直于入射面的 S 分量和平行于入射面的 P 分量。P、S 和 k 构成右手系。规定 S 沿+y 方向为正。图示为各个分量的正方向。



3.3.2 Fresnel 公式

在入射点处，反射、折射瞬间电矢量与入射电矢量之间的关系可以用以下关系表达。

$$\text{反射光} \quad \frac{E'_{s1}}{E_{s1}} = \frac{n_1 \cos i_1 - n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2} = -\frac{\sin(i_1 - i_2)}{\sin(i_1 + i_2)} \quad (3.3.1)$$

$$\frac{E'_{p1}}{E_{p1}} = \frac{n_2 \cos i_1 - n_1 \cos i_2}{n_2 \cos i_1 + n_1 \cos i_2} = \frac{\text{tg}(i_1 - i_2)}{\text{tg}(i_1 + i_2)} \quad (3.3.2)$$

$$\text{折射光} \quad \frac{E_{s2}}{E_{s1}} = \frac{2n_1 \cos i_1}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2} = \frac{2 \sin i_2 \cos i_1}{\sin(i_1 + i_2)} \quad (3.3.3)$$

$$\frac{E_{p2}}{E_{p1}} = \frac{2n_1 \cos i_1}{n_2 \cos i_1 + n_1 \cos i_2} = \frac{2 \sin i_2 \cos i_1}{\sin(i_1 + i_2) \cos(i_1 - i_2)} \quad (3.3.4)$$

Fresnel 公式描述了各个分量的振动矢量之间的关系。对于定态光波，由于可以用复数表示为

$$E = Ae^{i\varphi} e^{-i\omega t}, \text{ 而其角频率 } \omega \text{ 为不变量, 因而有 } E \propto Ae^{i\varphi}, \text{ 而 } Ae^{i\varphi} \text{ 为复振}$$

幅，所以 Fresnel 公式也是各个分量复振幅之间的关系式。

3.3.3 反射率与透射率

从 Fresnel 公式可以直接得到反射率和透射率。

(复) 振幅反射率

$$\tilde{r}_s = \frac{E'_{s1}}{E_{s1}} = \frac{n_1 \cos i_1 - n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2} = -\frac{\sin(i_1 - i_2)}{\sin(i_1 + i_2)} \quad (3.3.5)$$

$$\tilde{r}_p = \frac{E'_{p1}}{E_{p1}} = \frac{n_2 \cos i_1 - n_1 \cos i_2}{n_2 \cos i_1 + n_1 \cos i_2} = \frac{tg(i_1 - i_2)}{tg(i_1 + i_2)} \quad (3.3.6)$$

(复) 振幅透射率

$$\tilde{t}_s = \frac{E_{s2}}{E_{s1}} = \frac{2n_1 \cos i_1}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2} = \frac{2 \sin i_2 \cos i_1}{\sin(i_1 + i_2)} \quad (3.3.7)$$

$$\tilde{t}_p = \frac{E_{p2}}{E_{p1}} = \frac{2n_1 \cos i_1}{n_2 \cos i_1 + n_1 \cos i_2} = \frac{2 \sin i_2 \cos i_1}{\sin(i_1 + i_2) \cos(i_1 - i_2)} \quad (3.3.8)$$

光强反射率

$$R_s = |r_s|^2 \quad (3.3.9), \quad R_p = |r_p|^2 \quad (3.3.10)$$

光强透射率

$$T_p = \frac{n_2}{n_1} |t_p|^2 \quad (3.3.11), \quad T_s = \frac{n_2}{n_1} |t_s|^2 \quad (3.3.12)$$

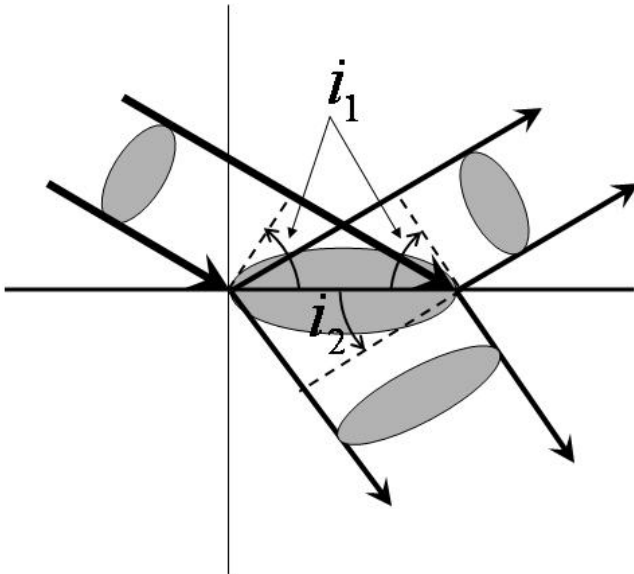
光强是能流密度，即能流等于光强与光束截面的乘积。由于反射角等于入射角，反射光的光束截面保持与入射光相同，所以能流的反射率等于光强的反射率。

而折射角不等于入射角，所以折射光束的截面积与入射光不同。两者间的关系为

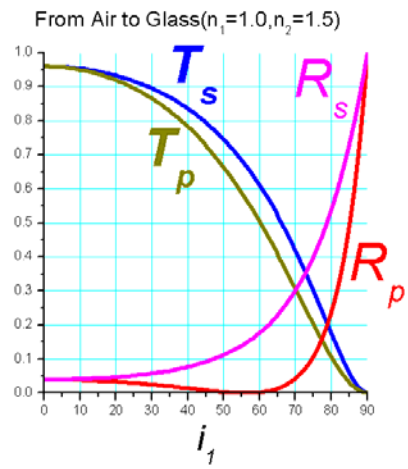
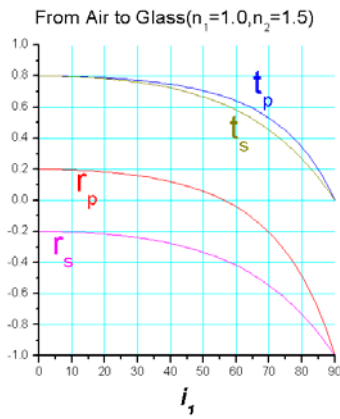
$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\cos i_2}{\cos i_1}, \quad \text{故对于折射光(透射光), 能流透射率为}$$

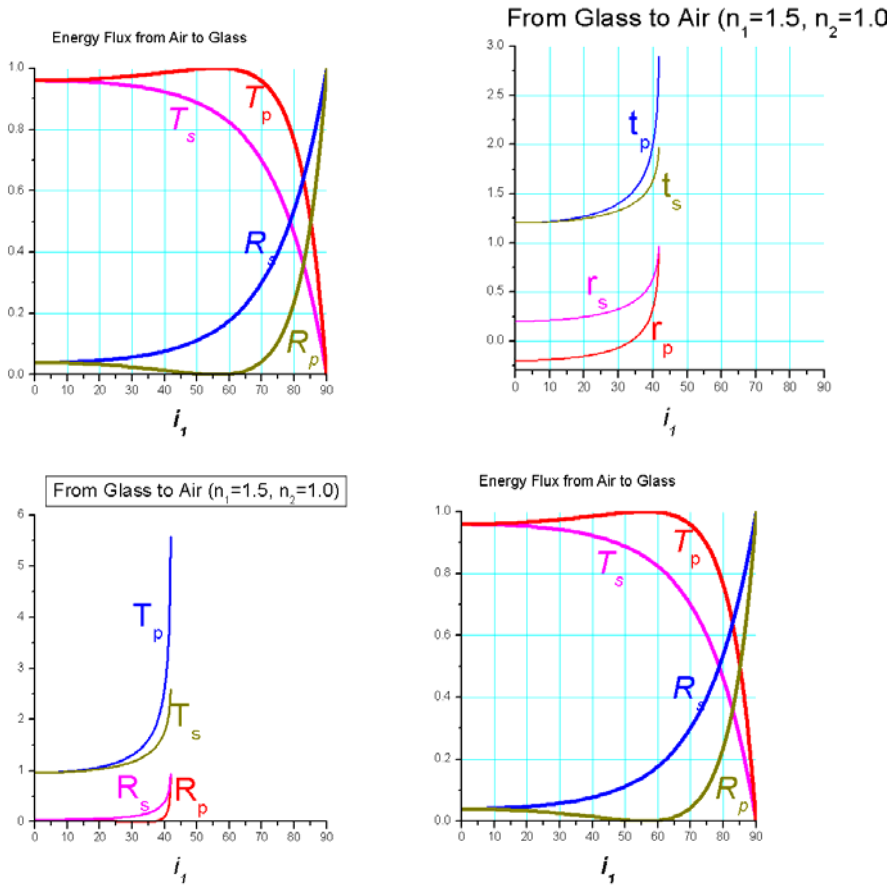
$$\frac{I_{s2} S_2}{I_{s1} S_1} = |t_{s2}|^2 \frac{\cos i_2}{\cos i_1} \quad (3.3.13)$$

$$\frac{I_{p2} S_2}{I_{p1} S_1} = |t_{p2}|^2 \frac{\cos i_2}{\cos i_1} \quad (3.3.14)$$



下面各图表示了在某些情况下反射率、透射率于入射角的关系。





3.3.4 位相关系

如果将Fresnel公式中的振动量用复振幅代替，则反射率、透射率即为反射波、透射波的复振幅与入射波的复振幅的比值，例如对于反射波的S分量，为

$$r_s = \frac{E'_{S1}}{E_{S1}} = \frac{A'_{S1} e^{i\varphi'_{S1}}}{A_{S1} e^{i\varphi_{S1}}} = \frac{A'_{S1}}{A_{S1}} e^{i(\varphi'_{S1} - \varphi_{S1})} = \frac{A'_{S1}}{A_{S1}} e^{i\Delta\varphi'_s} \quad (3.3.15)$$

