文章编号:2095-6134(2019)01-0011-04

一类带 Hardy-Sobolev 临界指数的 Kirchhoff 型方程正解的存在性*

李红英[1†],廖家锋[1,2]

(1 西华师范大学数学与信息学院, 四川 南充 637002; 2 遵义师范学院数学学院,贵州 遵义 563006)

(2017 年 5 月 8 日收稿; 2017 年 11 月 16 日收修改稿)

Li H Y, Liao J F. Existence of positive solutions for a class of Kirchhoff-type equations with critical Hardy-Sobolev exponent[J]. Journal of University of Chinese Academy of Sciences, 2019,36(1):11-14.

摘　要　研究一类带 Hardy-Sobolev 临界指数的 Kirchhoff 型方程

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)\Delta u = \dfrac{u^{5-2s}}{|x|^s}+\lambda u^q, & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}$$

其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 是一个有界开区域且边界 $\partial\Omega$ 光滑,$0\in\Omega$, $a,b\geqslant 0$ 且 $a+b>0$, $\lambda>0,0<q<1,0\leqslant s<1$。利用变分方法, 获得该问题正解的存在性结果。

关键词　Kirchhoff 型方程;Hardy-Sobolev 临界指数;正解;变分法

中图分类号:O175.25　　**文献标志码:**A　　**doi:**10.7523/j.issn.2095-6134.2019.01.003

Existence of positive solutions for a class of Kirchhoff-type equations with critical Hardy-Sobolev exponent

LI Hongying[1], LIAO Jiafeng[1,2]

(1 *School of Mathematics and Information*, *China West Normal University*, *Nanchong* 637002, *Sichuan*, *China*;
2 *School of Mathematics*, *Zunyi Normal College*, *Zunyi* 563006, *Guizhou*, *China*)

Abstract　The Kirchhoff-type equation with critical Hardy-Sobolev exponent is considered,

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)\Delta u = \dfrac{u^{5-2s}}{|x|^s}+\lambda u^q, & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}$$

where $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ is an open bounded domain with smooth boundary $\partial\Omega$, $0\in\Omega$, $a,b\geqslant 0$ and $a+b>0$, $\lambda>0,0<q<1,0\leqslant s<1$. The existence of its positive solutions is proved by using the variational methods.

Keywords　Kirchhoff-type equation; critical Hardy-Sobolev exponent; positive solutions; variational method

---

* 西华师范大学英才科研基金(17YC383)、贵州省教育厅创新群体重大项目(黔教合 KY[2016]046)、贵州省科技厅联合基金(黔科合 LH 字[2016]7033)和西华师范大学科研启动基金(18D052)资助

† 通信作者,E-mail:lihongyingnch@163.com

考虑如下带 Hardy-Sobolev 临界指数的 Kirchhoff 型方程

$$\begin{cases}-\left(a+b\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u=\dfrac{u^{5-2s}}{|x|^s}+\lambda u^q, & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{1}$$

其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 是一个有界开区域且边界 $\partial\Omega$ 光滑，$0\in\Omega, a,b\geqslant 0$ 且 $a+b>0, \lambda>0, 0<q<1, 0\leqslant s<1$。$6-2s$ 是 Hardy-Sobolev 临界指数。

2012 年，Liu 和 Sun[1] 研究如下问题

$$\begin{cases}-\left(a+b\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u=u^q+\lambda\dfrac{u^{p-1}}{|x|^s}, & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{2}$$

其中：$4<p<6-2s, 0<q<1, a,b,\lambda>0$。当 $\lambda>0$ 充分小时，结合变分方法和 Nehari 方法，他们获得问题(2)的 2 个正解的存在性。随后，他们继续研究问题(2)，当 $-1<q<0$ 时，结合变分方法和 Nehari 方法也获得 2 个正解，详见文献[2]。文献[3]研究一类奇异非线性 Kirchhoff 型问题，结合 Ekeland 变分原理和一些分析技巧，获得正解的存在唯一性结果。

一个自然的问题：问题(1)是否也存在正解？事实上，当 $s=0$ 时，Sun 和 Liu 在文献[4]中获得问题(1)正解的存在性，并提出一个公开问题：如何证明第 2 个正解的存在性？据查阅文献所知，这个开问题至今尚未解决。本文利用变分方法获得问题(1)的一个正局部极小解。在一定程度上，推广文献[1,4]的结果。

问题(1)对应的能量泛函为

$$I(u)=\frac{a}{2}\|u\|^2+\frac{b}{4}\|u\|^4-\frac{1}{6-2s}\int_\Omega\frac{|u|^{6-2s}}{|x|^s}\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega|u|^{q+1}\mathrm{d}x,$$
$$\forall u\in H_0^1(\Omega).$$

