

# 基于边界位移量测的一维波方程的稳定性\*

武晓辉<sup>†</sup> 李胜家

(山西大学数学科学学院, 太原 030006)

(<sup>†</sup>E-mail: 18734838796@163.com)

**摘 要** 本文考虑一类非同位波方程的控制问题, 提出了一个新的基于观测边界位移的时滞反馈控制器. 通过算子半群理论和 Riesz 基逼近的方法, 证明了相关闭环系统的适定性和稳定性, 并给出系统指数稳定时的条件. 数字模拟进一步验证了结论的成立.

**关键词** Riesz 基; 指数稳定; 反馈控制; 时间延迟; 波方程

**MR(2000) 主题分类** 93B52; 93C40

**中图分类** O175.2

## 1 引言

考虑如下一维波方程的控制问题:

$$\begin{cases} w_{tt}(x, t) = w_{xx}(x, t), & x \in (0, 1), \quad t > 0, \\ w_x(0, t) = qw(0, t), & t \geq 0, \\ w(1, t) = u(t), & t \geq 0, \\ w(x, 0) = w_0(x), \quad w_t(x, 0) = w_1(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ y(t) = w(0, t), \end{cases} \quad (1.1)$$

其中,  $u$  为控制输入,  $y$  为测量输出,  $(w_0, w_1)$  为初始状态. 当  $q = 0$  时, 方程表示在  $x = 0$  处自由, 在  $x = 1$  处通过位置激励的长链. 当  $q \neq 0$  时, 其边界条件为 Robin 边界条件, 表示在  $x = 0$  处有一个大小位移相关的力作用. 当  $q > 0$  时表示该力为稳力; 当  $q < 0$  时, 系统 (1.1) ( $u = 0$ ) 至少有一个不稳定谱点, 因此表示该力使系统不稳定. 更多物理解释可见 [1]. 控制项带有扰动的该系统已经在很多文献中被广泛研究, 如 [2-5] 等等. [1] 基于 Backstepping 的方法设计了系统 (1.1) 基于量测边界速度和位

本文 2016 年 5 月 25 日收到. 2017 年 11 月 28 日收到修改稿.

\* 国家自然科学基金 (61174082, 11671240, 61503230) 资助项目.

<sup>†</sup> 通讯作者.

移的输出反馈控制器. 文 [6] 利用相同的方法设计了只基于量测边界位移的输出反馈控制器. Backstepping 设计法在波方程边界控制问题上的应用更多可见 [7-9]. 由于边界控制和观测非同位, 以上文献基于此方法设计的控制器会变得很复杂. 最近, [10, 11] 利用特征线的方法证明了一类常数延迟的边界观测能够被用来使得振动链稳定. 进一步, [12] 讨论了通过边界控制和带有时滞的同位观测的一维波动方程稳定性问题. 在时延为波传播时间的偶数倍时, 其得出了闭环系统稳定时反馈增益系数和时延满足的充要条件, 并按照适定正则系统理论的框架进行了分析. 对于观测和控制不同位, [13] 也通过实验表明通过时延点控制能够使得其研究的分布参数系统稳定. 特别地, [14] 中也提出了一种新的实现系统稳定的方法, 即将分布参数系统作为动态输出反馈控制器与原系统形成耦合系统来进行稳定.

基于以上思想, 本文研究了一个基于观测边界位移的时滞反馈控制器使得系统 (1.1) 稳定. 由于时间延迟本身为一种动态, 区别与将时滞看作为反馈控制的扰动, 本文将其看作为系统进程的一部分进行研究. 因此可以利用一阶双曲方程来作为时滞的模型见 [15]. 受 [16] 的启发, 我们可以为系统 (1.1) 设计如下输出反馈

$$u(t) = az(1, t),$$

其中  $a \in \mathbb{R}$ ,  $z(x, t)$  满足

$$\begin{cases} z_t(x, t) + z_x(x, t) = 0, & x \in (0, 1), \quad t > 0, \\ z(0, t) = w(0, t), & t \geq 0, \\ z(x, 0) = z_0(x), & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