反射波的相位比入射波滞后，按照本书前面的约定， $\varphi'_{S1} > \varphi_{S1}$ ，相位差

$\Delta\varphi'_s = \varphi'_{S1} - \varphi_{S1}$ 应为正值。对于两个复数的比值而言，其幅角便是相应两列波的位相差，即反射波、透射波与入射波间的相位关系为

$$\Delta\varphi(r) = \arg(r) \quad (3.3.16), \quad \Delta\varphi(t) = \arg(t) \quad (3.3.17)$$

从Fresnel公式可以看出，无论何种情况，透射率总是正实数，其幅角为0。说明折射光与入射光在入射、折射的瞬间位相是相同的，即没有因为折射而出现额

外的位相的突变。

但反射波的情况却较为复杂。一方面，反射率可以取正值、也有可能取负值，如果 $i_1 + i_2 = \pi/2$ ，则 $\tan(i_1 + i_2) = \infty$ ，还会出现 $r_p = 0$ ，另一方面，光从光密介质向光疏介质入射时，还会出现全反射。以下作具体讨论。

$$r_s = -\frac{\sin(i_1 - i_2)}{\sin(i_1 + i_2)} \begin{cases} > 0, \text{当 } n_1 > n_2 \text{ 时} \\ < 0, \text{当 } n_1 < n_2 \text{ 时} \end{cases}$$

$$r_p = \frac{\operatorname{tg}(i_1 - i_2)}{\operatorname{tg}(i_1 + i_2)} \begin{cases} > 0 \begin{cases} \text{当 } n_1 < n_2 \text{ \& } i_1 + i_2 < \frac{\pi}{2} \text{ 时} \\ \text{当 } n_1 > n_2 \text{ \& } i_1 + i_2 > \frac{\pi}{2} \text{ 时} \end{cases} \\ 0, \text{当 } i_1 + i_2 = \frac{\pi}{2} \text{ 时} \\ < 0 \begin{cases} \text{当 } n_1 < n_2 \text{ \& } i_1 + i_2 > \frac{\pi}{2} \text{ 时} \\ \text{当 } n_1 > n_2 \text{ \& } i_1 + i_2 < \frac{\pi}{2} \text{ 时} \end{cases} \end{cases}$$

$i_1 + i_2 = \frac{\pi}{2}$ ， $\operatorname{tg}(i_1 + i_2) \rightarrow \infty$ ， $r_p = 0$ ，反射光中只有S分量，这是一个特殊的入射角，称为 Brewster 角，记为 i_B 。当入射角 $i_1 = i_B$ 时，由折射定律

$$n_1 \sin i_B = n_2 \sin i_2 = n_2 \cos i_B, \text{ 即 } i_B = \operatorname{arctg} \frac{n_2}{n_1} \quad (3.3.18)。$$



当 $n_1 > n_2$ 时，会出现全反射，此时 $i_2 = \frac{\pi}{2}$ 时，可得 $i_1 = i_C = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$

(3.3.19)，是全反射临界角。 $i_C > i_B$ 。

反射波与入射波在反射瞬间的位相差可以用下表说明

介质情况	P分量	S分量	
$n_1 < n_2, i_1 < i_B$	0，位相不变	π ，位相反相	
$n_1 < n_2, i_1 > i_B$	π ，位相反相	π ，位相反相	
$n_1 > n_2, i_1 < i_B$	π ，位相反相	0，位相不变	
$i_B < i_1 < i_C$	0，位相不变	0，位相不变	
$i_1 > i_C$	$0 \sim \pi$	$0 \sim \pi$	

3.3.5 半波损失的解释

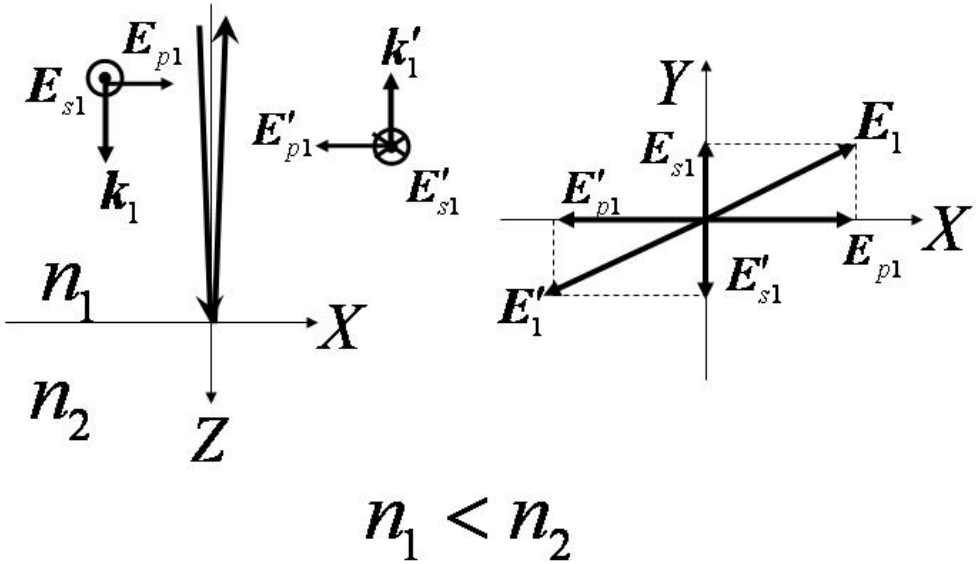
光波由光疏介质射向光密介质， $n_1 < n_2$

1. 掠入射

$i_1 - i_2 > 0$ ，且 $\frac{\pi}{2} < i_1 + i_2 < \pi$ ， $i_1, i_2 \approx \frac{\pi}{2}$ ，由 Fresnel 公式，可得

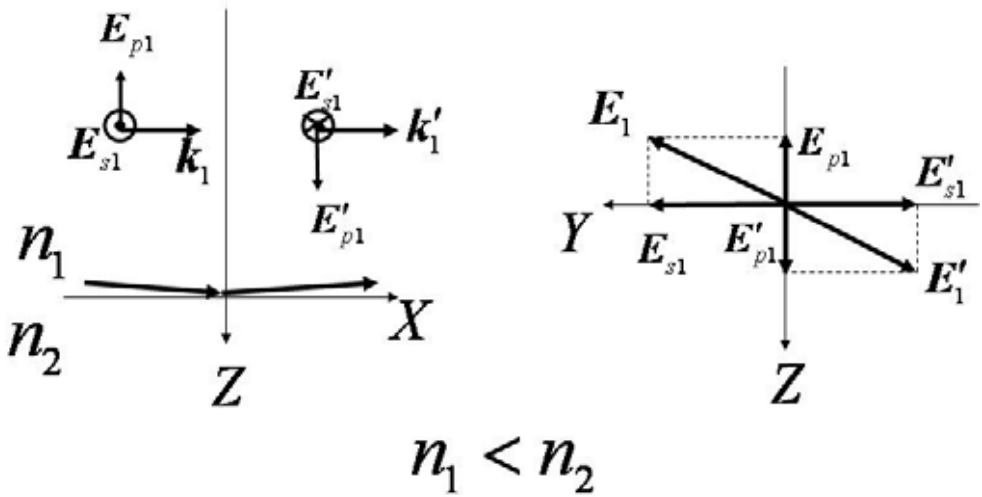
$$\frac{E'_{S1}}{E_{S1}} < 0, \frac{E'_{P1}}{E_{P1}} < 0, \text{ 且 } \frac{E'_{S1}}{E_{S1}} \approx \frac{E'_{P1}}{E_{P1}}, \text{ 即 } \frac{E'_{S1}}{E'_{P1}} = \frac{E_{S1}}{E_{P1}}, \text{ 反射光中, P, S 分}$$

量的方向均在反射瞬间反转。逆着 X 轴方向观察，可见振动方向反转。



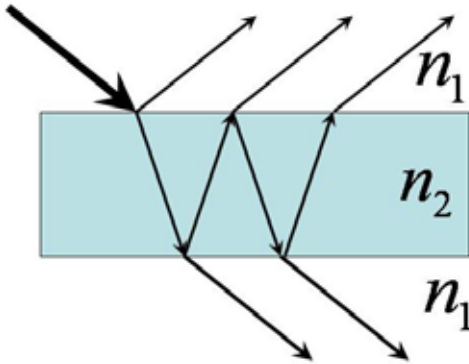
2. 垂直入射

$$i_1, i_2 \sim 0, \frac{E'_{S1}}{E_{S1}} < 0, \frac{E'_{P1}}{E_{P1}} > 0, \frac{E'_{S1}}{E_{S1}} \approx -\frac{E'_{P1}}{E_{P1}}, \text{ 即 } \frac{E'_{S1}}{E'_{P1}} = -\frac{E_{S1}}{E_{P1}}$$