根据文献[5]，能量泛函 I 在 $H_0^1(\Omega)$ 空间中是 C^1 泛函。因此，问题(1)的解与能量泛函 I 在 $H_0^1(\Omega)$ 空间中的临界点是一一对应的。

记 A_s 为 Hardy-Sobolev 常数

$$A_s:=\inf_{u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}}\frac{\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega\frac{|u|^{6-2s}}{|x|^s}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3-s}}}.\tag{3}$$

特别地，当 $s=0$，

$$A_0:=\inf_{u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}}\frac{\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega|u|^6\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}}}$$

是最佳 Sobolev 常数。记 $\|u\|=\left(\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$ 为 $H_0^1(\Omega)$ 空间中的标准范数，$|u|_p=\left(\int_\Omega|u|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$ 为空间 $L^p(\Omega)(0<p<\infty)$ 中的标准范数。

1 主要定理

首先，给出如下一个重要的引理。

引理 1.1 假设 $a,b\geqslant 0$ 且 $a+b>0, 0<q<1, 0\leqslant s<1$，则存在 $\lambda_*>0$ 和 $R,\rho>0$ 使得对任意的 $\lambda\in(0,\lambda_*)$ 都有

$$I(u)|_{u\in S_R}\geqslant\rho,\quad \inf_{u\in B_R}I(u)<0,\tag{4}$$

其中：$S_R=\{u\in H_0^1(\Omega):\|u\|=R\}, B_R=\{u\in H_0^1(\Omega):\|u\|\leqslant R\}$。

证明 由 Hölder 不等式和式(3)，有

$$\int_\Omega|u|^{q+1}\mathrm{d}x\leqslant|u|_6^{q+1}|\Omega|^{\frac{5-q}{6}}\leqslant|\Omega|^{\frac{5-q}{6}}A_0^{-\frac{1+q}{2}}\|u\|^{1+q},\tag{5}$$

$$\int_\Omega\frac{|u|^{6-2s}}{|x|^s}\mathrm{d}x\leqslant A_s^{-\frac{6-2s}{2}}\|u\|^{6-2s}.\tag{6}$$

从而，根据式(5)和式(6)，可得

$$\begin{aligned}I(u)&=\frac{a}{2}\|u\|^2+\frac{b}{4}\|u\|^4-\frac{1}{6-2s}\int_\Omega\frac{|u|^{6-2s}}{|x|^s}\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega|u|^{q+1}\mathrm{d}x\\&\geqslant\frac{a}{2}\|u\|^2+\frac{b}{4}\|u\|^4-\frac{\|u\|^{6-2s}}{(6-2s)A_s^{3-s}}-\frac{\lambda\|u\|^{1+q}}{(1+q)A_0^{\frac{1+q}{2}}}\\&\geqslant\|u\|^{1+q}\left(\frac{a}{2}\|u\|^{1-q}+\frac{b}{4}\|u\|^{3-q}-\frac{\|u\|^{5-q-2s}}{(6-2s)A_s^{3-s}}-\frac{\lambda}{(1+q)A_0^{\frac{1+q}{2}}}\right).\end{aligned}\tag{7}$$

当 $a>0$ 时，令

$$g(t)=\frac{a}{2}t^{1-q}-\frac{t^{5-q-2s}}{(6-2s)A_s^{3-s}},$$

则

$$g'(t)=t^{-q}\left[\frac{a(1-q)}{2}-\frac{(5-q-2s)t^{4-2s}}{(6-2s)A_s^{3-s}}\right].$$

容易得到

$$t_{\max}=\left[\frac{a(1-q)(3-s)A_s^{3-s}}{5-q-2s}\right]^{\frac{1}{2(2-s)}},$$

使得

$$\max_{t\geqslant 0}g(t)=g(t_{\max})=\frac{a(2-s)}{5-q-2s}\left[\frac{a(1-q)(3-s)A_s^{3-s}}{5-q-2s}\right]^{\frac{1-q}{2(2-s)}}.$$

因此，取 $R_1=t_{\max}$ 以及 $\lambda'=(1+q)A_0^{\frac{1+q}{2}}g(t_{\max})$，依据式(7)，则存在 $\rho>0$ 使得对任意的 $0<\lambda<\lambda'$ 都有

$$I(u)|_{u\in S_{R_1}}\geqslant\rho, \tag{8}$$

其中 $S_{R_1}=\{u\in H_0^1(\Omega):\|u\|=R_1\}$。若 $b>0$ 时，令

$$h(t)=\frac{b}{4}t^{3-q}-\frac{t^{5-q-2s}}{(6-2s)A_s^{3-s}},$$

则

$$h'(t)=t^{2-q}\left[\frac{b(3-q)}{4}-\frac{(5-q-2s)t^{2-2s}}{(6-2s)A_s^{3-s}}\right].$$

