第 41 卷 第 1 期　　应 用 数 学 学 报　　Vol. 41 No. 1
2018 年 1 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　Jan., 2018

带有多项式谱参数边界条件的 Sturm-Liouville 问题的有限谱 *

敖继军

(内蒙古大学数学科学学院，呼和浩特 010021)

(内蒙古工业大学理学院，呼和浩特 010051)

(E-mail: george_ao78@sohu.com)

孙 炯

(内蒙古大学数学科学学院，呼和浩特 010021)

王 娟

(内蒙古工业大学理学院，呼和浩特 010051)

摘　要　本文研究了一类带有多项式谱参数边界条件的 Sturm-Liouville 问题的谱分析. 通过构造，证明了这类问题具有有限谱且所有谱都是特征值.

关键词　Sturm-Liouville 问题；有限谱；特征参数；多项式依赖

MR(2000) 主题分类　34L05; 34B07; 34B24

中图分类　O175.3

1　引言

对谱参数具有线性或非线性依赖微分方程的研究在许多数学及应用问题中都会出现. 例如带有谱参数边界条件的 Sturm-Liouville(S-L) 问题是数学物理中非常重要的研究热点 [1−7]. 这类问题出现在一些物理问题中，如热传导问题和弦振动问题等 [1,6,7]. [8–10] 里作者考虑了对边界条件具有非线性多项式谱参数依赖的边值问题. 关于带有非线性多项式谱参数边界条件的常微分算子谱的一般研究可参见 [11]. 特别的，关于含有谱参数边界条件的谱问题在力学及工程上应用的例子可参见 Collatz 的有关专著 [4].

本文 2015 年 10 月 15 日收到. 2017 年 6 月 9 日收到修改稿.

* 国家自然科学基金 (11661059, 11301259, 11561050); 内蒙古自然科学基金 (2017JQ07) 资助项目.

1964 年， Atkinson 在其专著 [12] 中首次给出了关于有限谱的猜测，即：二阶的 S-L 问题可能存在有限个特征值．为此， 2001 年 Kong, Wu, 和 Zettl 在 [13] 中利用构造的方法，证明了对任何正整数 n 恰有 n 个特征值的一类特殊的 S-L 问题．此后， Kong, Volkmer 和 Zettl[14] 给出了这类具有有限个特征值的 S-L 问题在自共轭分离型和耦合型边界条件下的矩阵表示．这两个结论很好地说明了 Atkinson 猜测的合理性，并给出了这两类问题之间的 '内在' 关系：即具有有限谱的 S-L 问题与矩阵特征值问题之间可以在一定情况下相互转换．最近，我们将具有有限谱的问题推广到带有转移条件的 S-L 问题 [15] 以及含有谱参数边界条件的 S-L 问题 [16]．关于一些具有有限谱的高阶边值问题可参见 [17–19].

众所周知，一般 S-L 问题的边界条件可分为分离和耦合型两种．而带有谱参数边界条件的 S-L 问题的相关研究，很多结论都仅仅考虑了分离型边界条件的情形，很少有关于耦合边界条件的相关结论．因此，本文考虑带有非线性多项式谱参数边界条件的有限谱问题，其结论既包含分离型边界条件情形也包含耦合型边界条件．我们构造一类这样的边值问题 (不论自共轭还是非自共轭) 使其至多有 $n+5$ 个特征值，其中 n 依赖于对定义区间的分割．结论表明该问题的特征值个数不仅依赖于对区间的分割而且还与谱参数边界条件也有一定关系.

与其他文献不同，本文的特殊之处有： 1. 边界条件中的谱参数为非线性二次形式 (甚至任意有限次多项式形式); 2. 边界条件为最一般形式，既可以是分离型也可以是耦合型； 3. 关于谱参数 λ 的多项式的系数可以为复数.

文章结构如下：在引言之后，第 2 节给出一些注释与预备知识，第 3 节证明对任何正整数 n, 带有多项式谱参数边界条件的 S-L 问题至多有 $n+5$ 个特征值．最后在第 4 节给出一些例子说明本文的主要结论.