反射光中的 S 分量在反射瞬间反转，P 分量也反转。沿 Z 轴方向观察，发现振动反转。

以上两种情况说明由于反射使得光的振动方向有突变，转到相反的方向，相当于光的位相突然有 π 的改变。对应到光程上，相当于有半个波长的突变。故称半波损失。



在薄膜反射和入射的情况，如果上下部分有相同的折射率，则第一列透射光不会出现半波损失，第二列透射光由于有两次相同的反射，总的效果不需要考虑半波损失；第一列反射光发生反射的条件与之后的第二列反射光的情况正相反，两者之间要计入半波损失；但第三列波、第四列波……的情况与第二列相似，都经过了偶数次相同的反射，因而它们之间不计半波损失。所以在考虑各个反射光间的光程差时，可以认为第一列波产生了半波损失，或者后面的所有波列都产生了半波损失。

3.3.6 Stocks 倒逆关系

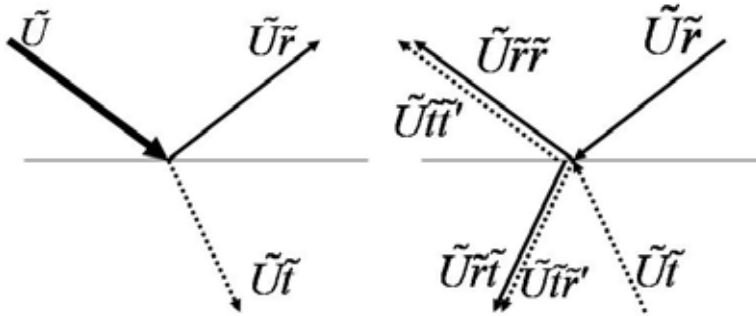
一列波在介质的分界面上，将分为反射和折射两部分。设界面对于复振幅的反射率和透射率分别为 \tilde{r} , \tilde{t} , 入射波复振幅为 \tilde{U} , 则反射波、透射波的复振幅为

$$\tilde{U}_r = \tilde{U}\tilde{r} , \tilde{U}_t = \tilde{U}\tilde{t}$$

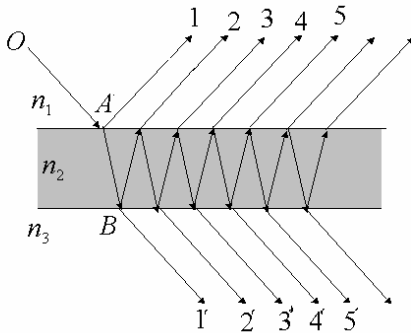
如果将上述情形反过来，即一列复振幅为 \tilde{U}_r 的波和一列复振幅为 \tilde{U}_t 的波分别沿着反射波和折射波的路径射过来，从光路可逆性原理，可以判断，总的效果应该是只有一列沿着原来入射路径的波列 \tilde{U} , 可以由公式表示为

$$\begin{cases} \tilde{U}r^2 + \tilde{U}_t \cdot \tilde{t}' = \tilde{U} \\ \tilde{U}\tilde{r} \cdot \tilde{t} + \tilde{U}_t \cdot \tilde{r}' = 0 \end{cases} , \text{即} \begin{cases} r^2 + \tilde{t} \cdot \tilde{t}' = 1 \\ \tilde{r} \cdot \tilde{t} + \tilde{t} \cdot \tilde{r}' = 0 \end{cases} \quad (3.3.20)$$

$$r = -r' , r^2 = r'^2 \quad (3.3.21) , \tilde{t} \cdot \tilde{t}' = 1 - r^2 \quad (3.3.22)$$



3.4 薄膜干涉

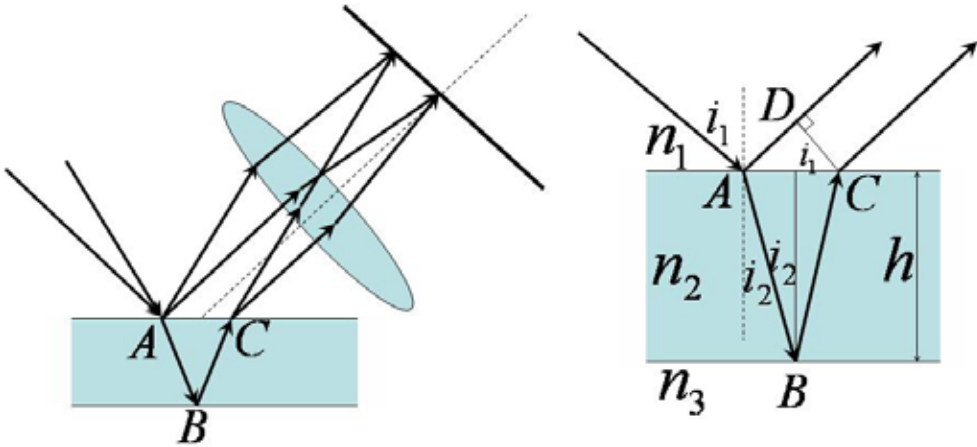


薄膜有上下两个界面，一般情况下，可设薄膜上部介质的折射率为 n_1 ，下部折射率为 n_3 ，而薄膜本身的折射率为 n_2 ，如图所示。一束光波，在薄膜的上表面处分为反射和折射两部分，折射部分在下表面有产生反射和折射，其中反射光到达上表面又有反射与折射，……在 n_1 介质中，就有 1, 2, …… 一系列光波，介质 n_3 中，也有一系列的透射波。由于这些光都是从同一列光分得的，所以是相干的；这些光是将原入射光的能量（振幅）分为几部分得到的，被称为分振幅的干涉。

从上表面反射的光，可以向任意方向传播，从薄膜内部透射出来的光，同样也可以向任意方向传播，所以在空间各处都可以产生干涉。采用不同的光路，可以在不同的区域观察光的干涉。

3.3.1 等倾干涉

在所有的反射光和透射光中，相互平行的光将汇聚在无穷远处，则它们的干涉也将在无穷远处发生。如果在薄膜上面置一凸透镜，在该透镜的焦平面处置一观察屏，则凡是在屏上能够相遇（即汇聚）而进行叠加的光，都是平行射向透镜的，或者说，这些进行干涉的光相对于透镜的光轴有相同的倾角，因而这种干涉被称作“等倾干涉”。



1. 干涉级

如图，在入射点 A，出现反射和折射，产生第一列反射波；折射进入薄膜的光波在下表面 B 处反射，又经过上表面 C 处射出，这是第二列反射波。如果过 C 点做一个与光束垂直的平面 CD，则 CD 上各点到汇聚点 P 是等光程的，因而这两列反射波在 P 点的光程差为 $n_2(\overline{AB} + \overline{BC}) - n_1 \overline{AD}$ ，而

$$\overline{AB} + \overline{BC} = 2h / \cos i_2, \quad \overline{AD} = \overline{AC} \sin i_1 = 2htg i_2 \sin i_1, \text{ 所以}$$

$$\begin{aligned} \delta &= 2h \left(\frac{n_2}{\cos i_2} - n_1 tg i_2 \sin i_1 \right) = \frac{2h}{\cos i_2} (n_2 - n_1 \sin^2 i_2) \\ &= \frac{2n_2 h}{\cos i_2} (1 - \sin^2 i_2) = 2n_2 h \cos i_2 = 2h \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i_1} \quad (3.3.1) \end{aligned}$$

这两列波之间要计入半波损失 $\lambda/2$ ，则

$$\delta' = 2n_2 h \cos i_2 \pm \lambda/2 = 2h \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i_1} \pm \lambda/2 \quad (3.3.2)$$

$$2h \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i_1} \text{ 或 } 2n_2 h \cos i_2 = (2j + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (3.3.3), \text{ 干涉相长；}$$

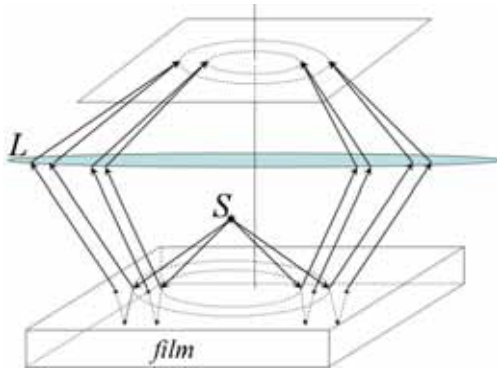
$$2h\sqrt{n^2_2 - n^2_1 \sin^2 i_1} \text{ 或 } 2n_2 h \cos i_2 = j\lambda, (3.3.4) \text{ 干涉相消。}$$

由上式可以看出，等倾干涉中，入射角相同，则光程差相同，对应同一干涉级，也就是同一级干涉条纹。

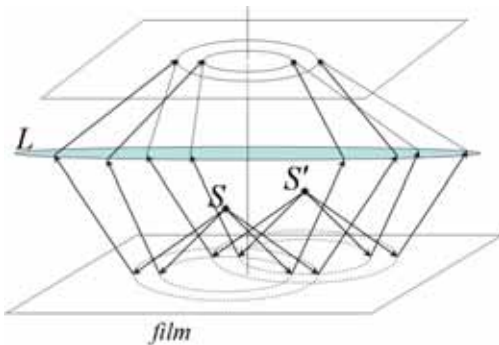
由于条纹的分布特征只与射向透镜的光的方向（倾角）有关。因而，由透镜的对称性，可以看出干涉条纹是一系列的同心圆环，在焦平面上为同心圆，也可以说定域于无穷远处。