这里  $z_0(x)$  是需要取定的初值, 且满足相容性条件  $w_0(0) = z_0(0)$ ,  $w_0(1) = az_0(1)$ . 我们得到系统 (1.1) 的闭环系统如下:

$$\begin{cases} w_{tt}(x, t) = w_{xx}(x, t), & x \in (0, 1), \quad t > 0, \\ w_x(0, t) = qw(0, t), \quad w(1, t) = az(1, t), & t \geq 0, \\ z_t(x, t) + z_x(x, t) = 0, & x \in (0, 1), \quad t > 0, \\ z(0, t) = w(0, t), & t \geq 0, \\ w(x, 0) = w_0(x), \quad w_t(x, 0) = w_1(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ z(x, 0) = z_0(x), & 0 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (1.2)$$

[16] 中指出通过位移输出反馈能够使得系统 (1.1) 在有限的时间内稳定. 即在  $a = \frac{1}{2}$  下, 系统 (1.2) 有限时间稳定. 其结果表明仅仅通过边界位移输出反馈能够使得波方程指数稳定. 本文使用不同的方法分析了系统 (1.2). 进一步, 研究了随系统参数  $q$  的变化, 控制端反馈增益  $a$  使系统指数稳定时的取值范围.

本文按照如下进程来对系统 (1.2) 进行分析. 首先, 通过变换将原系统转换到一个相关的系统. 其次, 利用算子半群理论和 Riesz 基的方法, 转换系统的适定性被研究. 进一步, 分析了使系统指数稳定的反馈增益  $a$  的取值范围. 然后, 通过逆变换, 原系统的适定性和稳定性被证明. 最后, 数值模拟进一步验证了结论成立.

## 2 变换系统分析

计算可知闭环系统 (1.2) 中

$$z(x, t) = \begin{cases} w(0, t-x), & t \geq x, \\ z_0(x-t), & t < x. \end{cases} \quad (2.1)$$

事实上, 考虑如下方程

$$\begin{cases} Z_{xx}(x, t) = Z_{tt}(x, t), & x \in (0, 1), \quad t \in (0, \infty), \\ Z_x(0, t) = -w_t(0, t), & t \in [0, \infty), \\ Z(0, t) = w(0, t), & t \in [0, \infty). \end{cases}$$

若使  $Z(x, t)$  在区域  $x \in (0, 1)$ ,  $t \in [0, \infty)$  上有意义, 延拓  $Z(x, t)$  到  $t \in (-1, \infty)$  满足

$$\begin{cases} Z_{xx}(x, t) = Z_{tt}(x, t), & x \in (0, 1), \quad t \in (-1, \infty), \\ Z_x(0, t) = z'_0(-t), & t \in [-1, 0), \\ Z(0, t) = z_0(-t), & t \in [-1, 0), \end{cases}$$

其中  $z'_0$  表示  $z_0(x)$  关于  $x$  的导数. 则  $Z(x, t)$  在区域  $\Omega = \{(x, t) : x \in [0, 1], t \in [0, \infty)\}$  上的解为

$$Z(x, t) = z(x, t) = \begin{cases} w(0, t-x), & t \geq x, \\ z_0(x-t), & t < x. \end{cases}$$

令

$$\tilde{w}(x, t) = w(x, t) - aZ(x, t), \quad (2.2)$$

$$\tilde{w}_t(x, t) = w_t(x, t) - aZ_t(x, t). \quad (2.3)$$

当  $x = 0$  时, 我们有  $\tilde{w}(0, t) = w(0, t) - az(0, t) = (1-a)w(0, t)$ ,  $t \geq 0$ . 因此  $z(x, t)$  能写为

$$z(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{1-a}\tilde{w}(0, t-x), & t \geq x, \\ z_0(x-t), & t < x. \end{cases} \quad (2.4)$$

