第 41 卷 第 2 期 应 用 数 学 学 报 Vol. 41 No. 2
2018 年 3 月 ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA March, 2018

Berge 极大值逆定理与 Nash 平衡定理 *

丘小玲 贾文生 †

(贵州大学数学与统计学院，贵阳 550025)

(E-mail: †jws0505@163.com)

摘 要 本文运用 Berge 极大值逆定理和 Nash 平衡定理，通过构造适当的支付函数，直接推导出了拟变分不等式、广义变分不等式、 Von Neumann 引理，以及 Gale-Nikaido-Debreu 引理的推广定理．同时也提供了一个将上半连续凸紧值的集值映射问题转化为一个二元函数来处理的方法．这些结果和证明方法都是新的．

关键词 Berge 极大值逆定理； Nash 平衡定理；拟变分不等式； Von Neumann 引理； Gale-Nikaido-Debreu 引理的推广定理；伪连续

MR(2000) 主题分类 54C60; 91A10; 91B02

中图分类 O177

1 引言

早在 1959 年， Berge[1] 提出了一个应用非常广泛的极大值定理 (后来被称为 Berge 极大值定理), 其为优化问题、数理经济学和博弈论中有关问题解的存在性提供了一个重要的工具，同时也是集值分析中最重要的定理之一． Berge 极大值定理的表述如下：

定理 1.1 (Berge 极大值定理 [1]) 设 X 是 n 维欧氏空间 R^n 中的子集， Y 是 m 维欧氏空间 R^m 中的子集． $u: X\times Y\to R$ 是连续的，集值映射 $S: X\to P_0(Y)$ 连续，$P_0(Y)$ 表示 Y 中所有非空子集全体， $\forall x\in X$, $S(x)$ 具有非空紧集，则集值映射

$$K(x)=\{y\in S(x): u(x,y)=\max_{v\in S(x)} u(x,v)\},\qquad \forall x\in X$$

是上半连续的且具有非空凸紧值．

显然，定理 1.1 中最优解集映射是一个集值映射，并且是上半连续的具有非空凸紧值的集值映射．基于上半连续集值映射的普遍性和 Berge 极大值定理的重要性，自然

本文 2016 年 5 月 10 日收到． 2018 年 1 月 23 日收到修改稿．

* 国家自然科学基金 (No.11561013, 71461003,11661019), 人社部留学归国人员择优项目 (No. 2015192), 贵州省科技厅联合基金 (黔科合 LH 字 [2014]7643, [2016]7425) 和贵州大学引进人才基金 (No.201405) 资助．

† 通讯作者．

的，一些学者考虑其逆问题：一个具有凸紧值的上半连续的集值映射是否可以对应一个二元函数，使得该二元函数是连续的，其最优解值恰好是给定的集值映射？ 1997 年，Komiya[2] 首先在有限维欧氏空间 R^n 中回答了这个问题，指出这样的二元函数存在并且该二元函数对于固定的第一变量，对第二变量来说是拟凹的，这个结果随后被称为 Berge 极大值逆定理. Komiya 利用 Berge 极大值逆定理证明了 Kakutani 不动点定理. 随后 Zhou[3] 给出了 Berge 极大值逆定理的另一个简洁证明. 2001 年， Park 和 Komiya[4] 将 [2] 有限维中的 Berge 极大值逆定理结果推广到一般的拓扑空间中，并将其应用到一些著名的不动点定理如 Brouwer 不动点、 Schauder 不动点、 Kakutani 不动点定理等证明.