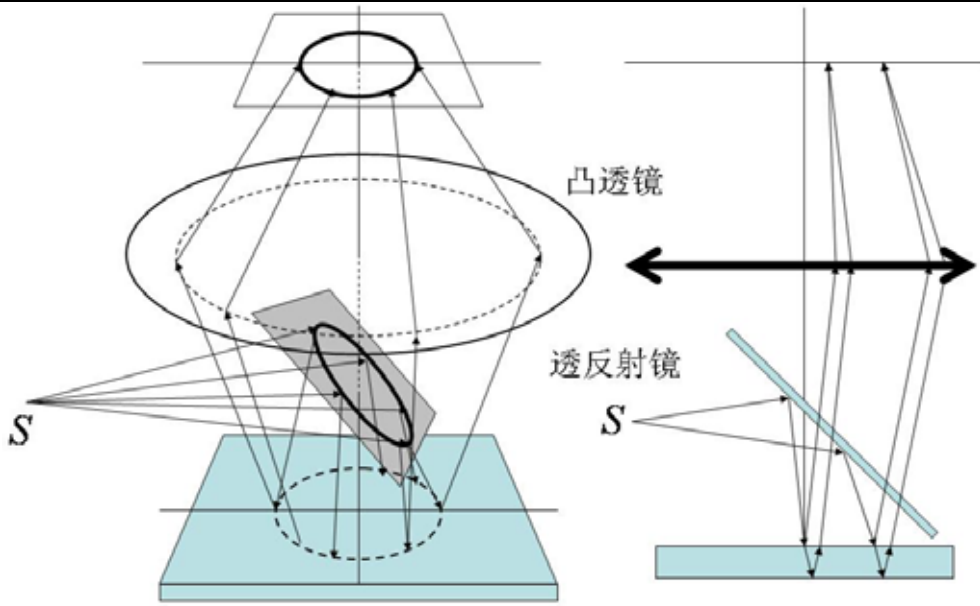
2. 干涉条纹与光源大小的关系

点光源：



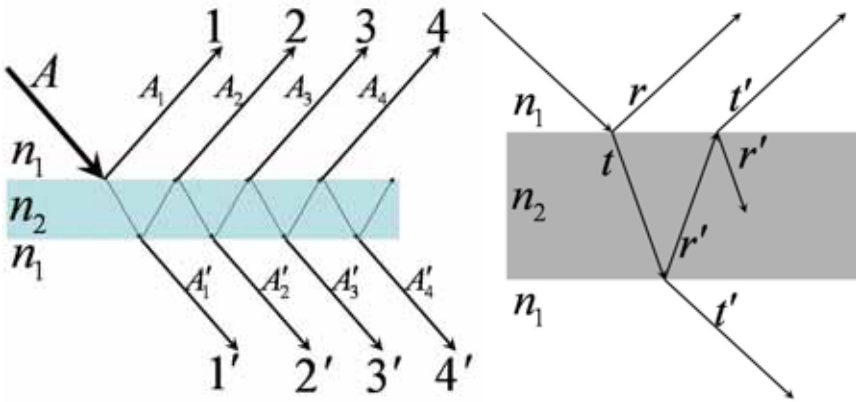
扩展光源：两个不同的发光点，发出球面波，其中凡是具有相同倾角的光，都将汇聚到屏上的同一点，而又具有相等的光程差，故干涉条纹的形态与只有一个点光源是一样的。那么，对于扩展光源，条纹的形态也与只有一个点光源相同。而且，由于扩展光源的强度比点光源大，所以，实际上使用的都是扩展光源，





等倾干涉的观察装置

3. 其它反射波、透射波间的干涉



薄膜的上表面，有不止两列反射波；同样，也有许多列透射波从薄膜的下表面射出，他们之间会有怎样的干涉呢？我们将进行如下的讨论。

射入射波的振幅为 A ，从上表面入射时，即从折射率为 n_1 向折射率为 n_2 的介质入射时，对振幅的反射率为 r ，透射率为 t ；而从薄膜的内部向上表面入射、即从折射率为 n_2 向折射率为 n_1 介质入射时，对振幅的反射率和透射率分别为 r' 和 t' ；在薄膜的下表面，从内向外入射时，即从折射率为 n_2 向折射率为 n_3 介质入

射时，对振幅的反射率和透射率分别为 r_2 和 t_2 。如图所示。一般情况下，往往有 $n_1 = n_3$ ，例如空气中的透明薄膜，则 $r' = r_2$ ， $t' = t_2$ 。由 Stocks 倒逆关系， $r' = -r$ ， $tt' = 1 - r^2$ 。将反射波依次记作 1、2、……；而透射光记作 1'、2'、……可以计算出各列反射波的振幅为

$$A_1 = Ar \quad (3.3.5)$$

$$A_2 = Atrt' = Artt' = Ar(1 - r^2)$$

$$A_3 = Ar^3tt' = Ar^3(1 - r^2)$$

$$A_4 = Ar^5(1 - r^2)$$

……

用通式表示， $n > 1$ 时，有 $A_n = Ar^{2n-3}(1 - r^2)$ (3.3.6)

而透射波的振幅为

$$A_1' = Att' = A(1 - r^2)$$

$$A_2' = Ar^2(1 - r^2)$$

$$A_3' = Ar^4(1 - r^2)$$

通式为 $A_n' = Ar^{2(n-1)}(1 - r^2)$ (3.3.7)

对透明介质， $r \ll 1$ ，很小；因而，反射波中 $A_1 \approx A_2 \gg A_3 \gg A_4 \gg \dots$ ；所以只有第一列和第二列反射波之间有显著的干涉，其它的波列，由于强度太小而对总的干涉效果无甚贡献，可以忽略。而透射波中， $A_1' \gg A_2' \gg A_3' \gg \dots$ ，因而不能产生有效的干涉效应，即透射光的干涉条纹可见度极小。因而，对于透明的薄膜，只需要考虑第 1、第 2 列反射光的干涉即可。

当然，如果薄膜的反射率较高，即 $r \approx 1$ ，则要计算所有的透射波间的干涉，对于反射波亦然。这一问题我们将在后面处理。

4. 等倾干涉条纹的特征

(1) 中央条纹

$$\text{亮条纹应满足 } 2h\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i_1} = (2j+1)\frac{\lambda}{2} \quad (3.3.7)$$

$$\text{或 } 2n_2 h \cos i_2 = (2j+1)\frac{\lambda}{2}. \quad (3.3.8)$$

中央条纹对应的角度 $i_1 = 0$, 即 $i_1 = i_2 = 0$, 垂直入射 , $\cos i_2 = 1$, j 取最大

值 , 即中央条纹的干涉级数最大 , 由 $n_2 h$ 决定。

(2) 薄膜厚度的影响

对同一 j , 当 h 增大时 , i_2 增大 , 相应地 , i_1 增大 , 即圆环膨胀 ; h 减小 , i_1 减小 , 圆环收缩。薄膜厚度对干涉

(3) 条纹间距

相邻两条纹间的角距离记作 Δi , 即 j 改变所引起的角度的改变量 , 因为

$$2nh \sin i_2 \Delta i_2 = -\lambda ,$$

$$\Delta i_2 = -\frac{\lambda}{2nh \sin i_2} \quad (3.3.9)$$

厚度 h 大 , 条纹的间隔小。即薄膜厚度增加时 , 条纹将变得比较密。

(4) 条纹角宽度

亮条纹并非一条几何上的亮线 , 而是有一定的强度分布的宽带。由于干涉条纹的强度分布公式为

$$I(i) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos \Delta \varphi$$

$$\text{而 } A_1 = Ar , A_2 = Atrt' = Artt' = Ar(1-r^2)$$

$$\Delta \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta' = \frac{4\pi}{\lambda} n_2 h \cos i_2 \pm \pi , \quad (3.3.10) \text{ 故有}$$

$$I(i) = Ar^2 [1 + (1-r^2)^2 + 2(1-r^2) \cos(\frac{4\pi}{\lambda} n_2 h \cos i_2)]$$

可以将两相邻暗纹间的角度差 (角距离) 作为亮条纹的角宽度 , 即

$$\text{由于 } 2n_2 h \cos i_2 = (2j+1)\frac{\lambda}{2} , 2n_2 h \cos(i_2 + \Delta i_2) = j\lambda$$

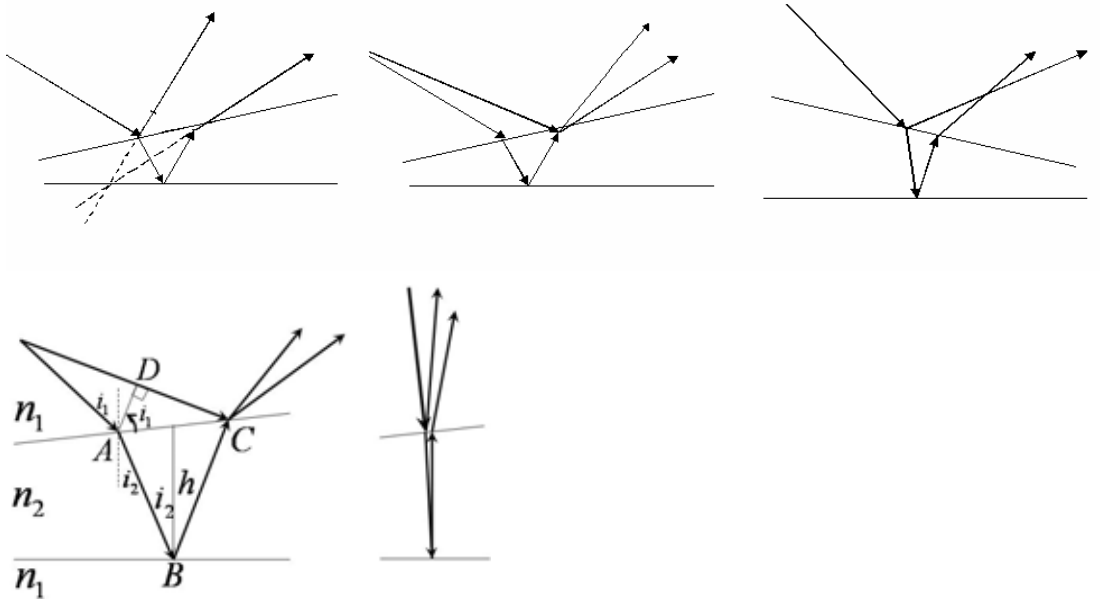
$$\text{故 } 2n_2 h \sin i_2 \Delta i_2 = \lambda / 2$$