2　预备知识

考虑由微分方程

$$-(py')'+qy=\lambda wy, \qquad x\in J=(a,b), \qquad -\infty<a<b<+\infty \tag{1}$$

及含有谱参数的两点边界条件

$$A_\lambda Y(a)+B_\lambda Y(b)=0, \qquad Y=\begin{bmatrix} y \\ py' \end{bmatrix}, \tag{2}$$

所构成的 Sturm-Liouville 问题，其中

$$A_\lambda=\begin{pmatrix} \lambda^2\alpha_1''+\lambda\alpha_1'+\alpha_1 & \lambda^2\alpha_2''+\lambda\alpha_2'+\alpha_2 \\ \lambda^2\beta_1''+\lambda\beta_1'+\beta_1 & \lambda^2\beta_2''+\lambda\beta_2'+\beta_2 \end{pmatrix},$$
$$B_\lambda=\begin{pmatrix} \lambda^2\alpha_3''+\lambda\alpha_3'+\alpha_3 & \lambda^2\alpha_4''+\lambda\alpha_4'+\alpha_4 \\ \lambda^2\beta_3''+\lambda\beta_3'+\beta_3 & \lambda^2\beta_4''+\lambda\beta_4'+\beta_4 \end{pmatrix},$$

$\alpha_i, \alpha_i', \alpha_i'', \beta_i, \beta_i', \beta_i'' \in \mathbb{C},\ i = 1,2,3,4$ 满足条件

$$\sum_{i=1}^{4} |\alpha_i''| \neq 0, \qquad \sum_{i=1}^{4} |\beta_i''| \neq 0,$$

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \alpha_1'' & \alpha_2'' & \alpha_3'' & \alpha_4'' \\ \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' & \alpha_4' \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} \geq 2, \qquad \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \beta_1'' & \beta_2'' & \beta_3'' & \beta_4'' \\ \beta_1' & \beta_2' & \beta_3' & \beta_4' \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} \geq 2, \tag{3}$$

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \alpha_1'' & \alpha_2'' & \beta_1'' & \beta_2'' \\ \alpha_1' & \alpha_2' & \beta_1' & \beta_2' \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \geq 2, \qquad \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \alpha_3'' & \alpha_4'' & \beta_3'' & \beta_4'' \\ \alpha_3' & \alpha_4' & \beta_3' & \beta_4' \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} \geq 2.$$

谱参数 λ 不仅出现在方程中，而且出现在边界条件中，方程系数满足

$$r = 1/p, \qquad q, w \in L(J, \mathbb{C}), \tag{4}$$

其中 $L(J,\mathbb{C})$ 表示在 J 上 Lebesgue 可积的复值可测的函数全体 [20,21].

令 $u_1 = y,\ u_2 = py'$, 则有方程 (1) 的系统表示

$$u_1' = r u_2, \qquad u_2' = (q - \lambda w) u_1, \qquad x \in J. \tag{5}$$

注 2.1 条件 (4) 对系数函数 r, q, w 的符号没有任何限制. 而且 r, q, w 中的每一个函数都允许在区间 $J = (a, b)$ 上是恒为零的函数.

定义 2.1 方程 (1) 在子区间 $I \subset J$ 上的平凡解是指在 I 上 y 及其拟导数 $u_2 = y',\ u_3 = py'',\ u_4 = (py'')'$ 都为零的解 y.

引理 2.1 设 (4) 成立并令 $\Phi(x,\lambda) = [\phi_{ij}(x,\lambda)]$ 表示系统 (5) 满足初始条件 $\Phi(a,\lambda) = I$ 的基解矩阵, 则复数 λ 是带有多项式谱参数边界条件的 S-L 问题 (1), (2) 的一个特征值当且仅当

$$\Delta(\lambda) = \mathbf{det}[A_\lambda + B_\lambda \Phi(b,\lambda)] = 0. \tag{6}$$

而且 $\Delta(\lambda)$ 可表示为

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) =& \mathbf{det}(A_\lambda) + \mathbf{det}(B_\lambda) + h_{11}(\lambda)\phi_{11}(b,\lambda) + h_{12}(\lambda)\phi_{12}(b,\lambda) \\ &+ h_{21}(\lambda)\phi_{21}(b,\lambda) + h_{22}(\lambda)\phi_{22}(b,\lambda), \end{aligned} \tag{7}$$