2016 年，俞等 [5] 借助 Berge 极大值逆定理这一工具，利用 Nash 平衡定理直接导出了 Brouwer 不动点定理、 Kakutani 不动点定理和 KKM 引理. 这些结果是深刻的，因为以往的证明都是由不动点定理推导出 Nash 平衡定理，逆向证明却从未出现， [5] 的工作弥补了这一罅隙. [5] 还探讨了 Nash 平衡定理与数理经济学上的 Walras 均衡定理 (超需映射是集值映射和单值映射) 等关系. 受 [5] 的启发，本文将利用 Berge 极大值逆定理和 Nash 平衡定理，通过构造适当的支付函数，直接证明 Von-Neumann 引理、拟变分不等式、 Gale-Nikaido-Debreu 引理的推广定理等结果，又由于很多结果是在更弱的条件下得到的，因此这些结果都是新的.

2 预备知识

首先，我们需要关于集值映射的有关概念和引理 [6,7].

定义 2.1 设 X 和 Y 是两个拓扑空间， $P_0(Y)$ 表示 Y 中所有非空子集全体，$F: X \to P_0(Y)$ 是一个集值映射， $x \in X$.

(1) 称 F 在 x 是上半连续的，如果对 Y 中的任一开集 G, $G \supset F(x)$, 存在 x 的开邻域 $O(x)$, 使 $\forall x' \in O(x)$ 有 $G \supset F(x')$;

(2) 称 F 在 x 是下半连续的，如果对 Y 中的任一开集 G, $G \cap F(x) \neq \emptyset$, 存在 x 的开邻域 $O(x)$, 使 $\forall x' \in O(x)$, 有 $G \cap F(x') \neq \emptyset$;

(3) 称 F 在 x 是连续的，如果 F 在 x 既上半连续的又下半连续的;

(4) 称 F 在 X 上是连续的，如果 F 在 X 中的每一点既上半连续的又下半连续的;

(5) 称 F 是一个闭映射，如果 F 的图 $\mathrm{Graph}\,(F) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}$ 是 $X \times Y$ 中的闭集.

引理 2.1[7] 如果 $F: X \to P_0(Y)$ 是闭映射且 Y 是紧集，则 F 必是一个上半连续的紧值映射.

定义 2.2[8] 设 X 是拓扑空间， $f: X \to R$ 是一个实值函数.

(1) 称 f 在 $x_0 \in X$ 是上伪连续的，如果对所有的 $x \in X$, 使得 $f(x_0) < f(x)$, 有

$$\limsup_{y \to x_0} f(y) < f(x);$$

(2) 称 f 在 X 上是上伪连续的，如果对每一个 $x \in X$ 都是上伪连续的;

(3) 称 f 在 $x_0 \in X$ 是下伪连续的，如果对所有的 $x \in X$, 使得 $f(x) < f(x_0)$, 有

$$f(x) < \liminf_{y \to x_0} f(y);$$

(4) 称 f 在 X 上是下伪连续的，如果对每一个 $x \in X$ 都下伪连续；

(5) 称 f 在点 $x \in X$ 处是伪连续的，如果 f 在 x 处既上伪连续又下伪连续；称 f 在 X 上是伪连续的，如果 f 在 X 中的每一点 $x \in X$ 都伪连续.

注 2.1 如果 f 在 X 上是上伪连续的，那么 $-f$ 在 X 上是下伪连续的，反之也成立.

注 2.2 每一个上 (下) 半连续的函数也是上 (下) 伪连续的，反之不真. 可见下例.

设 $X = [0,2]$, 函数 $f_i : X \to R,\ i = 1,2$ 定义如下：

$$f_1(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 \le x < 1, \\ -1, & 1 \le x \le 2; \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} x-1, & 0 \le x < 1, \\ 2, & 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

容易验证 f_1 在 $x = 1$ 处是上伪连续而不是上半连续的，但 f_2 在是 $x = 1$ 处是下伪连续而不是下半连续的.

下面给出 Berge 极大值逆定理和 Nash 平衡定理.

