第 41 卷 第 1 期 应 用 数 学 学 报 Vol. 41 No. 1
2018 年 1 月 ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA Jan., 2018

多期有限合伙制与公司制的道德风险和机制选择 *

倪宣明
(北京大学软件与微电子学院，北京 100871)
武 晨 †
(中国科学院数学与系统科学研究院，北京 100190)
(E-mail: wuchen12@mails.ucas.ac.cn)
赵慧敏
(中山大学管理学院，广州 510275)

摘 要 本文基于委托代理理论和博弈论建立了有限合伙制与公司制下的多期道德风险模型，分析了委托人和代理人如何对这两种机制进行选择的问题. 结论表明：两种机制下均存在道德风险问题，且在有限合伙制下因激励程度较高得到改善；两种机制相比较，公司制在特定条件下为博弈双方的最优选择，而有限合伙制只有在博弈双方地位不平等时才能达成.

关键词 有限合伙制；委托代理问题；道德风险；完全信息博弈
MR(2000) 主题分类 91A25
中图分类 O29

1 引言

有限合伙制公司由普通合伙人 (经理) 和有限合伙人 (股东) 组成，分别承担无限连带责任和有限责任. 相比经典的公司制下形成的对经理的激励不足问题，有限合伙制下，普通合伙人对外代表公司，负责公司的日常运营，有限合伙人主要负责出资，并享有大部分的利润分配权 (如 80%)，这一机制能够实现普通合伙人的人力资本与有限合伙人的货币资本的有效结合，在数十年间已成为世界各发达国家风险投资的主要法律组

本文 2017 年 9 月 21 日收到. 2017 年 11 月 10 日收到修改稿.
* 国家自然科学基金青年 (71303265) 资助项目.
† 通讯作者.

织形式.

经典委托代理理论研究委托人和代理人因信息不对称而产生的代理问题. Wilson[1], Spence 和 Zeckhauser[2] 以及 Ross[3] 最初尝试用 “状态空间模型化方法” 构建委托代理的数理模型. Mirrless[4−6] 指出一阶方法 (First-Order Approach, FOA) 的局限性, 首创 “分布函数的参数化方法”, 随后此方法由 Holmstrom[7,8] 进一步发展成为学界著名的 “莫里斯 - 霍姆斯特姆方法” (Mirrlees-Holmstrom Approach), 并给出了最优风险分担条件, Mirrless 和 Holmstrom 也因为这一开创性贡献分别获得了 1996 年和 2016 年的诺贝尔经济学奖. 遗憾的是上述方法仍未完全解决一阶方法有效性问题, 之后多位学者在此问题上作出贡献并推动了委托代理理论的发展. Milgrom[9] 提出了单调似然比假设 (MLRP). Grossman 和 Hart[10] 指出, 当代理人对风险收入的偏好与其行动独立时, 激励相容约束为凸规划问题. Rogerson[11] 研究提出了分布函数凸性假设 (CDF), 并证明在 MLRP 和 CDF 下, 一阶方法有效. Jewitt[12] 进一步放宽了分布函数凸性假设. 对于多期委托代理问题, Radner[13−15] 研究了在一定破产方案下博弈中的最优效率问题, Dutta 和 Radner[16] 进一步研究了上述问题的连续情形. Lambert[17] 和 Rogerson[18] 给出了多期离散次优契约的必要条件. Mukoyama[19] 研究了工资合同受代理人多期努力水平影响而产出服从两点分布的情形, 指出在一定条件下最优风险分担比例为零. Jarque[20] 对上述问题进一步研究指出当代理人的期望效用关于努力水平线性相关时, 问题转化为道德风险问题. Thomas[21] 分析了带贴现的多期委托代理最优契约, 指出当时间趋于无穷时次优合同趋近最优合同.

以上经典委托代理分析框架主要用于研究公司制, 并不能有效解释有限合伙制下的激励问题. 学界对有限合伙制的研究以定性研究和实证分析为主, 以委托代理理论为基础的分析较少. Gompers 和 Lerner[22] 的实证研究提出合伙契约受合伙人讨价还价能力影响. Robinson[23] 发现合伙企业收益和募资规模与普通合伙人能力相关. 倪宣明等[24] 指出有限合伙制与公司制的区别在于工资设计权归属不同导致最优化目标不同, 由此在委托代理理论基础上建立了单期情形有限合伙制 - 委托代理模型并给出了最优契约条件, 其结果表明在一定的假设条件下, 有限合伙制与公司制下的风险分担比例以及努力水平相同.

本文尝试以经典委托代理理论和上述有限合伙制委托代理模型为基础, 使用均值参与约束假设刻画多期关系, 分别建立公司制与有限合伙制多期模型并求解最优线性契约, 比较两种机制下的最优合同与次优合同, 分析多期道德风险问题, 研究这两种机制的选择问题. 结论表明在两种机制下: 有限合伙制的最优风险分担比例更高从而激励程度更高; 两种机制下均存在道德风险, 但在有限合伙制下因激励程度更高而有所改善; 博弈双方处于平等地位时不可能同时选择有限合伙制, 而在一定条件下可能同时选择公司制.