其中

$$\begin{aligned} h_{11}(\lambda) &= (\lambda^2\alpha_3'' + \lambda\alpha_3' + \alpha_3)(\lambda^2\beta_2'' + \lambda\beta_2' + \beta_2) - (\lambda^2\alpha_2'' + \lambda\alpha_2' + \alpha_2)(\lambda^2\beta_3'' + \lambda\beta_3' + \beta_3), \\ h_{12}(\lambda) &= (\lambda^2\alpha_1'' + \lambda\alpha_1' + \alpha_1)(\lambda^2\beta_3'' + \lambda\beta_3' + \beta_3) - (\lambda^2\alpha_3'' + \lambda\alpha_3' + \alpha_3)(\lambda^2\beta_1'' + \lambda\beta_1' + \beta_1), \\ h_{21}(\lambda) &= (\lambda^2\alpha_4'' + \lambda\alpha_4' + \alpha_4)(\lambda^2\beta_2'' + \lambda\beta_2' + \beta_2) - (\lambda^2\alpha_2'' + \lambda\alpha_2' + \alpha_2)(\lambda^2\beta_4'' + \lambda\beta_4' + \beta_4), \\ h_{22}(\lambda) &= (\lambda^2\alpha_1'' + \lambda\alpha_1' + \alpha_1)(\lambda^2\beta_4'' + \lambda\beta_4' + \beta_4) - (\lambda^2\alpha_4'' + \lambda\alpha_4' + \alpha_4)(\lambda^2\beta_1'' + \lambda\beta_1' + \beta_1). \end{aligned}$$

证　对引理第一部分的证明，[1] 给出了二阶 S-L 问题在分离型谱参数边界条件下的情形，这里考虑的是带有耦合或分离型多项式依赖谱参数边界条件的边值问题，其证明与 [1] 类似，因此略去．引理的第 2 部分可直接计算得出．证毕．

定义 2.2　带有多项式谱参数边界条件的 S-L 问题 (1), (2), 或等价的 (5), (2), 称为是退化的，如果在 (7) 中对一切 $\lambda \in \mathbb{C}$ 都有 $\Delta(\lambda) \equiv 0$ 或者对任何 $\lambda \in \mathbb{C}$ 有 $\Delta(\lambda) \neq 0$.

3　Sturm-Liouville 问题的有限谱

本节我们假设 (4) 成立且对一些正整数 n 存在对区间 J 的分割

$$a = a_0 < b_0 < a_1 < b_1 < \cdots < a_n < b_n = b, \tag{8}$$

使得

$$r = \frac{1}{p} = 0, \qquad x \in [a_k, b_k], \qquad \int_{a_k}^{b_k} w \neq 0, \qquad k = 0, 1, \cdots, n; \tag{9}$$

及

$$q = w = 0, \qquad x \in [b_{k-1}, a_k], \qquad \int_{b_{k-1}}^{a_k} r \neq 0, \qquad k = 1, 2, \cdots, n. \tag{10}$$

定义 3.1　我们称满足条件 (8)–(10) 的 Sturm-Liouville 方程 (1) 为 Atkinson 类型的．

给定 (8)–(10), 令

$$\begin{aligned} r_k &= \int_{b_{k-1}}^{a_k} r, \qquad k = 1, 2, \cdots, n, \\ q_k &= \int_{a_k}^{b_k} q, \qquad w_k = \int_{a_k}^{b_k} w, \qquad k = 0, 1, \cdots, n. \end{aligned} \tag{11}$$

为了得出本文的主要结论，首先给出系统 (5) 的基解矩阵的结构，下面的结论来自 [19].

引理 3.1　设 (4), (8)–(10) 成立．对每一个 $\lambda \in \mathbb{C}$, 令 $\Phi(x, \lambda) = [\phi_{ij}(x, \lambda)]$ 表示系统 (5) 满足初始条件 $\Phi(a, \lambda) = I$ 的基解矩阵，则有

$$\Phi(b_0, \lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q_0 - \lambda w_0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{12}$$

$$\Phi(b_1, \lambda) = \begin{bmatrix} 1 + (q_0 - \lambda w_0) r_1 & r_1 \\ \phi_{21}(b_1, \lambda) & 1 + (q_1 - \lambda w_1) r_1 \end{bmatrix}, \tag{13}$$

其中 $\phi_{21}(b_1, \lambda) = (q_0 - \lambda w_0) + (q_1 - \lambda w_1) + (q_0 - \lambda w_0)(q_1 - \lambda w_1) r_1$.