则由 (2.2), (2.3), (2.4), 系统 (1.2) 变为

$$\begin{cases} \tilde{w}_{tt}(x, t) - \tilde{w}_{xx}(x, t) = 0, & x \in (0, 1), \quad t > 0, \\ \tilde{w}_x(0, t) = \frac{q}{1-a}\tilde{w}(0, t) + \frac{a}{1-a}\tilde{w}_t(0, t), & t \geq 0, \\ \tilde{w}(1, t) = 0, & t \geq 0, \\ \tilde{w}(x, 0) = \tilde{w}_0(x), \tilde{w}_t(x, 0) = \tilde{w}_1(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ z_t(x, t) + z_x(x, t) = 0, & x \in (0, 1), \quad t > 0, \\ z(0, t) = \frac{1}{1-a}\tilde{w}(0, t), & t \geq 0, \\ z(x, 0) = z_0(x), & 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (2.5)$$

这里

$$\tilde{w}_0(x) = w_0(x) - az_0(x), \quad \tilde{w}_1(x) = w_1(x) + az'_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

当  $a \neq 1$  时, 通过 (2.4) 可以得到

$$w(x, t) = \tilde{w}(x, t) + a \begin{cases} \frac{1}{1-a} \tilde{w}(0, t-x), & t \geq x, \\ z_0(x-t), & t < x. \end{cases} \quad (2.6)$$

$$w_t(x, t) = \tilde{w}_t(x, t) + a \begin{cases} \frac{1}{1-a} \tilde{w}_t(0, t-x), & t \geq x, \\ -z'_0(x-t), & t < x. \end{cases} \quad (2.7)$$

因此, 我们可以研究系统 (2.5) 来确定系统 (1.2) 的适定性及稳定性.

## 2.1 算子建立

令空间  $X = H_R^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$ , 其中  $H_R^1(0, 1) = \{f(x) \in H^1(0, 1) | f(1) = 0\}$ . 定义算子  $\mathcal{A}: D(\mathcal{A}) \rightarrow X$  如下:

$$\begin{cases} \mathcal{A}(f, g) = (g, f''), & \forall (f, g) \in D(\mathcal{A}), \\ D(\mathcal{A}) = \left\{ (f, g) \in (H^2(0, 1) \times H_R^1(0, 1)) \cap X | f'(0) = \frac{q}{1-a}f(0) + \frac{a}{1-a}g(0) \right\}. \end{cases} \quad (2.8)$$

则系统 (2.5) 中  $\tilde{w}$  部分在  $X$  上可写为如下发展方程

$$\begin{cases} \dot{Z}(t) = \mathcal{A}Z(t), t > 0, \\ Z(0) = Z_0. \end{cases}$$

这里  $Z(t) = (\tilde{w}(\cdot, t), \tilde{w}_t(\cdot, t))$ .

**引理 1** 当  $q \in \mathbb{R}, q \neq a - 1$  时,  $\mathcal{A}^{-1}$  存在且在  $X$  上的紧算子, 因此  $\mathcal{A}$  的谱集满足:  $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma_p(\mathcal{A})$ ,  $\sigma_p(\mathcal{A})$  为  $\mathcal{A}$  的本征值且是几何简单的.

证 对于  $\forall (f_1, g_1) \in X$ , 设  $\mathcal{A}(f, g) = (g, f'') = (f_1, g_1)$ , 可得:

$$g(x) = f_1(x), \quad f(x) = C_2 + C_1x + \int_0^x \int_0^y g_1(s) ds dy,$$

由边界条件可得:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{a}{q+1-a}f_1(0) - \frac{q}{q+1-a} \int_0^1 \int_0^y g_1(s) ds dy \\ C_2 = \frac{a}{a-1-q}f_1(0) + \frac{1-a}{a-1-q} \int_0^1 \int_0^y g_1(s) ds dy. \end{cases}$$

因此  $\mathcal{A}^{-1}: X \rightarrow H^2(0, 1) \times H^1(0, 1)$  存在. 根据 Sobolev 紧嵌入定理<sup>[15]</sup>,  $\mathcal{A}^{-1}$  在  $X$  上是紧的. 因此  $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma_p(\mathcal{A})$  且只有有限代数重根<sup>[12]</sup>. 证毕.