定理 2.1 (Berge 极大值逆定理)[2] 设 X 是 R^n 中的子集， $K : X \to P_0(R^m)$ 是具有凸紧值的上半连续集值映射，那么存在一个连续函数 $u : X \times R^m \to [0,1]$, 使得

(i) $K(x) = \{y \in R^m : u(x,y) = \max\limits_{v \in R^m} u(x,v)\},\ \forall x \in X$;

(ii) $\forall x \in X,\ y \to u(x,y)$ 是拟凹的.

定理 2.2 (Nash 平衡定理)[8] 设 $N = \{1,2,\cdots,n\}$ 是局中人集合，对每个 $i \in N$, X_i 是 R^{n_i} 中非空的凸紧子集， $f_i := \prod\limits_{i=1}^{N} X_i \to R$ 是伪连续的，且 $\forall x_{-i} \in X_{-i}$, $f(x_i, x_{-i})$ 关于 x_i 是拟凹的，其中 $-i = N \setminus \{i\}$, 则存在 $x^* \in X$, 使得

$$f_i(x_i^*, x_{-i}^*) = \max_{u_i \in X_i} f_i(u_i, x_{-i}^*), \qquad \forall i \in N.$$

其中 x^* 称为博弈 $\Gamma = (X_1, \cdots, X_n; f_1, \cdots, f_n)$ 的一个 Nash 平衡点.

3 拟变分不等式与广义变分不等式

拟变分不等式和广义变分不等式在处理不动点理论、数理经济学、博弈论、控制论及优化等问题的过程中是个强有力的工具，我们利用 Berge 极大值逆定理和 Nash 平衡定理研究其在更弱的条件下的情况.

定理 3.1 (拟变分不等式) 设 $X \subset R^m$ 是非空有界闭凸集, 集值映射 $G : X \to P_0(X)$ 连续，且 $\forall x \in X$, $G(x)$ 是 X 中的非空闭凸集， $\varphi : X \times X \to R$ 满足下列条件：

(1) φ 在 $X \times X$ 上是伪连续的；

(2) $\forall x \in X,\ y \to \varphi(x,y)$ 是拟凹的；

(3) $\forall x \in X,\ \varphi(x,x) \le 0$,

则存在 $x^* \in X$, 使 $x^* \in G(x^*)$ 且 $\forall y \in G(x^*)$, 有 $\varphi(x^*, y) \leq 0$.

证　$\forall x, y \in X$, 令 $f_1(x,y) = -\|x-y\|$, 显然，$f_1 : X \times X \to R$ 连续，且 $\forall y \in X$, $x \to f_1(x,y)$ 是凹的，必是拟凹的.

$\forall x \in X$, 定义 $F(x) = \{y \in G(x) : \varphi(x,y) = \max_{u \in G(x)} \varphi(x,u)\}$, 由 [8] 中的定理 3.1, $F(x)$ 是非空有界闭凸集，且 F 是上半连续的．再由 Berge 极大值逆定理，存在连续函数 $f_2 : X \times X \to R$, 使得 $\forall x \in X$, $y \to f_2(x,y)$ 是拟凹的，且 $F(x) = \{y \in X : f_2(x,y) = \max_{u \in X} f_2(x,u)\}$.

于是我们得到博弈 $\Gamma = (X, X, f_1, f_2)$, 根据 [9] 中的定理 4.1.2, 博弈 Γ 必存在 Nash 平衡点，即存在 $(x^*, y^*) \in X \times X$, 使得

$$f_1(x^*, y^*) = \max_{x \in X} f_1(x, y^*), \qquad f_2(x^*, y^*) = \max_{y \in X} f_2(x^*, y).$$

由

$$f_1(x^*, y^*) = -\|x^* - y^*\| = \max_{x \in X} -\|x - y^*\| = -\min_{x \in X} \|x - y^*\| = 0,$$

从而 $x^* = y^*$. 再由

$$f_2(x^*, y^*) = \max_{y \in X} f_2(x^*, y),$$

从而有 $y^* \in F(x^*)$, 于是 $y^* \in G(x^*)$, 得 $x^* \in G(x^*)$, 且

$$0 \geq \varphi(x^*, x^*) = \max_{y \in G(x^*)} \varphi(x^*, y),$$

即 $\forall y \in G(x^*)$, 有 $\varphi(x^*, y) \leq 0$. 证毕.