$$\text{即 } \Delta i_2 = \lambda / 4n_2 h \sin i_2 \quad (3.3.11)$$

厚膜条纹较密集；同时，中心处，角度小， Δi_2 大，即条纹中心疏，周围密。

3.3.2 等厚干涉

如果薄膜上下两表面不平行，而是有一夹角 α ，如图所示。则在光波相交处均有干涉，整个空间都有干涉条纹，是非定域的。



如图，由于薄膜两表面的夹角往往很小，所以，两列反射波的光程差 $n_2(\overline{AB} + \overline{BC}) - n_1 \overline{DC}$ 的计算，可以直接引用等倾干涉的结果。则亮条纹的条件为

$$2h\sqrt{n^2_2 - n^2_1 \sin^2 i_1} \text{ 或 } 2n_2 h \cos i_2 = (2j + 1) \frac{\lambda}{2}, \text{ 干涉相长；}$$

暗条纹的条件为

$$2h\sqrt{n^2_2 - n^2_1 \sin^2 i_1} \text{ 或 } 2n_2 h \cos i_2 = j\lambda, \text{ 干涉相消。}$$

使入射垂直入射，则上表面的第 1、第 2 列反射波将重合，因而能进行相干叠加。如果仅仅观察薄膜上表面处的干涉，则两列波间的光程差为

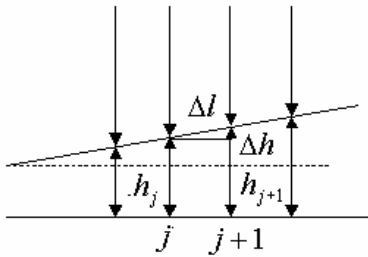
$2n_2 h$ ，如果计入半波损失则在薄膜的上表面，两列波的相位差为

$$\Delta\varphi = \frac{4\pi}{\lambda} n_2 h \pm \pi$$

则亮条纹出现的条件是 $2n_2h = (2j+1)\frac{\lambda}{2}$; (3.3.11)

暗条纹出现的条件是 $2n_2h = j\lambda$ 。 (3.3.12)

由于同一级(条)亮纹出现在包膜厚度相等的地方,因而这种干涉被称作“等厚干涉”,定域于薄膜上表面。



对于楔形薄膜,相邻两根亮条纹间的厚度差为 $\Delta h = \lambda/2n_2$ (3.3.13)。如果

楔角为 α ,在表面上,亮条纹的间距为 $\Delta l = \Delta h / \sin \alpha = \lambda/2n_2 \sin \alpha$ (3.3.14)

在尖端处,只有半波损失,反射光永远是暗纹。透射光是亮纹。

如果薄膜的上下表面都是平整的,等厚条纹应该是相互平行的等间隔直条纹,但实际上,我们看到的却往往是弯曲的弧形条纹,其原因可以用下图说明。观察者处于薄膜正上方时,进入其瞳孔的光的角度是不同的,中央部分的光沿竖直方向进入,而两侧的光只有倾斜才能进入。即,中央部分的光,其角度 $i_1 = 0$,条

纹满足 $2n_2h = (2j+1)\frac{\lambda}{2}$; 两侧的光,由于 $i_1 \neq 0$,所以应该采用公式

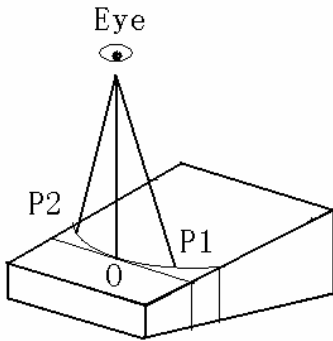
$2n_2h \cos i_2 = (2j+1)\frac{\lambda}{2}$, 由于 $i_2 \neq 0$, $\cos i_2 < 1$,对于同一干涉级, $(2j+1)\frac{\lambda}{2}$

是不变的,而中央部分, $2n_2h = (2j+1)\frac{\lambda}{2}$,那么在两侧同一厚度的光,则

$2n_2h \cos i_2 < (2j+1)\frac{\lambda}{2}$,不满足亮条纹出现的条件,只有在膜增加一定厚度的地

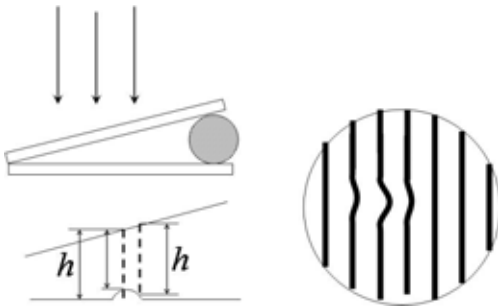
方,才有 $2n_2(h + \Delta h) \cos i_2 = (2j+1)\frac{\lambda}{2}$,而且,越靠边, i_2 越大, Δh 就越大,

所以,看到的条纹是向膜厚的地方弯曲。



P1, P2 点入射角比中央 O 点大, 故 h 必须增才能使得满足干涉相长条件, 故条纹向厚的一端弯曲。

可用于检测表面平整, 确定凸凹。



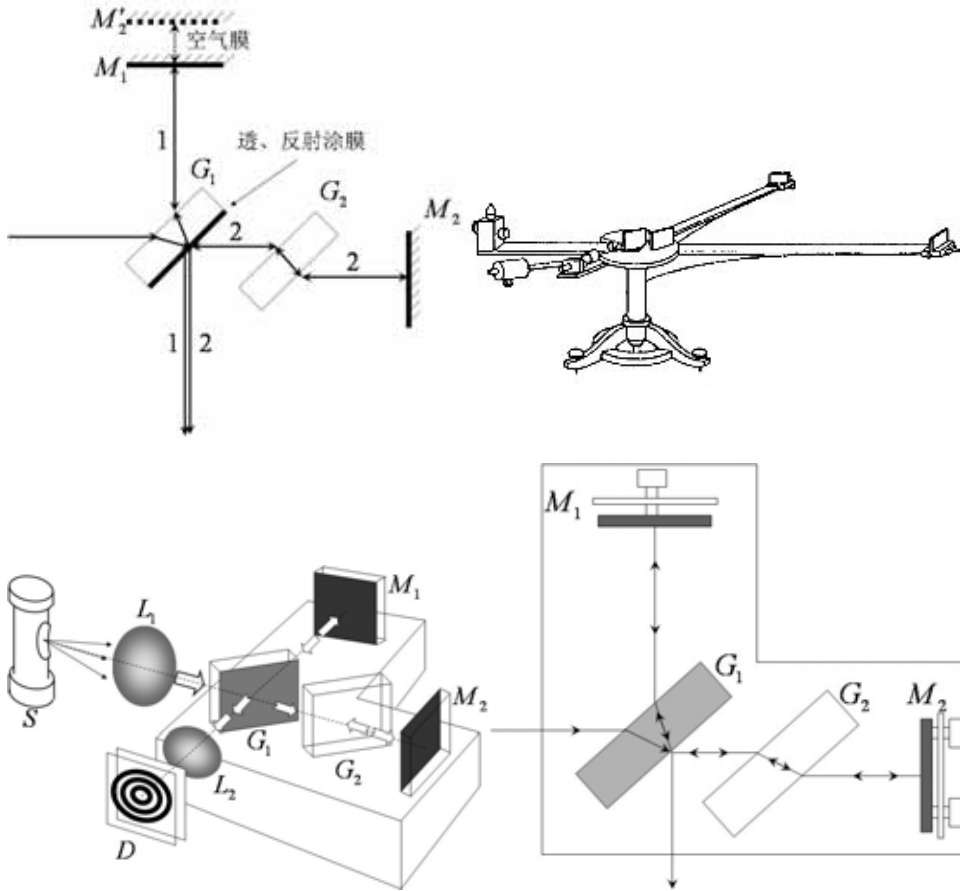
如图, 如果观察到如右图所示弯曲的干涉纹, 则可判断待测表面的中央部分有一凸起, 理由如下;

直纹说明表面是平整的, 设此处厚度为 h , 若中央有一凸起, 则厚度小于 h , 不满足亮纹的条件, 而同级亮纹只能出现在厚度为 h 的地方, 向右端移动一段距离, 则会有厚度恰等于 h 的地方, 则亮纹在这里出现, 这一部分的条纹因而向楔形的后部弯曲。条纹弯曲的区域对应于凸起的区域, 而条纹弯曲的程度对应于凸起的高度。