一般的，对于 $1 \leq i \leq n$, 有

$$\Phi(b_i, \lambda) = \begin{bmatrix} 1 & r_i \\ q_i - \lambda w_i & 1 + (q_i - \lambda w_i) r_i \end{bmatrix} \Phi(b_{i-1}, \lambda). \tag{14}$$

注意到 $b=a_n$ 及 $R=\prod_{i=1}^{n} r_i$, 则可得引理 3.1 中基解矩阵 Φ 的结构如下：

推论 3.1 对基解矩阵 Φ 我们有

$$\phi_{11}(b,\lambda)=R\prod_{i=0}^{n-1}(q_i-\lambda w_i)+\tilde{\phi}_{11}(\lambda), \tag{15}$$

$$\phi_{12}(b,\lambda)=R\prod_{i=1}^{n-1}(q_i-\lambda w_i)+\tilde{\phi}_{12}(\lambda), \tag{16}$$

$$\phi_{21}(b,\lambda)=R\prod_{i=0}^{n}(q_i-\lambda w_i)+\tilde{\phi}_{21}(\lambda), \tag{17}$$

$$\phi_{22}(b,\lambda)=R\prod_{i=1}^{n}(q_i-\lambda w_i)+\tilde{\phi}_{22}(\lambda), \tag{18}$$

其中对固定的 q,w 及 λ, 当 $\min\{r_k : k=1,\cdots,n\}\to\infty$ 时有 $\tilde{\phi}_{ij}(\lambda)=o(R),\ \ i,j=1,2.$

基于以上的准备工作现在我们构造带有多项式谱参数边界条件的正则 S-L 问题，使得对于每一个 $n\in\mathbb{N}$ 该问题至多有 $n+5$ 个特征值.

定理 3.1 令 $n\in\mathbb{N}$, 并设 (4), (8)–(10) 成立. 设 $H(\lambda)$ 如引理 2.1 定义，则带有多项式谱参数边界条件的 S-L 问题 (1), (2) 至多有 $n+5$ 个特征值.

证　由引理 2.1 可知

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda)=&\mathbf{det}(A_\lambda)+\mathbf{det}(B_\lambda)+h_{11}(\lambda)\phi_{11}(b,\lambda)+h_{12}(\lambda)\phi_{12}(b,\lambda)\\&+h_{21}(\lambda)\phi_{21}(b,\lambda)+h_{22}(\lambda)\phi_{22}(b,\lambda),\end{aligned}$$

注意到 (9) 可得基解矩阵 $\Phi(b,\lambda)=[\phi_{ij}(b,\lambda)]$ 中 $\phi_{11}(b,\lambda)$, $\phi_{12}(b,\lambda)$, $\phi_{21}(b,\lambda)$, 以及 $\phi_{22}(b,\lambda)$ 关于 λ 的次数分别为 n, $n-1$, $n+1$, 和 n. 因而当 $h_{21}(\lambda)$ 中 $\alpha_4''\beta_2''-\alpha_2''\beta_4''\neq 0$ 时， $\Delta(\lambda)$ 关于 λ 的最高次数为 $n+5$. 从而由推论 3.1 得判断函数 $\Delta(\lambda)$ 是 λ 的 $n+5$ 次多项式函数. 由代数基本定理知 $\Delta(\lambda)$ 恰有 $n+5$ 个根，即 S-L 问题 (1), (2) 恰有 $n+5$ 个特征值. 当 $\alpha_4''\beta_2''-\alpha_2''\beta_4''=0$ 时 $\Delta(\lambda)$ 的次数小于 $n+5$, 故特征值个数也将小于 $n+5$. 证毕.

注 3.1 由定理 3.1 可知，特征值的个数不仅依赖于对区间 J 的分割，而且与谱参数边界条件有关. 如果 $\alpha_4''\beta_2''-\alpha_2''\beta_4''\neq 0$, 则 S-L 问题 (1), (2) 恰有 $n+5$ 个特征值；如果 $\alpha_4''\beta_2''-\alpha_2''\beta_4''=0$ 但 $(\alpha_3''\beta_2''-\alpha_2''\beta_3'')w_0+(\alpha_1''\beta_4''-\alpha_4''\beta_1'')w_n-(\alpha_4''\beta_2'+\alpha_4'\beta_2''-\alpha_2''\beta_4'+\alpha_2'\beta_4'')w_0w_n\neq 0$, 则 S-L 问题 (1), (2) 恰有 $n+4$ 个特征值；如果以上条件不满足则 S-L 问题 (1), (2) 对于 $l\in\{1,2,\cdots,n+3\}$ 可能有 l 个特征值. 详细探讨比较繁琐，因此这里仅给出了范范的结果而没有做更细致的分析.