容易得到，

$$\tilde{t}_{\max}=\left[\frac{b(3-q)(3-s)A_s^{3-s}}{2(5-q-2s)}\right]^{\frac{1}{2(1-s)}},$$

使得

$$\max_{t\geqslant 0}h(t)=h(\tilde{t}_{\max})=\frac{b(1-s)}{2(5-q-2s)}\left[\frac{b(3-q)(3-s)A_s^{3-s}}{2(5-q-2s)}\right]^{\frac{2-q}{2(1-s)}}.$$

因此，取 $R_2=\tilde{t}_{\max}$ 以及 $\lambda''=(1+q)A_0^{\frac{1+q}{2}}h(\tilde{t}_{\max})$，依据式(7)，则存在 $\rho>0$ 使得对任意的 $0<\lambda<\lambda''$ 都有

$$I(u)|_{u\in S_{R_2}}\geqslant\rho, \tag{9}$$

其中 $S_{R_2}=\{u\in H_0^1(\Omega):\|u\|=R_2\}$。

因此，对任意的 $a,b\geqslant 0$ 且 $a+b>0$，综合式(8)和式(9)，则存在 $\lambda_*>0$ 和 $R,\rho>0$ 使得对任意的 $\lambda\in(0,\lambda_*)$ 使得 $I(u)|_{u\in S_R}\geqslant\rho$ 成立。进一步可得，对任意的 $u\in H_0^1(\Omega)$ 且 $u\neq 0$ 有

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{I(tu)}{t^{1+q}}=-\frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega|u|^{q+1}\mathrm{d}x<0.$$

故，当 $\|u\|$ 充分小时，有

$$m=\inf_{u\in B_R}I(u)<0,$$

从而式(7)成立。引理 1.1 证毕。

下面，给出本文的主要结果及其证明。

定理 1.1　假设 $a,b\geqslant 0$ 且 $a+b>0$，$0<q<1$，$0\leqslant s<1$，则对一切的 $0<\lambda<\lambda_*$（λ_* 为引理 1.1 中所定义）问题(1)都存在一个正解 $u_*\in H_0^1(\Omega)$ 使得 $I(u_*)<0$。

证明　根据引理 1.1，只需证明存在 $u_*\in B_R$（B_R 为引理 1.1 中所定义）使得 $I(u_*)=m<0$。由引理 1.1 的证明过程和式(1)，可推得 $\forall u\in B_R$ 有

$$\frac{a}{2}\|u\|^2+\frac{b}{4}\|u\|^4-\frac{1}{6-2s}\int_\Omega\frac{|u|^{6-2s}}{|x|^s}\mathrm{d}x\geqslant 0, \tag{10}$$

和

$$\frac{a}{2}\|u\|^2+\frac{b}{4}\|u\|^4-\frac{1}{6-2s}\int_\Omega\frac{|u|^{6-2s}}{|x|^s}\mathrm{d}x\geqslant\rho,\ \forall u\in S_R,$$

其中 ρ 和 S_R 均为引理 1.1 中所定义。任取 $\{u_n\}\subset B_R$ 为一个极小化序列使得 $\lim\limits_{n\to\infty}I(u_n)=m<0$。由于 $\{u_n\}$ 有界且 B_R 是闭凸集，故存在 $u_*\in B_R\subset H_0^1(\Omega)$ 和序列 $\{u_n\}$ 的一个子序列（仍记为 $\{u_n\}$）使得

$$\begin{cases}u_n\rightharpoonup u_*, & \text{在 } H_0^1(\Omega)\text{ 中},\\ u_n\to u_*, & \text{在 } L^s(\Omega)(1\leqslant p<6)\text{ 中},\\ u_n(x)\to u_*(x), & \text{在 }\Omega\text{ 中几乎处处成立}.\end{cases} \tag{11}$$