2 基本假设

假设在任一期博弈中, 参与人由委托人和代理人组成, 委托人将其资本委托给代理

人进行生产得到产出，代理人不付出资本，只付出劳动，产出假设为与代理人努力水平相关的随机变量．具体博弈过程为：第一阶段 (事前)，双方签订工资合同，在公司制下由委托人设计工资，在有限合伙制下由代理人设计工资；第二阶段 (事后)，代理人选择努力水平，之后产出实现；第三阶段，双方按照事先签订的合同分配产出．在第一阶段合同签订时，双方所有信息以及产出的分布均为公共信息，因此为完全信息博弈．在第二阶段产出实现时，委托人只能观测到产出的实现值而无法得知代理人选择的努力水平，此时发生信息不对称．因此两种机制下的博弈均为事后发生信息不对称的完全信息博弈，均属于委托代理框架中的隐藏行动道德风险模型．公司制下，委托人追求多期效用最大化，同时满足激励相容约束和代理人参与约束；有限合伙制下，代理人追求多期效用最大化，并满足激励相容约束和委托人的参与约束．

本文考虑不带贴现的离散时间模型，记总期数为 $N \in Z^+$．任取正整数 n，在第 n 期模型中：产出随机变量记为 π_n，工资为产出的函数，记为 $s_n(\pi_n)$，产出按工资合同分配后代理人获得 $s_n(\pi_n)$，委托人获得 $\pi_n - s_n(\pi_n)$；委托人效用仅与资产相关，记其效用函数为 $v(x)$；以努力水平变量 a_n 表示代理人付出努力的程度 (正相关)，代理人付出人力会带来效用损失，因此代理人效用与资产以及努力水平相关，记代理人效用函数为 $u(x, a_n)$．记委托人和代理人的当期期望效用分别为 V_n 和 U_n．作如下假设：

假设 1　$\pi_n \sim N(a_n, \sigma^2)$，且 $\{\pi_n,\ n \in Z^+,\ n \leq N\}$ 相互独立，其中 $\sigma > 0$ 为外生参数．

假设 2　工资合同采取线性契约 $s_n(\pi_n) = \delta_n \pi_n + F_n$，其中 δ_n, F_n 为实数变量．

研究线性契约有以下原因：首先，线性工资是现实中最常用的形式，例如有限合伙制私募基金公司中固定管理费加利润分成 (carry) 的工资形式以及传统公司制公司中固定薪资加绩效奖金 (或者公司股份) 的形式；其次，线性工资形式简单、可操作性较强；最后，线性工资形式简化了模型的求解过程，便于进行理论分析．

假设 3　委托人与代理人为理性人，具有理性预期，追求当期至末期期望效用总和最大化．在第 n 期中委托人目标函数为 $\sum\limits_{k=n}^{N} V_n$，代理人目标函数为 $\sum\limits_{k=n}^{N} U_n$．

假设 4　委托人为风险中性，效用函数取为 $v(x) = x$；代理人关于资本为风险规避，关于努力水平的边际效用为负且递减，效用函数取为 $u(x, a_n) = -e^{-\rho(x - b a_n^2)}$，其中 $\rho > 0$, $b > 0$ 为外生参数．

委托人作为投资人拥有足够多的资本从而可以进行分散投资以平衡风险，因此可以假设委托人为风险中性的．另一方面，代理人处于资本积累阶段，拥有的资本较少，很难像委托人一样进行分散投资从而对风险的承担能力较差，因此可以假设代理人为风险规避的．假设委托人和代理人的单期保留效用分别为外生参数 M 和 A．在任一期博弈中，参与约束满足如下假设：

假设 5　参与约束为均值参与约束，即当期至末期期望效用的均值不小于往期期望效用的均值．第 n 期公司制下代理人的均值参与约束：

$$\frac{1}{N-n+1}\sum_{k=n}^{N} U_k \geq \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} U_k, \qquad \sum_{k=1}^{0} U_k \equiv A;$$

第 n 期有限合伙制下委托人的均值参与约束：

$$\frac{1}{N-n+1}\sum_{k=n}^{N}V_k \geq \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}V_k, \qquad \sum_{k=1}^{0}V_k \equiv M.$$

均值参与约束意在刻画如下行为：对于没有工资设计权而只能选择接受或者拒绝合同的参与人，要求其未来的收益不低于过去的收益，这具有一定的现实意义，例如：在稳定的经济环境中，员工难以接受企业降薪、有限合伙人难以接受私募基金的收益率下降等等．值得注意的是，在参与人具有理性预期假设下，均值参与约束中 “过去 (ex post)” 的收益取为往期期望效用均值而不是往期效用均值．

在上述假设下，各模型外生变量为 b, ρ, σ, N, M, A, 内生变量为 a_n, δ_n, F_n 以及

$$\begin{aligned}
&V_n = E[v(\pi_n - s_n(\pi_n))] = (1-\delta_n)a_n - F_n;\\
&U_n = E[u(s_n(\pi_n), a_n)] = -\exp\Big[-\rho\Big(\delta_n a_n + F_n - b a_n^2 - \frac{1}{2}\rho\sigma^2\delta_n^2\Big)\Big].
\end{aligned} \tag{1}$$

两种机制的多期模型目标为求解上述假设下的多期最优契约．在均值参与约束下任一期双方的选择均会对之后所有期博弈产生影响，因此多期博弈为序贯博弈，在每一期合同签订均为完全信息动态子博弈，为求模型子博弈精炼纳什均衡解仍需要一个假设：委托人和代理人均为序贯理性的 (也可以看做包含在理性人假设内). 在此基础上多期模型可以使用逆向归纳法求解，在任一期模型中往期变量视为常量处理．

3 多期公司制模型

公司制下由委托人设计各期工资合同，以最大化其总期望效用为目标，同时满足代理人均值参与约束．另一方面，对于签订的工资合同，代理人选择使其总期望效用最大的努力水平，此条件称为激励相容约束．为说明多期情形下的道德风险问题，我们分别讨论最优和次优合同．

首先讨论事后信息对称的情形：若代理人的努力水平可观测，委托人可通过设计合同的惩罚条款来控制代理人努力水平，从而保证其期望效用达到最优，故而不需要激励相容约束，此时签订的合同称为最优合同．记 $G_{n-1} = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{l=1}^{n-1}U_l, G_0 = A$, 第 n 期模型为：

$$\begin{aligned}
\max_{\delta_n, F_n, a_n} \quad & \sum_{k=n}^{N} V_k,\\
\text{s.t.} \quad & \frac{1}{N-n+1}\sum_{k=n}^{N} U_k \geq G_{n-1}.
\end{aligned}$$