注 3.2 若 $r=1/p,\ q,w\in L(J,\mathbb{R})$, (8)–(11) 成立且 w 满足：在 J 上 $w\geq 0$ 且 w 在 J 的一些子区间上恒大于零，而谱参数边界条件 (2) 为自共轭的，则 S-L 问题 (1), (2) 的特征值都是实的. 然而，对于含有谱参数边界条件的 S-L 问题 (1), (2) 的自共轭实现依然未得到解决仍是开问题.

注 3.3 本文，只对谱参数边界条件为二次多项式情形给出了结论. 然而，容易看出边界条件可以为 λ 的任意整数次多项式，其讨论与本文类似因此这里略去.

4　例子

本节，将给出几个例子来说明我们的结论.

例 4.1　考虑带有多项式谱参数边界条件的 S-L 问题

$$\begin{cases} -(py')' + qy = \lambda wy, \qquad x \in \ J = (0,6), \\ (3\lambda^2+1)y(0) - \lambda(py')(0) = 0, \\ 2\lambda^2 y(6) + (\lambda^2+3\lambda-1)(py')(6) = 0. \end{cases} \tag{19}$$

选择 $n=2$ 并设 p,q,w 为分段常值函数：

$$r(x) = \frac{1}{p(x)} = \begin{cases} 0, & (0,2), \\ 1, & (2,3), \\ 0, & (3,4), \\ 1/2, & (4,5), \\ 0, & (5,6), \end{cases}$$

$$q(x) = \begin{cases} 2, & (0,2), \\ 0, & (2,3), \\ 1, & (3,4), \\ 0, & (4,5), \\ 3, & (5,6), \end{cases} \qquad w(x) = \begin{cases} 1, & (0,2), \\ 0, & (2,3), \\ 3/2, & (3,4), \\ 0, & (4,5), \\ 2, & (5,6). \end{cases} \tag{20}$$

由给定条件可知

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 3\lambda^2+1 & -\lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2\lambda^2 & \lambda^2+3\lambda-1 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

从而可计算推出判断函数为

$$\Delta(\lambda) = 6\ \lambda^6 + 43/2\ \lambda^5 - 73\lambda^4 - 277/2\ \lambda^3 + 275\ \lambda^2 - 13/2\ \lambda - 17.$$

因此 S-L 问题 (19), (20) 恰好有 $n+1+3=6$ 个特征值

$$\lambda_0 \approx -4.6812,\ \lambda_1 \approx -2.7498,\ \lambda_2 \approx -0.2266,\ \lambda_3 \approx 0.2864,\ \lambda_4 \approx 1.4515,\ \lambda_5 \approx 2.3363.$$

例 4.2　考虑 S-L 问题

$$\begin{cases} -(py')' + qy = \lambda wy, \qquad x \in \ J = (0,6), \\ \lambda^2 y(0) - (\lambda^2+1)(py')(0) + (\lambda^2-2)y(6) + (\lambda^2+2\lambda-1)(py')(6) = 0, \\ (\lambda^2-\lambda+5)y(0) + (\lambda^2+2\lambda-3)(py')(0) - \lambda y(6) - (2\lambda^2-1)(py')(6) = 0, \end{cases} \tag{22}$$

其中系数函数 $p,\ q,\ w$ 仍然由 (20) 给出. 可看出

$$A_\lambda=\begin{pmatrix}\lambda^2 & -\lambda^2-1\\ \lambda^2-\lambda+5 & \lambda^2+2\lambda-3\end{pmatrix},\qquad B_\lambda=\begin{pmatrix}\lambda^2-2 & \lambda^2+2\lambda-1\\ -\lambda & -2\lambda^2+1\end{pmatrix}. \tag{23}$$

从而可计算推出判断函数为

$$\Delta(\lambda)=12\ \ \lambda^7-131\ \lambda^6+468\ \lambda^5-1313/2\ \lambda^4-105\ \lambda^3+3103/2\ \lambda^2-3501/2\ \lambda+588.$$