**定理 1** 当  $a, q \in \mathbb{R}$  且  $a \neq 1, q \neq a - 1$  时,  $\mathcal{A}$  生成了一个  $X$  上的  $C_0$ -半群.  $\overline{D(\mathcal{A})} = X$ . 对于任意初始条件满足  $(\tilde{w}_0, \tilde{w}_1) \in X$ , 系统 (2.5) 中  $(\tilde{w}, \tilde{w}_t)$  存在唯一的解满足  $(\tilde{w}(\cdot, \cdot), \tilde{w}_t(\cdot, \cdot)) \in C((0, \infty), X)$ . 进一步, 当  $(\tilde{w}_0, \tilde{w}_1) \in D(\mathcal{A})$  时,  $(\tilde{w}, \tilde{w}_t)$  的解满足  $(\tilde{w}(\cdot, \cdot), \tilde{w}_t(\cdot, \cdot)) \in C^1(0, \infty; X) \cap C(0, \infty; D(\mathcal{A}))$ .

证 定义  $X$  上的内积为:

$$\begin{aligned} \langle (f_1, g_1), (f_2, g_2) \rangle_1 &= \int_0^1 f_1'(x) \overline{f_2'(x)} + g_1(x) \overline{g_2(x)} dx \\ &\quad + \beta \int_0^1 (1-x)(f_1'(x) \overline{g_2(x)} + g_1(x) \overline{f_2'(x)}) dx + f_1(0) \overline{f_2(0)}, \end{aligned}$$

其中  $(f_1, g_1), (f_2, g_2) \in X$ ,  $\max \{0, \frac{2a(a-1)}{a^2+(a-1)^2}\} < \beta < 1$ . 根据

$$\|(f, g)\|_1^2 \geq (1-\beta) \int_0^1 |g(x)|^2 + |f'(x)|^2 dx + f_1(0) \overline{f_2(0)},$$

容易验证定义的内积有意义.

对于任意的  $(f, g) \in D(\mathcal{A})$ , 有:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}(f, g), (f, g) \rangle_1 &= \langle (g, f''), (f, g) \rangle_1 \\ &= \int_0^1 g'(x) \overline{f'(x)} + f''(x) \overline{g(x)} dx + \beta \int_0^1 (1-x)(g'(x) \overline{g(x)} + f''(x) \overline{f'(x)}) dx \\ &\quad + g(0) \overline{f(0)}, \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} \langle \mathcal{A}(f, g), (f, g) \rangle_1 \\ &= \operatorname{Re} (f'(x) \overline{g(x)}) \Big|_0^1 + \beta (1-x) \frac{|g(x)|^2 + |f'(x)|^2}{2} \Big|_0^1 + \frac{\beta}{2} \int_0^1 |g(x)|^2 + |f'(x)|^2 dx \\ &\quad + \operatorname{Re} (g(0) \overline{f(0)}) \\ &= -\frac{q}{1-a} \operatorname{Re} (f(0) \overline{g(0)}) - \frac{a}{1-a} |g(0)|^2 - \frac{\beta}{2} |g(0)|^2 - \frac{\beta}{2} \left| \frac{q}{1-a} f(0) + \frac{a}{1-a} g(0) \right|^2 \\ &\quad + \frac{\beta}{2} \int_0^1 |g(x)|^2 + |f'(x)|^2 dx + \operatorname{Re} (g(0) \overline{f(0)}) \\ &= \frac{\beta}{2} \int_0^1 |g(x)|^2 + |f'(x)|^2 dx - \delta_1 |g(0)|^2 + \delta_2 \operatorname{Re} (f(0) \overline{g(0)}) - \delta_3 |f(0)|^2, \end{aligned}$$