定理 1 公司制下的最优合同均衡解为：

$$\delta_n = 0, \qquad F_n = \frac{1}{4b} - \frac{1}{\rho}ln(-A), \qquad a_n = \frac{1}{2b};$$

$$U_n = A, \qquad V_n = \frac{1}{4b} + \frac{1}{\rho}\ln(-A).$$

证 使用倒向归纳法证明，作归纳假设如下：$\forall\, n, i \in Z^+$，$i < n \le N$, 有：

$$\begin{aligned}&\delta_n = 0, \qquad F_n = \frac{1}{4b} - \frac{1}{\rho}\ln(-G_{n-1}), \qquad a_n = \frac{1}{2b};\\&U_n = G_{n-1}, \qquad V_n = \frac{1}{4b} + \frac{1}{\rho}\ln(-G_{n-1}).\end{aligned} \tag{2}$$

第 i 期模型为：

$$\begin{aligned}&\max_{\delta_i, F_i, a_i} \quad \sum_{k=i}^{N} V_k,\\&\text{s.t.} \quad \frac{1}{N-i+1}\sum_{k=i}^{N} U_k \ge G_{i-1}.\end{aligned} \tag{3}$$

由 (2) 易知 $U_n = G_i$，$V_n = \frac{1}{4b} + \frac{1}{\rho}\ln(-G_i)$, 对 (3) 建立拉格朗日方程并求导，经简单计算立得 (2) 对 $n = i$ 成立，易验证 (2) 对 $n = N$ 成立. 因此 (2) 对 $\forall n \in Z^+$，$n < N$ 成立，由此得 $G_n = G_0 = A$. 证毕.

注 1 此时均衡策略为静态策略：工资构成中只有固定工资，风险全部由委托人承担，代理人获得保留效用，产出的剩余归委托人所有. 因为不存在信息不对称，代理人拥有利润分成也会承担相应的风险，需要做出补偿， Pareto 最优下，所有风险均由风险中性的委托人承担.

现在讨论事后信息不对称的情形：现实中代理人的努力水平不可观测，委托人只能观测到产出的实现值. 为保证其期望效用达到最优，委托人需要设计工资合同以激励代理人选择对委托人更有利的努力水平. 合同签订时为完全信息博弈，均衡只能在激励相容约束下达到，此时签订的合同称为次优合同. 记 $G_{n-1} = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{l=1}^{n-1} U_l$，$G_0 = A$, 第 n 期模型为：

$$\begin{aligned}&\max_{\delta_n, F_n} \quad \sum_{k=n}^{N} V_k,\\&\text{s.t.} \quad a_n \in \arg\max_{a_n} \sum_{k=n}^{N} U_k,\\&\qquad\ \frac{1}{N-n+1}\sum_{k=n}^{N} U_k \ge G_{n-1}.\end{aligned}$$

定理 2 公司制下的次优合同均衡解为：

$$\begin{aligned}&\delta_n = \frac{1}{1+2b\rho\sigma^2}, \qquad F_n = -\frac{1}{\rho}\ln(-A) - \frac{1-2b\rho\sigma^2}{4b(1+2b\rho\sigma^2)}, \qquad a_n = \frac{1}{2b(1+2b\rho\sigma^2)};\\&U_n = A, \qquad V_n = \frac{1}{4b(1+2b\rho\sigma^2)} + \frac{1}{\rho}\ln(-A).\end{aligned}$$

证 使用倒向归纳法证明，作归纳假设如下： $\forall n, i \in Z^{+}$, $i < n \le N$ 有：

$$\delta_n = \frac{1}{1+2b\rho\sigma^2}, \qquad F_n = -\frac{1}{\rho}\ln(-G_{n-1}) - \frac{1-2b\rho\sigma^2}{4b(1+2b\rho\sigma^2)}, \qquad a_n = \frac{1}{2b(1+2b\rho\sigma^2)};$$
$$U_n = G_{n-1}, \qquad V_n = \frac{1}{4b(1+2b\rho\sigma^2)} + \frac{1}{\rho}\ln(-G_{n-1}). \tag{4}$$

由 (4) 易知 $U_n = G_i$, $V_n = \frac{1}{4b(1+2b\rho\sigma^2)} + \frac{1}{\rho}\ln(-G_i)$, 下证 (4) 对 $n = i$ 成立. 第 i 期模型为：

$$\begin{aligned} &\max_{\delta_i, F_i} \quad \sum_{k=i}^{N} V_k, \\ &\text{s.t.} \quad a_i \in \arg\max_{a_i} \sum_{k=i}^{N} U_k, \\ &\qquad\quad \frac{1}{N-i+1}\sum_{k=i}^{N} U_k \ge G_{i-1}. \end{aligned} \tag{5}$$

由 $\forall a_i, \frac{\partial^2}{\partial a_i^2}\sum\limits_{k=i}^{N} U_k < 0$ 对任意的 δ_i, F_i 成立，以及 $\frac{\partial}{\partial a_i}\sum\limits_{k=i}^{N} U_k = 0 \Rightarrow a_i = \frac{\delta_i}{2b}$ 知： $a_i \in \arg\max\limits_{a_i}\sum\limits_{k=i}^{N} U_k \Leftrightarrow a_i = \frac{\delta_i}{2b}$, 代入 (5) 并构造拉格朗日函数 $L = \sum\limits_{k=i}^{N} V_k + \mu_i \frac{1}{N-i+1}\big(\sum\limits_{k=i}^{N} U_k - G_{i-1}\big)$, 分别求导得：

$$\begin{aligned} &\delta_i = \frac{1}{1+2b\rho\sigma^2}, \qquad F_i = -\frac{1}{\rho}\ln(-G_{i-1}) - \frac{1-2b\rho\sigma^2}{4b(1+2b\rho\sigma^2)}; \\ &a_i = \frac{1}{2b(1+2b\rho\sigma^2)}, \qquad \mu_i = -\frac{1}{N}\Big(\frac{1}{\rho U_i} + \frac{N-i}{i\rho G_i}\Big) > 0; \\ &U_i = G_{i-1}, \qquad V_i = \frac{1}{4b(1+2b\rho\sigma^2)} + \frac{1}{\rho}\ln(-G_{i-1}). \end{aligned}$$

因此， (4) 对 $n = i$ 成立，同法易验证 (4) 对 $n = N$, $N-1$ 成立. 因此 (4) 对 $\forall n$, $n \in Z^{+}$ 成立，由此得 $G_n = G_0 = A$. 证毕.