3.5 分振幅的干涉装置

3.5.1 Michelson 干涉仪

1、干涉仪的结构与原理



G_1 ：分光板， G_2 ：补偿板。 G_1 与 M_1 ， M_2 成 45° 角。入射波在分光板的涂膜处分为两部分，分别射向 M_1 、 M_2 。被 M_1 ， M_2 反射后，沿原路返回到分光板的涂膜上。由 M_1 反射的波透过涂膜，在图中记为1；而由 M_2 反射的波被涂膜反射，在图中记为2。1、2两列波进行相干叠加，产生干涉条纹。补偿板与分光板有相同的材料制成，形状也完全一样，只是没有涂膜。则1、2两列波都各自经涂膜透射一次、经玻璃板透射三次、被反光镜反射一次，只是在空气中经过的路程不同，因而光程差就是由于两反射镜到涂膜层的距离不同而造成的。经过由于两列光波所经过的路径上，在分光板处，以及两反射镜处，均有相同的反射，所以半波损失的情况相同。

M_2 相对于涂膜有一个镜像 M_2' ，光波2相当于从 M_2' 反射过来的，而 M_2' 与 M_1 构成了一个空气膜，所以 Michelson 干涉仪就相当于空气膜的干涉。两列波的光程差就是 M_2' 与 M_1 间距的2倍。 M_1 与 M_2' 间或平行、或不平行，就能产生等

倾或等厚干涉此时，由于 $n_1 = n_2$ ， $i_1 = i_2$ ，所以亮条纹产生的条件为

$$2h \cos i = j\lambda \quad (3.3.14)$$

用于精确测量长度。

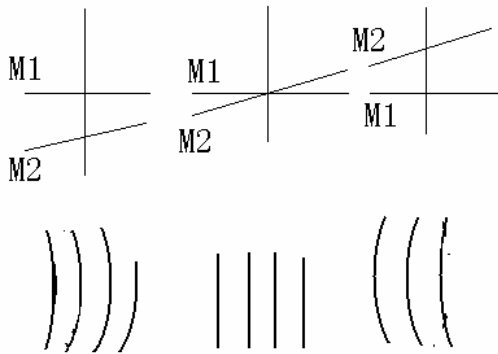
2. 条纹的形状

(1) $M_1 // M_2'$ ，即 $M_1 \perp M_2$ ，为等倾干涉

同心圆环，圆心在视场中央。

(2) M_1 不平行于 M_2' ，为等厚干涉。此时，看以看到下图所示的干涉条纹，条

纹的形状与 M_1 、 M_2' 间的距离有关。



3. 傅里叶变换光谱仪

在 Michelson 干涉仪中，可以让进行干涉的两束光的强度相等，即它们的振幅相等，记为 $A(k)$ ，如果此时两列波的光程差位 δ ，则它们的干涉强度可表示为

$$I(k) = 2A^2(k)[1 + \cos \Delta\varphi(k)] = 2A^2(k)[1 + \cos(k\delta)]$$

而仪器接收到的光强为各种波长的强度之和，即

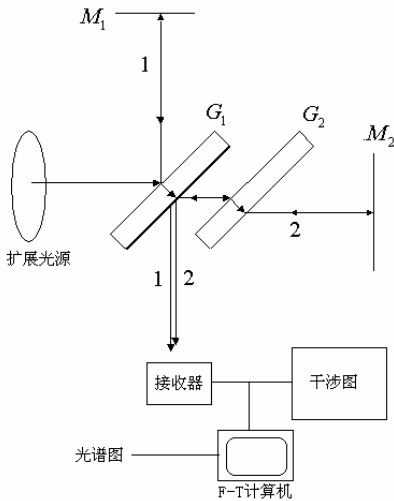
$$\begin{aligned} I(\delta) &= \int_0^\infty I(k) dk = \int_0^\infty 2A^2(k)[1 + \cos(k\delta)] dk \\ &= \int_0^\infty 2A^2(k) dk + \int_0^\infty 2A^2(k) \cos(k\delta) dk = I_0 + \int_0^\infty 2A^2(k) \cos(k\delta) dk \end{aligned}$$

$$= I_0 + \int_0^\infty i(k) \cos(k\delta) dk, \text{ 即有 } \int_0^\infty i(k) \cos(k\delta) dk = I(\delta) - I_0$$

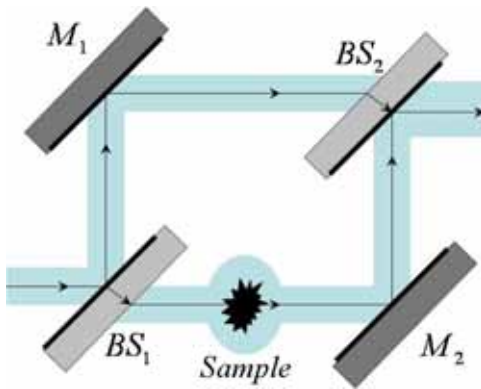
I_0 与波长无关，是光程差为零时的光强；而后面的积分是一个傅里叶余弦变换的表达式。其逆变换为

$$i(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty [I(\delta) - I_0] \cos k\delta d\delta \quad (3.3.15)$$

在 Michelson 干涉仪中，光程差 δ 即为两反光镜之间距离的两倍，即 $2h$ ，所以，只要在一系列不同的位置上记录到衍射光强，即可通过傅里叶变换得到光源的光谱分布。由此可以得到光源的光谱分布 $i(k)$ 或 $i(\lambda)$ 。



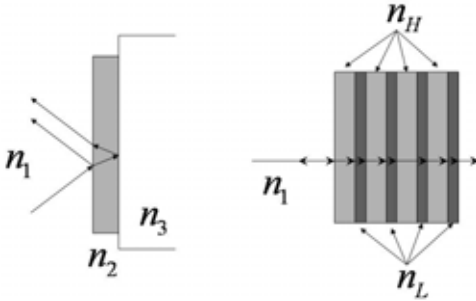
3.5.2 马赫——曾特干涉仪



如图，采用两个反射镜 M_1 、 M_2 ，以及两个分束镜 BS_1 、 BS_2 可以组成一

种分振幅的反射装置，称作马赫——曾特干涉仪。在其中的一条光路中，可以置入样品，如受力的透明介质、气体或则等离子体等，则可以通过测量干涉条纹的变化获得样品的信息。该装置近年来更是被用于量子密钥通信。

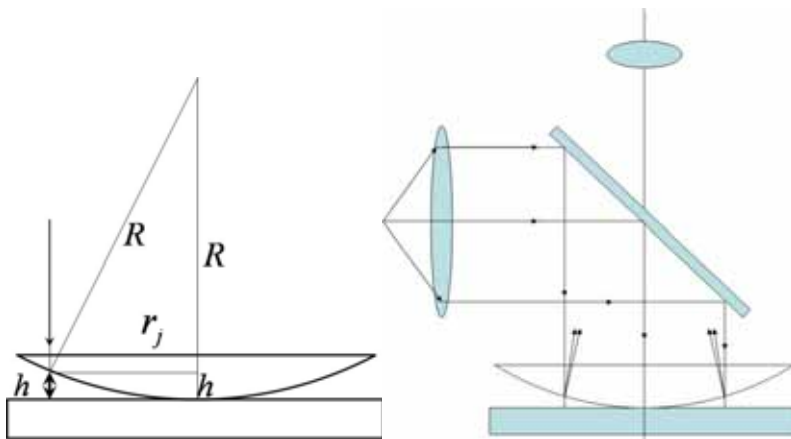
3.5.3 干涉滤波片



利用薄膜干涉相长或干涉相消原理，可以对某些波长增透或增反。如在玻璃板上镀一层薄膜，则入射光中满足干涉相长的波长被反射，其它的波长则由于干涉而减弱，可以只让特定波长的光被反射，起到滤光的作用。也可以在光学仪器的镜头表面镀（涂）膜，使得透射光由于干涉而得到增强。现在使用的照相机、望远镜、显微镜，由于都采用了较复杂的透镜组，透镜较多，每个透镜的表面都会反射一部分光，因而造成的光能量损失比较严重。在每一个镜头的表面镀上增透膜，可以大大降低入射光能量的损失。

由于仅有一层增透或增反膜还不能充分起作用，所以，现在往往采用多层膜。将光学常数（折射率）不同的材料按一定的次序和厚度镀在镜头表面，其效果比仅有一层薄膜要好得多。

3.5.4 牛顿环（圈）



在一玻璃平板上放一平凸透镜，则两者之间就形成了一层空气薄膜。从上方

垂直入射的光，由于分别被空气膜的上下两个表面反射，于是就产生了干涉。在空气膜的上表面或下表面观察，由于空气膜的形状取决于透镜球面的形状，这是一种等厚干涉装置。可以判断，干涉条纹的形状是一系列的同心圆环。这些圆环被称作牛顿环。

观察反射光在空气膜上表面的干涉，一列在球面（玻璃—空气界面）被反射，没有半波损失；而另一列在平面（空气玻璃界面）被反射，有半波损失。于是亮条纹产生的条件为

$$\delta = 2h \pm \lambda/2 = j\lambda, \text{ 即 } 2h = j\lambda \pm \lambda/2$$

设球面半径为 R ，在空气膜厚度为 h 处干涉条纹的半径为 r ，则有

$$h(2R-h) = r^2, \quad 2Rh - h^2 = r^2$$

由于 $R \gg h$ ， $h = r^2/2R$

$$\text{Newton Ring 半径为 } r_j = \sqrt{(j+1/2)\lambda R} \quad j=0,1,2,\dots \quad (3.3.16)$$

对于透射光在空气膜下表面的干涉，一列直接透过，另一列在平面和球面间反射后透过，由于两次反射，无半波损失。

$$\delta = 2h = j\lambda$$

$$\text{Newton Ring 半径 } r_j = \sqrt{j\lambda R} \quad j=0, 1, 2, 3,\dots \quad (3.3.17)$$