其中

$$\delta_1 = \frac{1}{2} \left( 2 \frac{a}{1-a} + \beta + \beta \frac{a^2}{(1-a)^2} \right), \quad \delta_2 = -\frac{q(1-a+a\beta)}{(1-a)^2} + 1, \quad \delta_3 = \frac{\beta q^2}{2(1-a)^2}.$$

取  $\beta$  满足  $\max \{0, \frac{2a(a-1)}{a^2+(a-1)^2}\} < \beta < 1$ , 则  $\delta_1 > 0$ . 若  $q \neq 0$  可知  $|\delta_2| > 0$ . 令  $\varepsilon = \frac{\delta_1}{|\delta_2|} > 0$ , 利用 Young 不等式和 Hölder 不等式有

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} \langle \mathcal{A}(f, g), (f, g) \rangle_1 \\ &\leq \frac{\beta}{2} \int_0^1 |g(x)|^2 + |f'(x)|^2 dx - (\delta_1 - |\delta_2| \varepsilon) |g(0)|^2 + \left( \frac{|\delta_2|}{4\varepsilon} - \delta_3 \right) |f(0)|^2 \\ &\leq \left( \frac{\beta}{2} + \frac{|\delta_2|}{4\varepsilon} - \delta_3 \right) \int_0^1 |g(x)|^2 + |f'(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

因此存在  $M = |\frac{\beta}{2} + \frac{|\delta_2|}{4\epsilon} - \delta_3|/(1 - \beta)$  使得

$$\operatorname{Re}\langle \mathcal{A}(f, g), (f, g) \rangle_1 \leq M \langle (f, g), (f, g) \rangle_1. \quad (2.9)$$

若  $q = 0$ , 则 (2.9) 显然成立. 由 (2.9) 可知  $\mathcal{A} - M$  是耗散算子. 由引理 1 可知,  $\mathcal{A}$  是离散算子. 因此不失一般性假设  $M \in \rho(\mathcal{A})$ . 由 Lumer-phillips 定理 (见 [17, 102 页]) 可得  $\mathcal{A} - M$  生成了一个  $C_0$ -半群. 根据  $C_0$ -半群的有界扰动定理 ([17, 65 页]) 可知  $\mathcal{A}$  在  $X$  上生成了一个  $C_0$ -半群. 进而当  $q \neq a - 1$  时, 对于任意初始条件  $(\tilde{w}_0, \tilde{w}_1) \in X$ , 系统存在唯一的解满足  $(\tilde{w}(\cdot, t), \tilde{w}_t(\cdot, t)) \in C((0, \infty), X)$ . 证毕.

## 2.2 谱分析

下面我们对系统 (2.5) 中  $\tilde{w}$  进行谱分析.

**引理 2** 令  $\mathcal{A}$  由 (2.8) 给定. 假设  $q \neq a - 1$ , 则  $0 \neq \lambda \in \sigma(A) = \sigma_p(\mathcal{A})$  当且仅当复数  $\lambda$  满足特征方程  $\Delta(\lambda) = 0$ .  $\Delta(\lambda)$  由 (2.10) 定义.

证 设  $\mathcal{A}$  的特征方程为  $\mathcal{A}(f, g) = \lambda(f, g)$ . 因此  $g(x) = \lambda f$  且  $f$  满足

$$\begin{cases} f''(x) = \lambda^2 f(x), \\ f'(0) = \frac{q}{1-a} f(0) + \frac{a}{1-a} g(0), \\ f(1) = 0. \end{cases}$$

计算可知  $\lambda$  满足特征函数

$$\Delta(\lambda) = (\lambda + q)e^\lambda + (\lambda - 2a\lambda - q)e^{-\lambda} = 0. \quad (2.10)$$

证毕.