注 2 此时均衡策略为静态策略：次优合同产生了风险的分担，其比例与代理人的能力有关. 在次优合同下努力水平低于最优合同下的努力水平，说明公司制下存在道德风险问题，即在事后信息不对称以及双方收益函数不一致导致双方达不到最优效率. 此外均值参与约束下的均衡策略与定值参与约束下的策略相同，说明均值参与约束并没有对委托人造成影响，一定程度上说明了公司制激励不足的问题.

4 多期有限合伙制模型

有限合伙制下由代理人设计各期工资合同，以最大化其总期望效用为目标，同时满足委托人的参与约束. 对于签订的工资合同，代理人会选择在此工资下使其总期望效用最大化的努力水平，此条件称为激励相容约束. 有限合伙制下由于工资合同和努力水平

均为代理人控制，问题转变为委托人参与约束的有效性问题．为说明多期情形下的道德风险问题，我们分别讨论最优和次优合同．

首先讨论事后信息对称的情形：此时代理人的努力水平可观测，委托人同样可以通过合同的惩罚条款来控制努力水平，从而保证其参与约束有效，故而不需要激励相容约束，此时签订的合同为最优合同．记 $H_{n-1}=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{l=1}^{n-1}V_l$，$H_0=M$，第 n 期模型为：

$$\begin{aligned}&\max_{\delta_n,F_n,a_n}\quad \sum_{k=n}^{N}U_k\\&\text{s.t.}\quad \frac{1}{N-n+1}\sum_{k=n}^{N}V_k\geq H_{n-1}.\end{aligned}$$

定理 3　有限合伙制下的最优合同均衡解为：

$$\begin{aligned}&\delta_n=0,\qquad F_n=\frac{1}{2b}-M,\qquad a_n=\frac{1}{2b};\\&U_n=-e^{-\rho(\frac{1}{4b}-M)},\qquad V_n=M.\end{aligned}$$

证　使用倒向归纳法证明，作归纳假设如下：$\forall n,i\in Z^+$，$i<n\leq N$ 有：

$$\begin{aligned}&\delta_n=0,\qquad F_n=\frac{1}{2b}-H_{n-1},\qquad a_n=\frac{1}{2b};\\&U_n=-e^{-\rho(\frac{1}{4b}-H_{n-1})},\qquad V_n=H_{n-1}.\end{aligned}\tag{6}$$

第 i 期模型为：

$$\begin{aligned}&\max_{\delta_i,F_i,a_i}\quad \sum_{k=i}^{N}U_k,\\&\text{s.t.}\quad \frac{1}{N-i+1}\sum_{k=i}^{N}V_k\geq H_{i-1}.\end{aligned}\tag{7}$$

由 (6) 易知 $U_n=-e^{-\rho(\frac{1}{4b}-H_i)}$，$V_n=H_i$，对 (7) 建立拉格朗日方程并求导，经简单计算立得 (6) 对 $n=i$ 成立，同法易验证 (6) 对 $n=N$ 成立．因此 (6) 对 $\forall n\in Z^+,n<N$ 成立，由此得 $H_n=H_0=M$．证毕．

注 3　此时均衡策略为静态策略：工资构成中，只有固定工资，风险全部由委托人承担，委托人获得保留效用，产出的剩余归代理人所有．

现在讨论事后信息不完全的情形：现实中委托人只能观测到产出的实现值，无法保证其参与约束有效，此时激励相容约束保证了委托人参与约束的有效性：在完全信息博弈中，委托人的策略变为根据参与约束来选择接受或者拒绝代理人制定的工资合同，对于任意的工资合同，委托人知道代理人必定选择最大化代理人总期望效用的努力水平，即满足激励相容约束，因此委托人的策略为接受如下工资合同集合内的工资合同：

$$Q=\Big\{s_n\Big|\frac{1}{N-n+1}\sum_{k=n}^{N}V_k(s_n,a^*)\geq H_{n-1},\ \text{其中}\ a^*\in\arg\max_{a_n}\sum_{k=n}^{N}U_k\Big\}.$$

由于在 Q 之外的 s_n 委托人均不接受，此时代理人的策略为选择 $(s_n,a_n)\in Q\times R$ 最大化 $\sum\limits_{k=n}^{N}U_k$, 可以看出最大值点必然落在 Q 中，因此存在均衡解，此时签订的合同称为次优合同．记 $H_{n-1}=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{l=1}^{n-1}V_l$, $H_0=M$, 第 n 期模型为：

$$\begin{aligned}
\max_{\delta_n,F_n}\quad & \sum_{k=n}^{N}U_k\\
\text{s.t.}\quad & a_n\in\arg\max_{a_n}\sum_{k=n}^{N}U_k\\
& \frac{1}{N-n+1}\sum_{k=n}^{N}V_k\geq H_{n-1}
\end{aligned}$$