因此 S-L 问题 (22), (20) 恰好有 $n+1+4=7$ 个特征值

$$\begin{aligned}&\lambda_0\approx-1.4146,\qquad \lambda_1\approx 0.6692,\qquad \lambda_2\approx 1.2361,\qquad \lambda_3\approx 2.2145,\\ &\lambda_4\approx 5.7171,\qquad \lambda_5\approx 1.2472+1.3236i,\qquad \lambda_6\approx 1.2472-1.3236i.\end{aligned}$$

例 4.3 考虑 S-L 问题

$$\begin{cases}-(py')'+qy=\lambda wy, \qquad x\in\ J=(0,6),\\ (\lambda^2+1-i)y(0)-\lambda(py')(0)=0,\\ (1+2i)\lambda^2y(6)+(\lambda^2+(1+3i)\lambda-1)(py')(6)=0.\end{cases} \tag{24}$$

选择 $n=2$ 并设 $p,\ q,\ w$ 为分段常值函数:

$$r(x)=\frac{1}{p(x)}=\begin{cases}0, & (0,2),\\ 1, & (2,3),\\ 0, & (3,4),\\ 1/2, & (4,5),\\ 0, & (5,6),\end{cases}$$

$$q(x)=\begin{cases}2, & (0,2),\\ 0, & (2,3),\\ 1+i, & (3,4),\\ 0, & (4,5),\\ 3, & (5,6),\end{cases}\qquad w(x)=\begin{cases}1, & (0,2),\\ 0, & (2,3),\\ 1, & (3,4),\\ 0, & (4,5),\\ 2, & (5,6).\end{cases} \tag{25}$$

由条件可得

$$A_\lambda=\begin{pmatrix}\lambda^2+1-i & -\lambda\\ 0 & 0\end{pmatrix},\qquad B_\lambda=\begin{pmatrix}0 & 0\\ (1+2i)\lambda^2 & \lambda^2+(1+3i)\lambda-1\end{pmatrix}.$$

同样可计算推出判断函数为

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda)=&-4\ \lambda^6+(35-4i)\ \lambda^5-(76-52i)\ \lambda^4+(16-215i)\ \lambda^3\\ &+(44+251i)\ \lambda^2-(3-14i)\ \lambda-24+10i.\end{aligned}$$

因此 S-L 问题 (24), (25) 恰好有 $n+1+3=6$ 个特征值

$$\lambda_0 \approx -1.2099-1.9078i,\qquad \lambda_1 \approx -0.2097+0.2014i,\qquad \lambda_2 \approx 0.1539-0.2957i,$$
$$\lambda_3 \approx 2.1220+0.5871i,\qquad \lambda_4 \approx 2.4095+0.4853i,\qquad \lambda_5 \approx 5.4841-0.0703i.$$

图 1 和图 2 分别给出了例 4.1 和例 4.2 中判断函数的图形 (这里没有给出复特征值的图形).

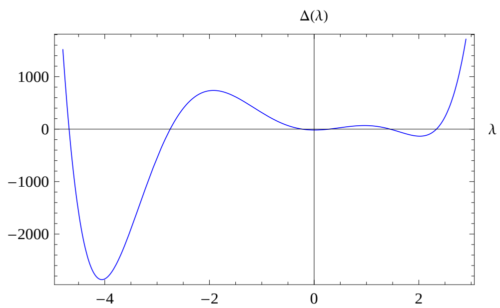

图 1　例 4.1 中的判断函数

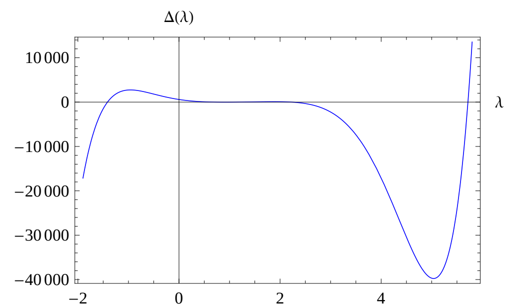

图 2　例 4.2 中的判断函数

参　考　文　献

[1] Akdoğan Z, Demirci M, Mukhtarov O Sh. Green function of discontinuous boundary-value problem with transmission conditions. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2007, 30: 1719–1738