**引理 3** 令  $\mathbb{C}$  表示复数域.

$$\min \left\{ |e^{2z} - 1| \mid z \in \mathbb{C}, |z| = r, 0 < r < \frac{1}{2} \right\} = |e^{-2r} - 1|.$$

证 令  $z = x + iy$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $P(z) = |e^{2z} - 1|^2 = e^{4x} - 2\cos(2y)e^{2x} + 1$ . 不失一般性, 我们只考虑  $y \geq 0$ . 固定  $r \in (0, \frac{1}{2})$ , 令  $p(x) = e^{4x} - 2\cos(2\sqrt{r^2 - x^2})e^{2x} + 1$ . 只需证明  $p(x)$  是  $[-r, r]$  上的单调递增函数. 对  $p(x)$  求导有

$$p^{(1)}(x) = 4e^{2x} \left( e^{2x} - \cos(2\sqrt{r^2 - x^2}) - \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \sin(2\sqrt{r^2 - x^2}) \right).$$

考虑如下函数在  $[-r, r]$  上的泰勒展开

$$\begin{cases} e^{2x} - 1 - 2x = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2x)^k}{k!}, \\ 1 - \cos(2\sqrt{r^2 - x^2}) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{(k-1)} \frac{2^{2k} (r^2 - x^2)^k}{(2k)!}, \\ 2x - \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \sin(2\sqrt{r^2 - x^2}) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{(k-1)} \frac{2^{2k+1} x (r^2 - x^2)^k}{(2k+1)!}. \end{cases}$$

对于  $x \in [0, r]$ , 显然有  $p^{(1)}(x) > 0$ ; 对于  $x \in [-r, 0]$ , 有

$$p^{(1)}(x) > \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{4(r^2 - x^2)}{2!} - \frac{16(r^2 - x^2)^2}{4!} + \frac{2^3 x(r^2 - x^2)}{3!} > 0.$$

证毕.

**引理 4** 令  $\mathbb{Z}$  为整数,  $a \neq \frac{1}{2}$  时,  $\mathcal{A}$  的本征值和本征元能够被渐近表示为

$$\begin{cases} \lambda_k = \frac{1}{2} \ln |2a - 1| + k' \pi i + O\left(\frac{1}{|k|}\right), & |\lambda_k| \rightarrow \infty, \\ F_k(x) = (f_k(x), \lambda_k f_k(x)). \end{cases} \quad (2.11)$$

其中

$$\begin{cases} k' = \begin{cases} k, & a > \frac{1}{2}, \\ k + \frac{1}{2}, & a < \frac{1}{2}, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}, \\ f_k(x) = e^{\lambda_k(1-x)} - e^{-\lambda_k(1-x)} \\ = K_1(1-x) \cos(k' \pi(1-x)) + i K_2(1-x) \sin(k' \pi(1-x)) + O\left(\frac{1}{|k|}\right), \quad |k| \rightarrow \infty, \\ K_1(x) = |2a - 1|^{\frac{x}{2}} - |2a - 1|^{-\frac{x}{2}}, \quad K_2(x) = |2a - 1|^{\frac{x}{2}} + |2a - 1|^{-\frac{x}{2}}. \end{cases}$$

证 为了得到  $\mathcal{A}$  的本征元的渐进估计, 我们考虑本征值. 参数  $a \in \mathbb{R}$  满足  $a \neq \frac{1}{2}$ ,  $a \neq 1$  时, 令  $F(\lambda) = e^{2\lambda} - 2a + 1$ ,  $G(\lambda) = \frac{2q(a-1)}{\lambda+q}$ . 当  $|\Delta\lambda| = r < \frac{1}{2}$  时, 根据引理 3 有

$$|F(\lambda_k + \Delta\lambda)| = |(2a - 1)(e^{2\Delta\lambda} - 1)| \geq |2a - 1| |e^{-|2\Delta\lambda|} - 1|.$$