定理 4 有限合伙制下的次优合同均衡解为：

$$\begin{aligned}
&F_n=(1-\delta_n)\,\frac{1-\sqrt{2b\rho\sigma^2\delta_n(1-\delta_n)}}{2b}-M;\\
&a_n=\frac{1-\sqrt{2b\rho\sigma^2\delta_n(1-\delta_n)}}{2b};\\
&U_n=-e^{-\rho(\frac{1}{4b}-\frac{1}{2}\rho\sigma^2\delta_n-M)};\\
&V_n=M.
\end{aligned}$$

其中 $\delta_N=\frac{1}{1+2b\rho\sigma^2}$, 以及 $\forall n<N$, δ_n 由下列倒向递推关系式唯一确定：

$$n\left(\sqrt{\frac{2b\rho\sigma^2\delta_n}{1-\delta_n}}-1\right)e^{\frac{1}{2}\rho^2\sigma^2\delta_n}=\sum_{k=n+1}^{N}e^{\frac{1}{2}\rho^2\sigma^2\delta_k}. \tag{8}$$

证 使用倒向归纳法证明，作归纳假设如下： $\forall n,i\in Z^+$, $i<n\leq N$ 有：

$$\begin{aligned}
&F_n=(1-\delta_n)\frac{1-\sqrt{2b\rho\sigma^2\delta_n(1-\delta_n)}}{2b}-H_{n-1};\\
&a_n=\frac{1-\sqrt{2b\rho\sigma^2\delta_n(1-\delta_n)}}{2b};\\
&U_n=-e^{-\rho(\frac{1}{4b}-\frac{1}{2}\rho\sigma^2\delta_n-H_{n-1})};\\
&V_n=H_{n-1}.
\end{aligned}\tag{9}$$

其中 $\delta_N=\frac{1}{1+2b\rho\sigma^2}$, 以及 $\forall i<n<N$, δ_n 由 (8) 唯一确定.

下证 (9) 对 $n=i$ 成立，以及 δ_i 由 (8) 唯一确定．首先由 (9) 易知 $\forall n\in Z^+$, $i<n\leq N$, $U_n=-e^{-\rho(\frac{1}{4b}-H_i)}$, $V_n=H_i$, 则第 i 期模型可简化为：

$$\max_{\delta_i,F_i}\quad \sum_{k=i}^{N}U_k,$$

$$\text{s.t.}\quad a_i \in \arg\max_{a_i} \sum_{k=i}^{N} U_k, \qquad (10)$$
$$V_i \geq H_{i-1}.$$

记 $d(a_i) = \frac{\partial}{\partial a_i} \sum\limits_{k=i}^{N} U_k$, 则有

$$d(a_i) = -\rho(\delta_i - 2ba_i)U_i + \rho\frac{1-\delta_i}{i} \sum_{k=n+1}^{N} U_k,$$

由于 $d(a_i) = 0$ 无显式解，需要证明其解存在且唯一．易知 $d(a_i)$ 连续可微，且有：

$$\begin{aligned}
&\delta_i > 1 \Rightarrow d\Big(\frac{\delta_i}{2b}\Big) > 0, \qquad d(+\infty) = +\infty;\\
&\delta_i < 1 \Rightarrow d\Big(\frac{\delta_i}{2b}\Big) < 0, \qquad d(-\infty) = +\infty;\\
&\delta_i = 1 \Rightarrow d\Big(\frac{\delta_i}{2b}\Big) = 0.
\end{aligned}$$

故 $d(a_i) = 0$ 的解存在，且对任意的 δ_i, F_i 和 a_i 有：

$$\frac{\partial^2}{\partial a_i^2} \sum_{k=i}^{N} U_k = 2b\rho U_i + \rho^2(\delta_i - 2ba_i)^2 U_i + \rho^2\Big(\frac{1-\delta_i}{i}\Big)^2 \sum_{k=n+1}^{N} U_k < 0.$$

由此知 $d(a_i) = 0$ 的解唯一，因此有：

$$a_i \in \arg\max_{a_i} \sum_{k=i}^{N} U_k \Longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial a_i} \sum_{k=i}^{N} U_k = 0$$

以及 (10) 的解满足

$$(\delta_i - 2ba_i)U_i = \frac{1-\delta_i}{i} \sum_{k=n+1}^{N} U_k. \qquad (11)$$

此时 (10) 可变为：

$$\max_{\delta_i, F_i, a_i} \quad \sum_{k=i}^{N} U_k,$$
$$\text{s.t.}\quad \frac{\partial}{\partial a_i} \sum_{k=i}^{N} U_k = 0, \qquad (12)$$
$$V_i \geq H_{i-1}.$$

对 (12) 构造拉格朗日函数

$$L_i = \sum_{k=i}^{N} U_k + \lambda_i \frac{\partial}{\partial a_i} \sum_{k=i}^{N} U_k + \mu_i (V_i - H_{i-1}).$$

分别求导得：

$$\frac{\partial L_i}{\partial F_i}=0\Rightarrow \mu_i=-\rho U_i+\lambda_i\rho^2\frac{i-1}{i}(\delta_i-2ba_i)U_i-\frac{\rho}{i}\sum_{k=i+1}^{N}U_k; \tag{13}$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial \delta_i}=0\Rightarrow \rho U_i\big(\rho\sigma^2\delta_i-\lambda_i-\lambda_i\rho^2\sigma^2\delta_i(\delta_i-2ba_i)\big)=\frac{\lambda_i\rho}{i}\sum_{k=i+1}^{N}U_k; \tag{14}$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial a_i}=0\Rightarrow \lambda_i[2b+\rho(\delta_i-2ba_i)(1-2ba_i)]=1-2ba_i. \tag{15}$$

为进一步求解需证明以下命题：

命题 1 (12) 的激励相容约束为紧，即 $\lambda_i\neq 0$ 且 (12) 的解满足 $\delta_i\neq 0$, $\delta_i\neq 1$, $1-2ba_i\neq 0$.