[2] Binding P A, Browne, P J, Watson B A. Sturm-Liouville problems with boundary conditions rationally dependent on the eigeparameter, II. *J. Comp. and Appl. Math.*, 2002, 148: 147–168

[3] Binding P A, Browne P J, Watson B A. Inverse spectral problems for Sturm-Liouville equations with eigeparameter dependent boundary conditions. *J. London Math. Soc.*, 2000, 62(1): 161–182

[4] Collatz L. Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. Leipzig: Akad. Verlagsgesellschaft Geest & Portig, 1963

[5] Fulton C. Two-point boundary value problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A.*, 1977, 77: 293–308

[6] Fulton C, Pruess S. Numerical methods for a singular eigenvalue problem with eigenparameter in the boundary conditions. *J. Math. Anal. and Appl.*, 1979, 71: 431–462

[7] Walter J. Regular eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary conditions. *Math. Z.*, 1973, 133: 301–312

[8] Chernozhukova A Y, Freiling G. A uniqueness theorem for inverse spectral problems depending nonlinearly on the spectral parameter. *Inverse Probl. Sci. Eng.*, 2009, 17: 777–785

[9] Freiling G, Yurko V A. Inverse problems for Sturm-Liouville equations with boundary conditions polynomially dependent on the spectral parameter. *Inverse Probl.*, 2010, 26: 055003, 17pp

[10] Yokus N, Koprubasi T. Spectrum of the Sturm-Liouville operators with boundary conditions polynomially dependent on the spectral parameter. *J. Inequal. Appl.*, 2015, 42: 8pp

[11] Tretter Ch. Boundary eigenvalue problems with differential equations $N\eta=\lambda P\eta$ with λ-polynomial boundary conditions. *J. Differ. Equ.*, 2001, 170: 408–471

[12] Atkinson F V. Discrete and Continuous Boundary Problems. New York, London: Academic Press, 1964

[13] Kong Q, Wu H, Zettl A. Sturm-Liouville problems with finite spectrum. *J. Math. Anal. Appl.*, 2001, 263: 748–762

[14] Kong Q, Volkmer H, Zettl A. Matrix representations of Sturm-Liouville problems with finite spectrum. *Result. Math.*, 2009, 54: 103–116

[15] Ao J J, Sun J, Zhang M Z. The finite spectrum of Sturm-Liouville problems with transmission conditions. *Appl. Math. Comput.*, 2011, 218: 1166–1173

[16] Ao J J, Sun J, Zhang M Z. The finite spectrum of Sturm-Liouville problems with transmission conditions and eigenparameter-dependent boundary conditions. *Result. Math.*, 2013, 63: 1057–1070

[17] Ao J J, Bo F Z, Sun J. Fourth order boundary value problems with finite spectrum. *App. Math. Comput.*, 2014, 244: 952–958

[18] Ao J J, Sun J, Zettl A. Finite spectrum of 2nth order boundary value problems. *Appl. Math. Lett.*, 2015, 42: 1–8

[19] Bo F Z, Ao J J. The finite spectrum of fourth order boundary value problems with transmission conditions. *Abstr. Appl. Anal.*, 2014 Article ID 175489, 7 pages

[20] Everitt W N, Race D. On necessary and sufficient conditions for the existence of Caratheodory solutions of ordinary differential equations. *Quaest. Math.*, 1976, 3: 507–512

[21] Zettl A. Sturm-Liouville Theory. In: Mathematical Surveys and Monographs, 121, Amer. Math. Soc., Providence RI, 2005

Finite Spectrum of Sturm-Liouville Problems with Boundary Conditions Polynomially Dependent on the Eigenparameter

AO Jijun

(*School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot* 010021, *China*)

(*College of Sciences, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot* 010051), *China*)

(*E-mail: george_ao78@sohu.com*)

SUN Jiong

(*School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot* 010021, *China*)

WANG Juan

(*College of Sciences, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot* 010051, *China*)

Abstract The spectral analysis of a kind of Sturm-Liouville problems with boundary conditions polynomially dependent on the eigenparameter is investigated. By construction we prove that this kind of problem has finite spectrum and all the spectrum are consist of eigenvalues.

Key words Sturm-Liouville problems; finite spectrum; eigenparameter; polynomially dependent

MR(2000) Subject Classification 34L05; 34B07; 34B24

Chinese Library Classification O175.3