存在实数  $K > 0$ , 当  $|k| \geq K$  时, 恒有  $|G(\lambda_k + \Delta\lambda)| < c \frac{|2q(a-1)|}{|k|\pi}$ ,  $c > 1$  为与  $k$  无关的常数. 因此对于任意的  $\Delta\lambda$  满足  $|\Delta\lambda| = r_k$ ,  $r_k < \frac{1}{2}$  且  $|2a - 1|(1 - e^{-1})2r_k = c \frac{|2q(a-1)|}{|k|\pi}$  时, 有

$$|G(\lambda_k + \Delta\lambda)| < |2a - 1|(1 - e^{-1})2r_k < |(2a - 1)(e^{-|2\Delta\lambda|} - 1)| \leq |F(\lambda_k + \Delta\lambda)|$$

成立. 由 Rouché 定理:  $|\lambda| > |\lambda_K|$  时, 在有界区域  $U_k = \{\lambda : |\lambda - \lambda_k| \leq r_k\}$  上,  $F(\lambda) + G(\lambda)$  的零点个数与  $F(\lambda)$  相同.  $a = 1$  时, 结果显然. 因此,  $\mathcal{A}$  的本征值能够被渐近表示为  $\lambda_k = \frac{1}{2} \ln |2a - 1| + k' \pi i + O\left(\frac{1}{|k|}\right)$ ,  $|\lambda_k| \rightarrow \infty$ . 相应的本征元直接计算可得 (2.11). 证毕.

定义半群  $T$  的增长阶为  $\omega(\mathcal{A}) := \inf_{t \in (0, \infty)} \frac{1}{t} \log \|e^{At}\|$ . 算子  $\mathcal{A}$  谱上界  $S(\mathcal{A}) := \sup_{\lambda \in \sigma(\mathcal{A})} \operatorname{Re} \lambda$ .

**定理 2** 设  $a \neq 1/2$ ,  $q \neq a - 1$  时,

1.  $\mathcal{A}$  的本征值是代数简单的,  $\mathcal{A}$  的一组广义特征向量  $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  生成  $X$  的一组 Riesz 基, 因此有  $z = \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_k \phi_k$ ,  $\forall z \in X$ , 且存在常数  $c_1, c_2 > 0$  使得:

$$c_1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |C_k|^2 \leq \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_k \phi_k \right\|_1^2 \leq c_2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |C_k|^2.$$

2.  $\omega(\mathcal{A}) = S(\mathcal{A})$ . 因此, 对于任意的  $t \geq 0$ ,

$$T_t z = \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_k e^{\lambda_k t} \phi_k. \quad (2.12)$$

证 在  $\tilde{X} = H_R^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$  中考虑算子  $\tilde{A}$ :

$$\begin{cases} \tilde{A}(f, g) = (g, f''), \\ D(\tilde{A}) = \left\{ (f, g) \in \tilde{X} \mid \tilde{A}(f, g) \in \tilde{X}, f'(0) = -\frac{a}{1-a}g(0) \right\}. \end{cases}$$

由 [19] 知对应本征元的  $\{\tilde{F}_k(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  生成一组  $H_R^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$  的 Riesz 基.

$$\begin{cases} \lambda'_k = \frac{1}{2} \ln |2a - 1| + k' \pi i, \\ \tilde{F}_k(x) = (\tilde{f}_k(x), \lambda_k \tilde{f}_k(x)), \\ \tilde{f}_k(x) = e^{\lambda'_k(1-x)} - e^{-\lambda'_k(1-x)}. \end{cases} \quad (2.13)$$

因此  $\{\tilde{F}_k(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  生成一组  $H_R^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$  上的 Riesz 基.