根据伪连续与连续的关系，我们得到一般的拟变分不等式，即是推论 3.1.

推论 3.1　设 $X \subset R^m$ 是非空有界闭凸集，集值映射 $G : X \to P_0(X)$ 连续，且 $\forall x \in X$, $G(x)$ 是 X 中的非空闭凸集，$\varphi : X \times X \to R$ 满足下列条件：

(1) φ 在 $X \times X$ 上是连续的；

(2) $\forall x \in X$, $y \to \varphi(x,y)$ 是拟凹的；

(3) $\forall x \in X$, $\varphi(x,x) \leq 0$,

则存在 $x^* \in X$, 使 $x^* \in G(x^*)$ 且 $\forall y \in G(x^*)$, 有 $\varphi(x^*, y) \leq 0$.

现在我们将定理 3.1 进行了推广，得到下列定理 3.2.

定理 3.2　设 X 和 Z 都是 R^m 中的非空闭凸集，其中 X 还是有界的，集值映射 $F : X \to P_0(Z)$ 上半连续，且 $\forall x \in X$, $F(x)$ 是 Z 中的非空有界闭凸集，集值映射 $G : X \to P_0(X)$ 连续，且 $\forall x \in X$, $G(x)$ 是 X 中的非空闭凸集，函数 $\varphi : X \times X \times Z \to R$ 是伪连续的，且 $\forall (x,z) \in X \times Z$, $y \to \varphi(x,y,z)$ 是拟凹的，$\forall x \in X$, $\forall z \in F(x)$, $\varphi(x,x,z) \leq 0$, 则存在 $x^* \in X$, 使 $x^* \in G(x^*)$, 且存在 $z^* \in F(x^*)$, 使 $\forall y \in G(x^*)$ 有 $\varphi(x^*, y, z^*) \leq 0$.

证　设 $U = co\, F(X)$, 其中 $co\, F(X)$ 表示 $F(X)$ 的凸包，易知 U 是非空凸紧集．根据 Berge 极大值逆定理，存在一个连续函数 $f : X \times U \to [0,1]$, 使得

(i) $F(x) = \{z \in U : f(x,z) = \max_{u \in U} f(x,u)\}$, $\forall x \in X$,

(ii) $\forall x\in X,\ z\to f(x,z)$ 是拟凹的.

定义映射 $g:X\times X\to R$ 如下：

$$g(x,y)=-\|x-y\|,\qquad \forall\,(x,y)\in X\times X,$$

显然 g 在 $X\times X$ 是连续的，且 $\forall y\in X,\ x\to g(x,y)$ 是凹的，从而是拟凹的.

再者， $\varphi:X\times X\times Z\to R$ 是伪连续的，因此 φ 在：$X\times X\times U\to R$ 也是伪连续的，且 $\forall\,(x,z)\in X\times U,\ y\to\varphi(x,y,z)$ 是拟凹的.

于是我们得到博弈模型 $\Gamma=(X,X,U,f,g,\varphi)$, 根据定理 2.3, 存在 $(x^*,y^*,z^*)\in X\times X\times U$ 使得

$$f(x^*,z^*)=\max_{z\in U}f(x^*,z),\tag{3.1}$$

$$g(x^*,y^*)=\max_{x\in X}g(x,y^*),\tag{3.2}$$

$$\varphi(x^*,y^*,z^*)=\max_{y\in X}\varphi(x^*,y,z^*).\tag{3.3}$$

由 (3.1) 可得 $z^*\in F(x^*)$, 由 (3.2) 可得

$$g(x^*,y^*)=-\|x^*-y^*\|=\max_{x\in X}-\|x-y^*\|=-\min_{x\in X}\|x-y^*\|=0,$$

从而 $x^*=y^*$. 由 (3.3) 可得

$$0\ge\varphi(x^*,x^*,z^*)=\varphi(x^*,y^*,z^*)=\max_{y\in X}\varphi(x^*,y,z^*)\ge\max_{y\in G(x^*)}\varphi(x^*,y,z^*),$$