证 假设命题 1 不成立，由 (15) 知 $\lambda_i=0\Leftrightarrow 1-2ba_i=0$, 由 (11) 知 $1-2ba_i=0\Leftrightarrow \delta_i=1$, 由 (14) 知 $\lambda_i=0\Leftrightarrow\delta_i=0$, 因此有 $\delta_i=0\Leftrightarrow\lambda_i=0\Leftrightarrow 1-2ba_i=0\Leftrightarrow\delta_i=1$, 导致矛盾. 证毕.

命题 2 (12) 的解满足 $(\delta_i-2ba_i)(1-2ba_i)>0$.

证 由命题 1 和 (11) 知 $(\delta_i-2ba_i)(1-\delta_i)>0$, 由此得：

$$(\delta_i-2ba_i)(1-2ba_i)=(\delta_i-2ba_i)(1-\delta_i)+(\delta_i-2ba_i)^2>0.$$

证毕.

命题 3 (12) 的参与约束为紧，即 $\mu_i>0$.

证 由命题 1, 命题 2, (13) 和 (15) 有：

$$\mu_i=\rho U_i\frac{1-2ba_i}{1-\delta_i}\Big(\frac{-\frac{i-1}{i}\rho(\delta_i-2ba_i)^2-2b\frac{i-1}{i}}{2b+\rho(\delta_i-2ba_i)(1-2ba_i)}-\frac{1}{i}\Big),$$

再由命题 2 知 $(1-2ba_i)(1-\delta_i)=(\delta_i-2ba_i)(1-\delta_i)+(1-\delta_i)^2>0\Rightarrow\frac{1-2ba_i}{1-\delta_i}>0$, 由此立得 $\mu_i>0$. 证毕.

现在继续证明定理 4, 由命题 3 立得：

$$\mu_i>0\Rightarrow V_i=H_{i-1}\Rightarrow H_i=H_{i-1}\Rightarrow F_i=(1-\delta_i)a_i-H_{i-1}. \tag{16}$$

由命题 1, 可联立 (14) 和 (15) 消去 λ_i, 化简得：

$$2b\rho\sigma^2\delta_i(1-\delta_i)=(1-2ba_i)^2,$$

由上式立得 $\delta_i\in(0,1)$, 再由 (17) 和命题 2 知 $1-2ba_i>0$, 因此得：

$$a_i=\frac{1-\sqrt{2b\rho\sigma^2\delta_i(1-\delta_i)}}{2b}. \tag{17}$$

将 (16) 和 (17) 代入 (11) 得：

$$i\Big(\sqrt{\frac{2b\rho\sigma^2\delta_i}{1-\delta_i}}-1\Big)\,e^{\frac{1}{2}\rho^2\sigma^2\delta_i}=\sum_{k=i+1}^{N}e^{\frac{1}{2}\rho^2\sigma^2\delta_k}.$$

记 $f_i(x)$ 如下：

$$f_i(x)=i\Big(\sqrt{\frac{2b\rho\sigma^2\delta_i}{1-\delta_i}}-1\Big)e^{\frac{1}{2}\rho^2\sigma^2\delta_i}-\sum_{k=i+1}^{N}e^{\frac{1}{2}\rho^2\sigma^2\delta_k},$$

则 δ_i 为 $f_i(x)=0$ 的解，还需证明 $f_i(x)=0$ 有唯一解：由 (9) 知 $\forall k>i$，δ_k 为有限实数，则 $f_i(x)$ 为 $[0,1)$ 上的连续可微函数，且 $f_i(x)=0$ 仅在 $(\delta_N,1)$ 上有解．再由 $f_i'>0$，$f_i(\delta_N)<0$，$f_i(1)=+\infty$ 知 $f_i(x)=0$ 的解存在且唯一，因此 δ_i 由 (8) 唯一确定．最后由 (16) 和 (17) 知

$$\begin{aligned}&U_i=-e^{-\rho(\frac{1}{4b}-\frac{1}{2}\rho\sigma^2\delta_i-H_{i-1})};\\&F_i=(1-\delta_i)\frac{1-\sqrt{2b\rho\sigma^2\delta_i(1-\delta_i)}}{2b}-H_{i-1}.\end{aligned}$$

综上所述，归纳假设对 $n=i$ 成立，同法易验证归纳假设对 $n=N,N-1$ 成立，因此归纳假设对 $\forall n\in Z^+$，$n\le N$ 成立，由此得 $H_n=H_0=M$．证毕．

下面介绍关于解的性质的几个命题．记 $g(x),h(x)$ 如下：

$$g(x)=\sqrt{\frac{2b\rho\sigma^2x}{1-x}}-1,\qquad h(x)=g(x)e^{\frac{1}{2}\rho^2\sigma^2x}.$$

易知 g,h 为 $\big(\frac{1}{1+2b\rho\sigma^2},1\big)$ 上连续可微单调增函数．

命题 4　$\forall n\in Z^+$，$n<N$，$\delta_n\in\big(\frac{1}{1+2b\rho\sigma^2},1\big)$，且 δ_n 随期递减，U_n 随期递增．

证　由定理 4 知，δ_n 为 (8) 的解，而 (8) 仅在 $(\delta_N,1)$ 上有解，因此 $\delta_n\in\big(\frac{1}{1+2b\rho\sigma^2},1\big)$；再由 (8) 知：

$$h(\delta_n)-h(\delta_{n+1})=\frac{1}{n}\sqrt{\frac{2b\rho\sigma^2\delta_{n+1}}{1-\delta_{n+1}}}\,e^{\frac{1}{2}\rho^2\sigma^2\delta_{n+1}}>0.$$