可测球面透镜曲率半径 R 。

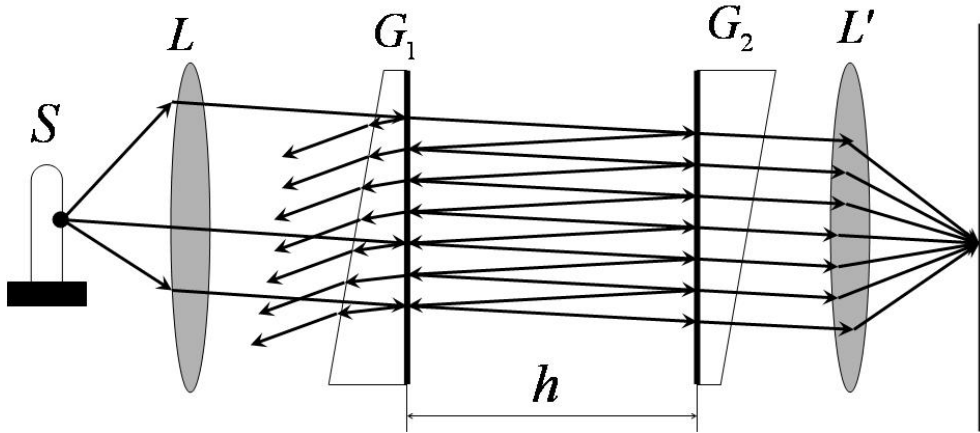
3.6 多光束干涉——Fabry-Perot 干涉仪

3.6.1 干涉装置

在薄膜干涉装置中，如果膜的两个表面对光的反射率很高，则各列反射光的强度相差不是很大，这时，除了第 1、第 2 列之外，其它的反射波列对干涉的贡献就不可忽略；同样，所有的透射波列之见，也会产生明显的干涉。因而，在这种情况下，就必须计算多光束的干涉。

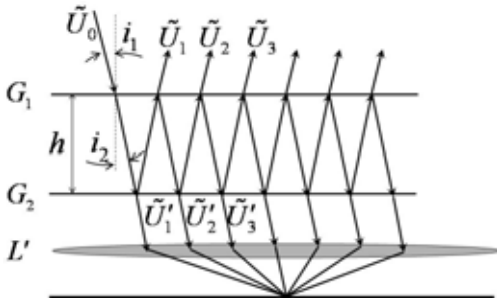
实用的多光束干涉装置通常如图所示。其中 G_1 、 G_2 是两块用光学玻璃或石英晶体制成的直角梯形，相对的两个表面彼此严格平行，并镀有高反射率薄膜。这样，在其中就形成了一个具有高反射率表面的平行空气薄膜。经过准直的平行光从一端射入，在另一端就可以得到相干的平行波列。这种装置称作 Fabry-Perot

干涉仪。干涉仪中，两反射面 G_1 、 G_2 的间距是可以进行精确地调整的。如果 G_1 、 G_2 的间距是固定不变的，则被称作 Fabry-Perot 标准具，用来对长度进行精确的标定。



3.6.2 光强分布

等倾干涉，条纹为同心圆环。各列反射光和透射光的振幅为



$$A_1 = Ar$$

$$A_2 = Atrt' = Artt' = Ar(1-r^2)$$

$$A_3 = Ar^3tt' = Ar^3(1-r^2)$$

$$A_4 = Ar^5(1-r^2)$$

.....

用通式表示， $n > 1$ 时，有 $A_n = Ar^{2n-3}(1-r^2)$

$$A_1' = Att' = A(1-r^2)$$

$$A_2' = Ar^2(1-r^2)$$

$$A_3' = Ar^4(1-r^2)$$

通式为 $A_n' = Ar^{2(n-1)}(1-r^2)$

除第一列反射光要计入额外光程 ($\pm \frac{\lambda}{2}$) 外，其余相邻两列反射光间有相同光程差，相邻两列透射光也有相同光程差和位相差，为

$$\delta = 2h\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i_1}, \quad (3.3.18) \quad \text{相位差为 } \Delta\varphi = k\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\delta \quad (3.3.19)$$

设在入射点处的位相为 φ_0 ，则第一列反射光的位相为 $\varphi_0 + \pi$ ，第 n 列反射光的位相为 $\varphi_0 + (n-1)\Delta\varphi$ ，即有

$$\tilde{U}_1 = A_1 e^{i(\varphi_0 + \pi)} = A r e^{i(\varphi_0 + \pi)} = A \rho^{1/2} e^{i(\varphi_0 + \pi)} \quad (3.3.20)$$

其中， $\rho = |r|^2 = |r'|^2$ ，为对光强的反射率。

$$\tilde{U}_n = A r^{2n-3} (1-r^2) e^{i[\varphi_0 + (n-1)\Delta\varphi]} = A \rho^{n-3/2} (1-\rho) e^{i[\varphi_0 + (n-1)\Delta\varphi]} \quad (3.3.21)$$

相干叠加

$$\begin{aligned} \tilde{U}_R &= A \rho^{1/2} e^{i(\varphi_0 + \pi)} + \sum_{n=2}^N A \rho^{n-3/2} (1-\rho) e^{i[\varphi_0 + (n-1)\Delta\varphi]} \\ &= -A \rho^{1/2} e^{i\varphi_0} + A \rho^{-1/2} (1-\rho) e^{i\varphi_0} \sum_{n=2}^N \rho^{n-1} e^{i(n-1)\Delta\varphi} \\ &= -A \rho^{1/2} e^{i\varphi_0} + A \rho^{-1/2} (1-\rho) e^{i\varphi_0} \sum_{n=1}^{N-1} \rho^n e^{in\Delta\varphi} \\ &= -A \rho^{1/2} e^{i\varphi_0} + A \rho^{-1/2} (1-\rho) e^{i\varphi_0} \frac{\rho e^{i\Delta\varphi} [1 - \rho^{N-1} e^{i(N-1)\Delta\varphi}]}{1 - \rho e^{i\Delta\varphi}} \end{aligned}$$

$$\stackrel{N \rightarrow \infty}{=} A\rho^{1/2} e^{i\varphi_0} \left[-1 + \frac{(1-\rho)e^{i\Delta\varphi}}{1-\rho e^{i\Delta\varphi}} \right] = A\rho^{1/2} e^{i\varphi_0} \left(\frac{-1+e^{i\Delta\varphi}}{1-\rho e^{i\Delta\varphi}} \right)$$

$$I_R = \tilde{U}_R \tilde{U}_R^* = A^2 \rho^2 \left(\frac{-1+e^{i\Delta\varphi}}{1-\rho e^{i\Delta\varphi}} \right) \left(\frac{-1+e^{-i\Delta\varphi}}{1-\rho e^{-i\Delta\varphi}} \right)$$

$$= A^2 \rho^2 \frac{1 - e^{i\Delta\varphi} - e^{-i\Delta\varphi} + 1}{1 - \rho(e^{i\Delta\varphi} - e^{-i\Delta\varphi}) + \rho^2} = \frac{2A^2 \rho(1 - \cos \Delta\varphi)}{1 - 2\rho \cos \Delta\varphi + \rho^2}$$

$$\text{而 } 1 - \cos \Delta\varphi = 1 - 1 + 2 \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2} = 2 \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2}$$

$$1 - 2\rho \cos \Delta\varphi + \rho^2 = (1 - \rho)^2 + 2\rho - 2\rho \cos \Delta\varphi$$

$$= (1 - \rho)^2 + 2\rho \left(1 - 1 + 2 \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2} \right) = (1 - \rho)^2 + 4\rho \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2}$$

$$\text{所以 } I_R = I_0 \frac{4\rho \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2}}{(1 - \rho)^2 + 4\rho \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2}} = \frac{I_0}{1 + \frac{(1 - \rho)^2}{4\rho \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2}}} \quad (3.3.22)$$

对于透射光，振幅可表示为

$$A'_n = A r^{2(n-1)} (1 - r^2) = A(1 - r^2) r^{-2} r^{2n} = A_0 \rho^{n-1}$$

$A_0 = A(1 - r^2)$ ， $\rho = r^2$ 对光强的反射率。

第 n 列透射光的复振幅为 $\tilde{U}'_n = A_0 \rho^{n-1} e^{i[\varphi_0 + (n-1)\Delta\varphi]}$ ，其中 φ'_0 为第一列透射波