不失一般性，令 $w_n=u_n-u_*$，由式(11)可推得

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega|u_n|^{q+1}\mathrm{d}x=\int_\Omega|u_*|^{q+1}\mathrm{d}x, \tag{12}$$

$$\|u_n\|^2=\|w_n\|^2+\|u_*\|^2+o(1), \tag{13}$$

$$\|u_n\|^4=\|w_n\|^4+\|u_*\|^4+2\|w_n\|^2\|u_*\|^2+o(1), \tag{14}$$

其中 $o(1)$ 表示 $n\to\infty$ 的无穷小量。再根据文献[6]，可得

$$\int_\Omega\frac{|u_n|^{6-2s}}{|x|^s}\mathrm{d}x=\int_\Omega\frac{|w_n|^{6-2s}}{|x|^s}\mathrm{d}x+\int_\Omega\frac{|u_*|^{6-2s}}{|x|^s}\mathrm{d}x+o(1). \tag{15}$$

若 $u_*=0$，可得 $w_n=u_n$，这就意味着 $w_n\in B_R$。若 $u_*\neq 0$，由式(13)，当 n 充分大时有 $w_n\in B_R$。从而，由式(10)，可推得

$$\frac{a}{2}\|w_n\|^2+\frac{b}{4}\|w_n\|^4-\frac{1}{6-2s}\int_\Omega\frac{|w_n|^{6-2s}}{|x|^s}\mathrm{d}x\geqslant 0. \tag{16}$$

故,由式(12)~式(16),有

$$\begin{aligned} m &= I(u_n) + o(1) \\ &= I(u_*) + \frac{a}{2}\|w_n\|^2 + \frac{b}{4}\|w_n\|^4 + \\ &\quad \frac{b}{2}\|w_n\|^2\|u_*\|^2 - \\ &\quad \frac{1}{6-2s}\int_\Omega \frac{|w_n|^{6-2s}}{|x|^s}\mathrm{d}x + o(1) \\ &\geqslant I(u_*) + \frac{b}{2}\|w_n\|^2\|u_*\|^2 + o(1) \\ &\geqslant I(u_*) + o(1) \\ &\geqslant m + o(1). \end{aligned}$$

这就意味着 $I(u_*) = m < 0$ 且 $u_* \neq 0$,即 u_* 能量泛函 I 的一个局部极小值点。因此,u_* 是问题(1) 的非零解。由 $I(|u|) = I(u)$,不失一般性,可以假设 $u_* \geqslant 0$。根据强极大值原理,可得在 Ω 中 $u_* > 0$。故,u_* 是问题(1) 的正解且 $I(u_*) < 0$。 定理 1.1 证毕。

注记 1.1　一方面,将文献[1]中所研究的问题推广至带 Hardy-Sobolev 临界指数的情形,并获得问题(1)的正解的存在性;另一方面,当 $s = 0$ 时,定理 1.1 结果包含文献[4]的主要结果,而且我们的方法比文献[4]的方法简单。此外,定理 1.1 对于 $a = 0, b > 0$ 或者 $a > 0, b = 0$ 的情况同样成立。当 $a = 0, b > 0$ 时,问题(1)被称为退化的 Kirchhoff 型方程;当 $a > 0, b = 0$ 时,问题(1)退化为经典的奇异半线性椭圆方程。

注记 1.2　特别地,当 $a = 1, b = 0$ 时,文献[7]研究问题(1)并获得 2 个正解的存在性。对于这类带 Hardy-Sobolev 临界指数的奇异椭圆方程的更多结果,可参见文献[7]的参考文献及其引用文献。这里提出一个公开问题:如何获得问题(1)的第 2 个正解?

参考文献

[1] 刘星, 孙义静. 一类含 Hardy 项的三维 Kirchhoff 型问题的两个正解[J]. 中国科学院研究生院学报, 2012, 29(5): 721-730.

[2] Liu X, Sun Y J. Multiple positive solutions for Kirchhoff type problems with singularity [J]. Communications on Pure Applied Analysis, 2013, 12(2): 721-733

[3] 曹小强, 孙义静. 一类奇异非线性 Kirchhoff 型问题 的正解[J]. 中国科学院研究生院学报, 2014, 31(1): 5-9.

[4] Sun Y J, Liu X. Existence of positive solutions for Kirchhoff type problems with critical exponent[J]. Journal of Partial Differential Equations, 2012, 25(2): 187-198.

[5] Rabinowitz P H. Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations [M] // Regional Conference Series in Mathematics, American Mathematical Society, 1986.

[6] Ghoussoub N, Yuan C. Multiple solutions for quasi-linear PDEs involving the critical Sobolev and Hardy exponents[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 2000, 352: 5 703-5 743.

[7] Bouchekif M, Matallah A. Multiple positive solutions for elliptic equations involving a concave term and critical Sobolev-Hardy exponent[J]. Applied Mathematics Letters, 2009, 22: 268-275.