由此以及 $h'(x)>0$ 立得 δ_n 随期递减，再由定理 4 得 U_n 随期递增．证毕．

命题 5　$\forall n\in Z^+$，$n<N$ 有 $\delta_n<\frac{1}{1+\frac{n^2}{N^2}2b\rho\sigma^2}$，以及

$$\lim_{N\to+\infty}\delta_n=1,\qquad\lim_{N\to+\infty}\delta_{N-n}=\frac{1}{1+2b\rho\sigma^2}.$$

证　易知 $g'>0$，$h'>0$，$g(1)=h(1)=+\infty$，$g\big(\frac{1}{1+2b\rho\sigma^2}\big)=0$，再由定理 4 以及命题 4

知：

$$\begin{aligned}
g(\delta_n) =& \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{N} e^{\frac{1}{2}\rho^2\sigma^2(\delta_k-\delta_n)} < \frac{N-n}{n} \Rightarrow \delta_n < \frac{1}{1+\frac{n^2}{N^2}2b\rho\sigma^2};\\
g(\delta_{N-n}) =& \frac{1}{N-n}\sum_{k=N-n+1}^{N} e^{\frac{1}{2}\rho^2\sigma^2(\delta_k-\delta_{N-n})} < \frac{n}{N-n} \overset{N\to+\infty}{\to} 0\\
& \Rightarrow \lim_{N\to+\infty}\delta_{N-n} = \frac{1}{1+2b\rho\sigma^2};\\
h(\delta_n) =& \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{N} e^{\frac{1}{2}\rho^2\sigma^2\delta_k} > \frac{N-n}{n} e^{\frac{1}{2}\rho^2\sigma^2\delta_N} \overset{N\to+\infty}{\to} +\infty\\
& \Rightarrow \lim_{N\to+\infty}\delta_n = 1.
\end{aligned}$$

证毕.

命题 6 任取 $n \in Z^+$, $n < N$ 有 $a_n < \frac{1}{2b}$ 且有：

$$\forall N \in Z+, \qquad N > 1, \qquad a_n > \frac{1}{2b(1+2b\rho\sigma^2)} \Longleftrightarrow 2b\rho\sigma^2 \le 1.$$

证 由 (17) 立得 $a_n < \frac{1}{2b}$, 以及：

$$a_n > \frac{1}{2b(1+2b\rho\sigma^2)} \Longleftrightarrow \begin{cases} \delta_n > \dfrac{1}{1+2b\rho\sigma}, & 2b\rho\sigma \le 1.\\ \delta_n > \dfrac{2b\rho\sigma}{1+2b\rho\sigma}, & 2b\rho\sigma > 1.\end{cases}$$

若 $2b\rho\sigma \le 1$, 由命题 4 知上式自然成立；若 $2b\rho\sigma > 1$, 由 (8) 知对任意的 $2b\rho\sigma > 1$ 总存在 N^* 使得 $\delta_{N^*-1} < \frac{2b\rho\sigma}{1+2b\rho\sigma}$, 再由 $2b\rho\sigma$ 任意性即得命题成立．证毕.

注 4 此时均衡策略为动态策略：首先，次优合同里产生了动态的风险分担，代理人承担的风险逐期下降，但均大于公司制下的风险分担比率，并且随着期数增大代理人承担风险的比例增大，说明均值参与约束在有限合伙制下对代理人产生影响且发挥了激励作用；其次，在次优合同下代理人努力水平低于最优合同下的努力水平，说明有限合伙制仍存在道德风险问题，但解的性质说明当代理人能力足够高时在有限合伙制下努力水平高于公司制次优合同下的努力水平，这意味着有限合伙制更高的激励程度使得代理人付出了更多努力，因此对道德风险问题有一定改善.

5 机制选择

真正的问题在于，面对两种机制博弈双方要如何选择？在理性人假设下，双方的目标均为最大化自己的总期望效用，因此双方都会选择使自己总期望效用更大的机制．哪种机制下的总期望效用更大，显然取决于双方各自保留效用的关系．如果一方处于优势地位，那么另一方只能遵从其选择，如果双方处于平等地位，则在一种机制下双方总期望效用均大于另外一种时才能达成平等协议．两种机制下双方总期望效用如下表：

	代理人	委托人
公司制	$N\cdot A$	$N\Big(\dfrac{1}{4b(1+2b\rho\sigma^2)}+\dfrac{1}{\rho}\ln(-A)\Big)$
有限合伙制	$-\sum\limits_{k=1}^{N}e^{-\rho(\frac{1}{4b}-\frac{1}{2}\rho\sigma^2\delta_k-M)}$	$N\cdot M$

假设 $N>1$, 由命题 4 立得：

情形 1　双方均选择公司制.

此时由

$$NA\geq-\sum_{k=n}^{N}e^{-\rho(\frac{1}{4b}-\frac{1}{2}\rho\sigma^2\delta_k-M)},\qquad N\Big(\frac{1}{4b(1+2b\rho\sigma^2)}+\frac{1}{\rho}\ln(-A)\Big)\geq NM,$$

得：

$$A\in\Big[-\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}e^{-\rho\left(\frac{1}{4b}-\frac{1}{2}\rho\sigma^2\delta_k-M\right)},-e^{-\rho\left(\frac{1}{4b}-\frac{1}{2}\rho\sigma^2\delta_N-M\right)}\Big].$$

情形 2　双方均选择有限合伙制.

此时由

$$NA\leq-\sum_{k=1}^{N}e^{-\rho(\frac{1}{4b}-\frac{1}{2}\rho\sigma^2\delta_k-M)},\qquad N\Big(\frac{1}{4b(1+2b\rho\sigma^2)}+\frac{1}{\rho}\ln(-A)\Big)\leq NM.$$

得 $A\in\emptyset$.

上述结果表明，在均值参与约束下和线性契约假设下，若委托人与代理人处于平等地位，无论双方保留效用关系如何，多期有限合伙制都不是他们最优选择；另一方面，当双方保留效用满足特定条件时，多期公司制是双方最优选择.