即 $\forall y\in G(x^*),\ \varphi(x^*,y,z^*)\le 0$, 同时也意味着 $x^*\in G(x^*)$. 否则，若 $x^*\notin G(x^*)$, 则有 $\varphi(x^*,x^*,z^*)>0$, 与条件矛盾. 于是存在 $x^*\in X$, 使 $x^*\in G(x^*)$, 且存在 $z^*\in F(x^*)$, 使 $\forall y\in G(x^*)$ 有 $\varphi(x^*,y,z^*)\le 0$. 证毕.

注 3.1 如果定理 3.2 中不含集值映射 G, 且令 $\varphi(x,y,z)=\langle z,x-y\rangle$, 其他条件保留，则 $\exists x^*\in X,\ \exists z^*$, 使 $\forall y\in X$, 有 $\langle z^*,x^*-y\rangle\le 0$, 从而 $\langle z^*,y-x^*\rangle\ge 0$. 这是广义变分不等式，即是推论 3.2.

推论 3.2 (广义变分不等式) 设 X 和 Z 都是 R^m 中的非空闭凸集，其中 X 还是有界的，集值映射 $F:X\to P_0(Z)$ 上半连续，且 $\forall x\in X,\ F(x)$ 是 Z 中的非空有界闭凸集， $\varphi=\langle z,x-y\rangle$ 在 $X\times X\times Z\to R$ 是连续的，则存在 $x^*\in X$, 使 $z^*\in F(x^*)$ ，使 $\forall y\in X$ 有 $\langle z^*,y-x^*\rangle\ge 0$.

注 3.2 如果定理 3.2 中不含集值映射 F, 也不考虑变量 z, $\exists x^*\in X$, 使 $x^*\in G(x^*)$, 且 $\forall y\in G(x^*)$, 有 $\varphi(x^*,y)\le 0$. 这是拟变分不等式，形式如定理 3.1.

注 3.3 定理 3.2 统一了拟变分不等式和广义变分不等式，而拟变分不等式和广义变分不等式分别作为定理 3.2 的特例.

4 Von Neumann 引理

Von Neumann 于 1937 年提出了 Von Neumann 引理，其可由 Kakutani 不动点定理导出，而事实上，由 Von Neumann 引理也可以推出 Kakutani 不动点定理，见 [6]. 因此，Von Neumann 引理与 Kakutani 不动点定理相互等价．现在用不同的方法，给出另一个证明.

定理 4.1 (Von Neumann 引理) 设 $X \subset R^m$, $Y \subset R^n$ 是两个非空有界闭凸集，$E, F \subset X \times Y$ 是两个非空闭集，满足

(1) $\forall x \in X$, $\{y \in Y : (x,y) \in E\}$ 是非空凸集；

(2) $\forall y \in Y$, $\{x \in X : (x,y) \in F\}$ 是非空凸集，

则 $E \cap F \neq \emptyset$.

证 $\forall x \in X$, $G_1(x) = \{y \in Y : (x,y) \in E\}$, 则 $G_1 : X \to P_0(Y)$ 确定了一个集值映射，易证 $G_1(x)$ 是闭集且有界，因此为凸紧集，其图像 $\mathrm{Graph}\,(G_1) = \{(x,y) : y \in G_1(x)\}$ 为闭集，又由于 Y 紧，故集值映射 G_1 是上半连续的．根据 Berge 极大值逆定理，存在一个连续函数 $f : X \times Y \to [0,1]$, 使得

(i) $G_1(x) = \{y \in Y : f(x,y) = \max\limits_{u \in Y} f(x,u)\}$, $\forall x \in X$,

(ii) $\forall x \in X, y \to f(x,y)$ 是拟凹的.