的位相。

相干叠加

$$\tilde{U}_T = \sum_{n=1}^N A_0 \rho^{n-1} e^{i[\varphi'_0 + (n-1)\Delta\varphi]} = A_0 \rho e^{i\varphi'_0} \sum_{n=0}^{N-1} \rho^n e^{in\Delta\varphi}$$

$$= A_0 e^{i\varphi'_0} \frac{1 - \rho^N e^{iN\Delta\varphi}}{1 - \rho e^{i\Delta\varphi}}, \text{ 当 } N \rightarrow \infty \text{ 时,}$$

$$\tilde{U}_T = \frac{A_0 e^{i\varphi_0'}}{1 - \rho e^{i\Delta\varphi}}$$

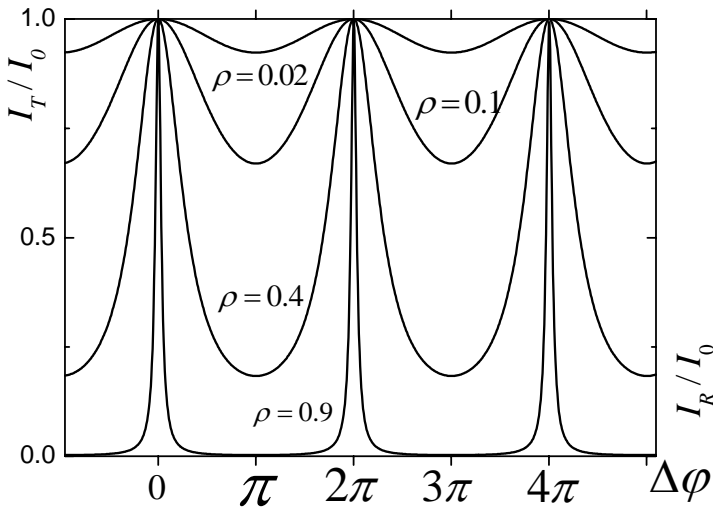
透射光强

$$I_T = \tilde{U}\tilde{U}^* = \frac{A_0^2}{(1 - \rho e^{i\Delta\varphi})(1 - \rho e^{-i\Delta\varphi})}$$

$$= \frac{A_0^2}{1 - \rho e^{i\Delta\varphi} - \rho e^{-i\Delta\varphi} + \rho^2} = \frac{A_0^2}{1 - 2\rho \cos \Delta\varphi + \rho^2}$$

而 $A_0^2 = A^2(1 - \rho)^2 = I_0(1 - \rho)^2$

$$I_T = \frac{I_0}{1 + \frac{2}{(1 - \rho)^2} 4\rho \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2}} \quad (3.3.23)$$



反射光 $I_R = I_0 - I_T = \frac{I_0}{1 + \frac{(1 - \rho)^2}{4\rho \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2}}}$

在不同的反射率下，所得到的透射光强分布如图所示。将该图反过来，就是

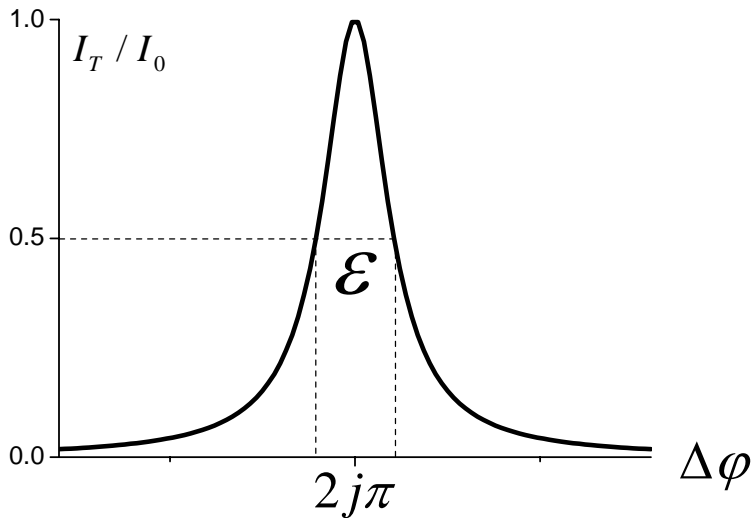
反射光的强度分布。可以看出，当反射率较高时，透射光是一系列明亮细锐的同心圆环，而反射光的亮环较宽，暗环细锐。反射、透射的干涉花样是互补的。

3.6.3 光波场特性

为了衡量干涉条纹的细锐程度，通常采用半值宽度这一参量。

半值宽度：光强降为峰值一半时峰的宽度。如图所示。即在峰值 $2j$ 附近，

当 $\Delta\varphi$ 的数值改变 $\pm\varepsilon/2$ 时， $I_T/I_0=1/2$ ，可得

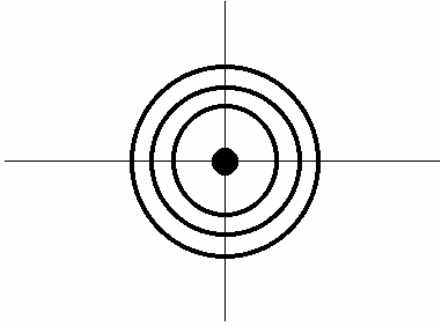


$$\frac{4\rho \sin^2 \frac{2j\pi \pm \varepsilon}{2}}{(1-\rho)^2} = 1, \text{ 而}$$

$$\frac{4\rho \sin^2 \frac{\varepsilon}{4}}{(1-\rho)^2} \approx \frac{4\rho \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^2}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho \varepsilon^2}{4(1-\rho)^2} = 1,$$

得到 $\varepsilon = \frac{2(1-\rho)}{\sqrt{\rho}}$ 。(3.3.24)

ρ 越大， ε 越小，条纹越锐。



1、 条纹角分布

$$\Delta\varphi_j = \frac{2\pi}{\lambda} \delta = 4\pi n_2 h \cos i_2 / \lambda, \quad d(\Delta\varphi_j) = -\frac{4\pi n_2 h \sin i_2}{\lambda} di_2$$

当 $d(\Delta\varphi_j) = \varepsilon$ 时, $di_2 = \Delta i_j$, 条纹半角宽度

$$\Delta i_j = \frac{\lambda \varepsilon}{4\pi n_2 h \sin i_2} = \frac{\lambda}{2\pi n_2 h \sin i_2} \frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}}$$

ρ 大, h 长, Δi 小, 条纹锐。中央条纹宽, 周围细锐。

而普通的薄膜干涉, 即双光束干涉时, $\Delta i_2 = \lambda / 4n_2 h \sin i_2$, 可见 F—P 条纹锐得多。即出射的条纹发散角很小。保证了激光的平行性。

2、 频率 (波长) 分布只有特殊的波长满足极大条件, 即,

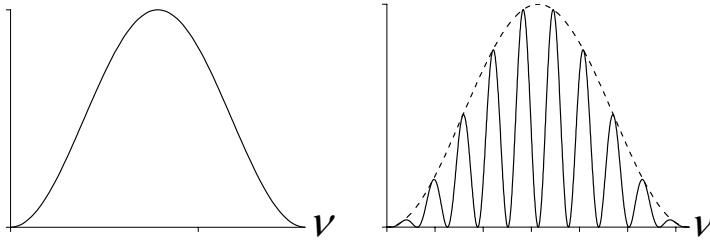
$$\lambda_j = \frac{1}{j} 2n_2 h \cos i_2$$

在 λ_j 附近, 虽经干涉, 并未全部相消, 设可见的波长范围为 $\Delta\lambda_j$, 则有

$$d(\Delta\varphi_j) = -(4\pi n_2 h \cos i_2 / \lambda^2_j) d\lambda_j = \varepsilon, \quad \text{可得}$$

$$\Delta\lambda_j = \frac{\lambda^2}{2\pi n_2 h \cos i_2} \frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}} = \frac{\lambda}{j\pi} \frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}}$$

h 大, ρ 大时, Δi_2 小。可用于选模。保证了激光的单色性。

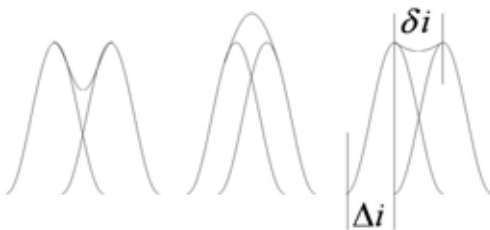
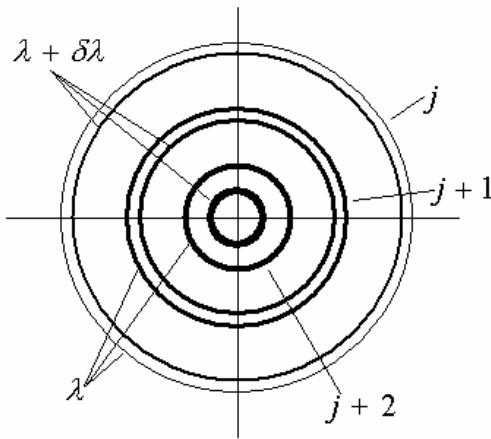


3、 光谱的精细结构分析

$$2nh \cos i_j = j\lambda, \quad 2nh \cos(i_j + \delta i) = j(\lambda + \delta\lambda)$$

$$-2nh \sin i_j di_j = jd\lambda, \quad \text{即 } \delta i = \frac{j}{2nh \sin i_j} \delta\lambda$$

为波长差为 $\delta\lambda$ 的同一级亮条纹的角距离。与薄膜干涉相同，但由于条纹锐得多，所以靠得很近的条纹也可以分辨清楚。



当 $\delta i = \Delta i$ 时，即相邻两条纹的角距离等于每一个条纹的半角宽度时，为可以分辨的极限。此为 **Taylor 判据**。

$$\delta i = \frac{j}{2nh \sin i_j} \delta \lambda \quad , \quad \Delta i = \frac{\lambda}{2\pi n_2 h \sin i_2} \frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}} \quad , \quad \delta i \geq \Delta i \quad , \quad \text{因而}$$

$$\frac{j}{2nh \sin i_j} \delta \lambda \geq \frac{\lambda}{2\pi n_2 h \sin i_2} \frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}} \quad , \quad \text{即 } \delta \lambda \geq \frac{\lambda}{j\pi} \frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}}$$

可分辨最小波长间隔

$$\delta \lambda = \frac{\lambda}{j\pi} \frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}} \quad ,$$

色分辨本领，即波长分辨本领为

$$A = \frac{\lambda}{\delta \lambda} = \frac{\sqrt{\rho}}{1-\rho} j\pi$$