6　结论

本文建立了均值参与约束下的多期公司制与有限合伙制模型并解得最优线性契约，我们的研究得出以下结论：第一，多期最优线性契约在公司制下为静态策略，而在有限合伙制下为动态策略，且具有更高的激励程度；第二，两种机制下均存在道德风险问题，但在有限合伙制因激励程度更高而有部分改善；第三，处于平等地位的博弈参与人仅能在满足一定关系时于公司制下达成平等协议，而在有限合伙制下平等协议无法实现. 前两点说明有限合伙制在激励方面具有一定的优越性，而在现实中高激励带来的高竞争力往往成为企业在激烈竞争中持续发展的关键；第三点则说明有限合伙制企业中双方地位必然不平等或者一方愿意承受利益的损失. 在现实中有限合伙制公司大多集中在高技术高风险领域，由职业经理人本身知识技能带来的高度私有信息往往会造成代理人与委托人地位上的不对等.

致谢 感谢审稿人提出的宝贵建议！

参 考 文 献

[1] Wilson R B. The Structure of Incentives for Decentralization under Uncertainty. Paris: La Decision, 1969

[2] Spence M, Zeckhauser R. Insurance, Information and Individual Action. *The American Economic Review*, 1971, 61(2): 380–387

[3] Ross S A. The Economic Theory of Agency: The Principal's Problem. *The American Economic Review*, 1973, 63(2): 134–139

[4] Mirrlees J A. Notes on Welfare Economics, Information and Uncertainty. *Essays on Economic Behavior under Uncertainty*, 1974: 243–261

[5] Mirrlees J A. The Theory of Moral Hazard and Unobservable Behaviour: Part I. *The Review of Economic Studies*, 2010, 66(1): 3–21

[6] Mirrlees J A. The Optimal Structure of Incentives and Authority within an Organization. *The Bell Journal of Economics*, 1976, 7(1): 105–131

[7] Holmstrom B. Moral Hazard and Observability. *Bell Journal of Economics*, 1979, 10(1): 74–91

[8] Holmstrom B. Managerial incentive problems: A dynamic perspective. *The Review of Economic Studies*, 1999, 66(1): 169–182

[9] Milgrom P R. Good News and Bad News: Representation Theorems and Applications. *The Bell Journal of Economics*, 1981, 12(2): 380–391

[10] Grossman S J, Hart O D. An Analysis of the Principal-Agent Problem. *Econometrica*, 1983, 51(1): 7–45

[11] Rogerson W P. The First-Order Approach to Principal-Agent Problems. *Econometrica*, 1985, 53(6): 1357–1368

[12] Jewitt I. Justifying the First-Order Approach to Principal-Agent Problems. *Econometrica*, 1988, 56(5): 1177–1190

[13] Radner R. Monitoring Cooperative Agreements in a Repeated Principal-Agent Relationship. *Econometrica*, 1981, 49(5): 1127–1148

[14] Radner R. Repeated Principal-Agent Games with Discounting. *Econometrica*, 1985, 53(5): 1173–1198

[15] Radner R. Repeated Moral Hazard with Low Discount Rates. Uncertainty, Information, and Communication Essays in honor of Kenneth J. Arrow, Vol. 3, Cambridge, 1986

[16] Dutta P K, Radner R. Moral hazard. Handbook of game theory with Economic Applications, North-Holland: Vol 2, 1994, 869–903

[17] Lambert R A. Long-term contracts and moral hazard. *The Bell Journal of Economics*, 1983, 14(2): 441–452

[18] Rogerson W P. Repeated moral hazard. *Econometrica*, 1985, 53(1): 69–76

[19] Mukoyama T, Şahin A Repeated Moral Hazard with Persistence. *Economic Theory*, 2005, 25(4): 831–854

[20] Jarque A. Repeated Moral Hazard with Effort Persistence. *Journal of Economic Theory*, 2011, 145(6): 2412–2423

[21] Thomas J, Worral T. Income Fluctuation and Asymmetric Information: An Example of a Repeated Principal-Agent Problem. *Journal of Economic Theory*, 2005, 51(2): 367–390

[22] Gompers P, Lerner J. The Use of Covenants: An Empirical Analysis of Venture Partnership Agreements. *Journal of Law and Economics*, 1996, 39(2): 463–498

[23] Robinson D T, Sensoy B A. Do Private Equity Fund Managers Earn Their Fees? Compensation, Ownership, and Cash Flow Performance. *Review of Financial Studies*, 2013, 26(11): 2760–2797

[24] 倪宣明，武康平，黄嵩. 私募基金合伙人契约研究. 经济理论与经济管理, 2015, 35(4): 104–112 (Ni X M, Wu K P, Huang S. Research on the Partners' Contract in Private Equity Funds. *J. Economic Theory and Business Management*, 2015, 35(4): 104–112)

Repeated Moral Hazard and Mechanism Selection Between Limited Partnership and Corporate System

NI Xuanming

(*School of Software and Microelectronics, Peking University, Beijing* 100871*, China*)

WU Chen

(*Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100190*, China*)

(*E-mail: wuchen12@mails.ucas.ac.cn*)

ZHAO Huimin

(*School of Business, Sun Yat-sen University, Guangzhou* 510275, China)

Abstract Based on game theory and Principal-agent theory, this article studies dynamic moral hazard models between corporate system and limited partnership, and analyzes principal and agent's optimal choice between mechanisms. The results indicate that moral hazard occurs in both mechanisms while there are improvements in limited partnership. Comparing the two mechanisms under certain conditions, the corporate system can be the best choice to principal and agent. However, limited partnership can't be principal and agent's common choice when they are of equal status.

Key words limited partnership; principal-agent problem; moral hazard; complete information game

MR(2000) Subject Classification 91A25

Chinese Library Classification O29