$\forall y \in Y$, $G_2(y) = \{x \in X : (x,y) \in F\}$, 则 $G_2 : Y \to P_0(X)$ 确定了一个集值映射，同理可证 G_2 为凸紧集，且是上半连续的．根据 Berge 极大值逆定理，存在一个连续函数 $g : Y \times X \to [0,1]$, 使得

(i) $G_2(y) = \{x \in X : g(x,y) = \max\limits_{v \in X} g(v,y)\}$, $\forall, y \in Y$,

(ii) $\forall y \in Y$, $x \to g(x,y)$ 是拟凹的.

于是我们得到博弈 $\Gamma = (X, Y, f, g)$, 由于 f, g 连续，则必伪连续．根据 Nash 平衡定理，存在 $(x^*, y^*) \in X \times Y$ 使得

$$f(x^*, y^*) = \max_{y \in Y} f(x^*, y), \qquad g(x^*, y^*) = \max_{x \in X} g(x, y^*),$$

因此，$y^* \in G_1(x^*)$, 即 $(x^*, y^*) \in E$, $x^* \in G_2(y^*)$, 从而 $(x^*, y^*) \in F$. 故 $E \cap F \neq \emptyset$. 证毕.

注 4.1 定理 4.1 表明了 Nash 平衡定理可导出 Von Neumann 引理，而 Von Neumann 引理与 Kakutani 不动点定理等价，又根据 [5], Kakutani 不动点定理与 Nash 平衡定理等价，因此 Nash 平衡定理与 Von Neumann 引理等价.

5 Gale-Nikaido-Debreu 引理与其推广定理

Gale-Nikaido-Debreu 引理是数理经济学中的核心理论之一， 1952 年 Arrow-Debreu 应用广义博弈平衡点的存在性证明了一般均衡的存在性，即 Walras 均衡定理，也是 Gale-Nikaido-Debreu 引理 [9]. 下面我们利用 Berge 极大值逆定理与 Nash 平衡定理，直接导

出 Gale-Nikaido-Debreu 引理及其推广定理.

引理 5.1 设 X 是 R^m 中的一个非空有界闭凸集，Y 是 R^n 中的一个非空闭凸集，$T: X \to P_0(Y)$ 是一个上半连续的集值映射，且 $\forall x \in X$，$T(x)$ 是非空有界闭凸集. $f: X \times Y \to R$ 伪连续，$\forall y \in X$，$x \to f(x,y)$ 在 X 上是拟凹的，$\forall x \in X$，$\forall y \in T(x)$，有 $f(x,y) \le 0$, 则存在 $x^* \in X$, 存在 $y^* \in T(x^*)$, 使 $\forall x \in X$, 有 $f(x,y^*) \le 0$.

证 设 $U = co\,T(X)$, 其中 $co\,T(X)$ 表示 $T(X)$ 的凸包，易知 U 是非空凸紧集. 根据 Berge 极大值逆定理，存在一个连续函数 $g: X \times U \to [0,1]$, 使得

(i) $T(x) = \{y \in U : g(x,y) = \max\limits_{u \in U} g(x,u)\}$, $\forall x \in X$,

(ii) $\forall x \in X$, $y \to g(x,y)$ 是拟凹的.

另一方面，$f: X \times Y \to R$ 是伪连续的，因此 f 在 $: X \times U \to R$ 也是伪连续的，且 $\forall y \in Y$, $x \to f(x,y)$ 是拟凹的.

于是我们得到博弈模型 $\Gamma = (X,U,g,f)$, 根据 Nash 平衡点存在性定理, 存在 $(x^*,y^*) \in X \times U$, 使得

$$g(x^*,y^*) = \max_{y \in U} g(x^*,y), \tag{5.1}$$

$$f(x^*,y^*) = \max_{x \in X} f(x,y^*), \tag{5.2}$$

由 (5.1) 可得 $y^* \in T(x^*)$, 同时有 $f(x^*,y^*) \le 0$, 由 (5.2) 可得 $\forall x \in X$, $f(x,y^*) \le f(x^*,y^*) \le 0$. 证毕.

接着，利用引理 5.1 导出 Gale-Nikaido-Debreu 引理.

Gale-Nikaido-Debreu 引理 设超需集值映射 $\zeta: P \to P_0(R^l)$ 在 P 上是上半连续的，$\forall p \in P$, $\zeta(p)$ 是 R^l 中的非空有界闭凸集, 且满足弱 Walras 律：$\forall p \in P$, $\forall z \in \zeta(p)$, 有 $\langle p,z \rangle \le 0$, 则自由配置均衡价格必存在，即存在 $p^* \in P$, 存在 $z^* \in \zeta(p^*)$, 而 $z^* \le 0$.

证 令 $X = P$, $Y = R^l$, $\forall p \in P$, $\forall z \in R^l$, 定义 $f(p,z) = \langle p,z \rangle$, 则 $f: P \times Y \to R$ 连续，从而是伪连续的，$\forall z \in R^l$, $p \to \langle p,z \rangle$ 在 P 上是凹的，从而是拟凹的，$\forall p \in P$, $\forall z \in \zeta(p)$, 有 $\langle p,z \rangle \le 0$, 引理 5.1 的假设条件全都成立. 由引理 5.1, 存在 $p^* \in P$, 存在 $z^* \in \zeta(p^*)$, 使 $\forall p \in P$, 有 $\langle p,z^* \rangle \le 0$.

以下来证明 $z^* \le 0$. 用反证法，设 $z^* \le 0$ 不成立，则存在某 i_0, 使 $z^*_{i_0} > 0$. 令 $\overline{p} = (\overline{p}_1,\cdots,\overline{p}_l)$, 其中 $\overline{p}_{i_0} = 1$, 当 $i \ne i_0$ 时，$\overline{p}_{i_0} = 0$, 则 $\overline{p} \in P$, 而 $\langle \overline{p},z^* \rangle = z^*_{i_0} > 0$, 矛盾. 证毕.

Gale-Nikaido-Debreu 引理的推广定理 设 $P \subset R^m, Q \subset R^n$ 是两个非空有界闭凸集，$f: P \times Q \to R$ 连续，且 $\forall q \in Q, p \to f(p,q)$ 拟凸的，集值映射 $S: P \to P_0(Q)$ 上半连续，$\forall p \in P, S(p)$ 是非空闭凸集，且 $\forall p \in P$, $\forall q \in S(p)$, 有 $f(p,q) \ge c$, 则存在 $p^* \in P$, 存在 $q^* \in S(p^*)$, 使得 $\forall p \in P$, 有 $f(p,q^*) \ge f(p^*,q^*) \ge c$.

证 设 $U = co\,S(P)$, 其中 $co\,S(P)$ 表示 $S(P)$ 的凸包，易知 U 是非空凸紧集. 根据 Berge 极大值逆定理，存在一个连续函数 $g: P \times U \to [0,1]$, 使得

(i) $S(p) = \{q \in U : g(p,q) = \max\limits_{u \in U} g(p,u)\}$, $\forall p \in P$,

(ii) $\forall p \in P,\ q \to g(p,q)$ 是拟凹的，

$\forall p \in P,\ \forall q \in U$, 记 $h(p,q) = -f(p,q)$, 则 h 在 $P \times U$ 上连续，从而是伪连续的，且 $\forall q \in U,\ p \to h(p,q)$ 是拟凹的.

于是我们得到博弈模型 $\Gamma = (P, U, g, h)$, 根据 Nash 平衡点存在性定理, 存在 $(p^*, q^*) \in P \times U$, 使得

$$g(p^*, q^*) = \max_{q \in U} g(p^*, q), \qquad h(p^*, q^*) = \max_{p \in Q} h(p, q^*),$$

所以， $q^* \in S(p^*)$, 于是有 $f(p^*, q^*) \geq c$.

又由于

$$h(p^*, q^*) = -f(p^*, q^*) = \max_{p \in P} -f(p, q^*) = -\min_{p \in P} f(p, q^*),$$

因此 $f(p^*, q^*) = \min_{p \in P} f(p, q^*)$, 所以 $f(p, q^*) \geq f(p^*, q^*) \geq c$. 证毕.

6 结论

Nash 平衡是非合作博弈最核心的概念之一. 一般情况下，我们常借助非线性分析中的一些方法如不动点理论、 Ky Fan 不等式、极大值定理、变分不等式等工具等来证明博弈论中 Nash 平衡点的存在性. 而在本文中，借助 Berge 极大值逆定理和 Nash 平衡定理直接导出了一些非线性问题的结果如 Von Neumann 引理、拟变分不等式、广义变分不等式以及数理经济学中的 Gale-Nikaido-Debreu 引理及推广定理等. 另外，从本文的证明过程中可以看出，在处理上半连续具有非空凸紧的集值映射时，考虑 Berge 极大值逆定理可以将有关问题转化为一个二元函数，往往可以使一些问题的证明变得更简洁.

致谢. 本文作者感谢贵州大学俞建教授的讨论和帮助，同时感谢审稿专家的意见和建议.

参 考 文 献

[1] Berge C. Topological Spaces. New York: Macmillan, 1963

[2] Komiya H. Inverse of the Berge maximum theorem. *Econ. Theory*, 1997, 9: 371–375

[3] Zhou L. The structure of the Nash equilibrium sets of standard 2-player games. Rationality and Equilibrium, Vol.57, Berlin: Springer, 2006

[4] Park S, Komiya H. Another inverse of the Berge maximum theorem. *J. Nonliear and Convex Analysis*, 2001, 2(1): 105–109

[5] Yu J, Wang N F, Yang Z. Equivalence results between Nash equilibrium theorem and some fixed point theorems. *Fixed Point Theory and Applications*, 2016: 69 (2016)

[6] 俞建. 博弈论与非线性分析. 北京：科学出版社， 2008
(Yu J. Game Theory and Nonlinear Analysis. Beijing: Science Press, 2008)

[7] Aliprantis C D, Border K C. Infinite Dimensional Analysis. Berlin: Springer-Verlag, 2006

[8] Morgan J, Scalzo V. Pseudocontinuous functions and existence of Nash equilibria. *J. Math. Econ.*, 2007, 43: 174–183

[9] 俞建. 博弈论选讲. 北京：科学出版社， 2014

(Yu J. Selected Topics in Game Theory. Beijing: Science Press, 2014)

An Inverse of Berge Maximum Theorem and Nash Equilibrium Theorem

QIU Xiaoling JIA Wensheng†

(*School of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang* 550025*, China*)

(E-mail: †jws0505@gzu.edu.cn)

Abstract By constructing an appropriate payoff function, quasi-variational inequality, generalized variational inequality, Von Neumann Lemma and the extension of Gale-Nikaido-Debreu Lemma, can be derived from Nash equilibrium theorem, with the aid of the inverse of the Berge maximum theorem. Moreover, an important method is provided that an upper semicontinuous and convex compact set-valued mapping problem is converted into a binary function. Our results and proofs are all new.

Key words the inverse of Berge maximum theorem; Nash equilibrium theorem; quasi-variational inequality; Von Neumann Lemma; an extension of Gale-Nikaido-Debreu Lemma; pseudocontinuity

MR(2000) Subject Classification 54C60; 91A10; 91B02

Chinese Library Classification O177