由式 (2.11), (2.13) 存在正整数  $M > 0$ , 使得

$$\sum_{M+1}^{\infty} \|F_k(x) - \tilde{F}_k(x)\|_1^2 \leq \sum_{M+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

对于其共轭本征函数同样成立. 根据引理 3 和 [18] 中定理 6.3 可知: 存在常数  $M_0 > M$  和  $\mathcal{A}$  的广义本征函数  $\{\Phi_k(x)\}_1^{M_0}$ , 使得  $\{F_k(x)\}_{M_0+1}^{\infty} \cup \{\Phi_k(x)\}_1^{M_0}$  及它们的共轭生成  $X$  的一组 Riesz 基. 根据 [19, 定理 2.2] 可由定理 2.1 得出, 因此定理得证. 证毕.

下面估计  $\mathcal{A}$  的本征值的实部.

**引理 5** 若  $q > -1$ , 参数满足  $0 < a < \min\{1, q+1\}$ ,  $a \neq \frac{1}{2}$ . 则存在常数  $m > 0$  使得  $\operatorname{Re} \lambda_k \leq m \frac{-a}{(2-2a)} < 0$ . 若  $q \leq -1$ , 对于任意  $\lambda_k \in \sigma(\mathcal{A})$  和  $m > 0$ , 不存在  $a$  使得  $\operatorname{Re} \lambda_k < -m$  成立.

证  $\mathcal{A}$  的本征值  $\lambda_k$  对应本征元满足:

$$\begin{cases} f_k''(x) = \lambda_k^2 f_k(x), \\ f_k'(0) = \frac{q}{1-a} f_k(0) + \frac{a}{1-a} \lambda_k f_k(0), \\ f_k(1) = 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

与  $\overline{f_k(x)}$  在  $X$  上作内积可得

$$\lambda_k^2 \|f_k(x)\|_1^2 = -\frac{q}{1-a} |f_k(0)|^2 - \frac{a}{1-a} \lambda_k |f_k(0)|^2 - \|f_k'(x)\|_1^2.$$

设  $\|f_k(x)\| = 1$ , 则其等价于

$$\begin{cases} 2(\operatorname{Re} \lambda_k)(\operatorname{Im} \lambda_k) = -\frac{a}{1-a} (\operatorname{Im} \lambda_k) |f_k(0)|^2, \\ ((\operatorname{Re} \lambda_k)^2 - (\operatorname{Im} \lambda_k)^2) = -\frac{q}{1-a} |f_k(0)|^2 - \frac{a}{1-a} (\operatorname{Re} \lambda_k) |f_k(0)|^2 - \|f_k'(x)\|_1^2. \end{cases}$$



进一步计算可得

$$\operatorname{Re} \lambda_k = \begin{cases} \frac{-a|f_k(0)|^2}{(2-2a)}, & \operatorname{Im} \lambda_k \neq 0; \\ \left[ \frac{-a|f_k(0)|^2}{1-a} \pm \sqrt{\left(\frac{a|f_k(0)|^2}{1-a}\right)^2 - 4\left(\frac{q}{1-a}|f_k(0)|_1^2 + \|f'_k(x)\|^2\right)} \right] / 2, & \operatorname{Im} \lambda_k = 0. \end{cases} \quad (2.15)$$

下证存在常数  $m_0 > 0$  使得  $|f_k(0)| = |(e^{\lambda_k} - e^{-\lambda_k})| > m_0$  对于任意  $k \in \mathbb{Z}$  成立. 假设存在  $\lambda_k$  使得  $|f_k(0)| = 0$ . 则  $\operatorname{Re} \lambda_k = 0$ ,  $\operatorname{Im} \lambda_k = b\pi$ ,  $b$  为一整数. 通过 (2.14) 可以得到  $f(x) \equiv 0$ , 矛盾. 通过 Cauchy-Schwarz 不等式, 我们得到  $\frac{1-a+q}{1-a} f_k^2(0) \leq \frac{q}{1-a} f_k^2(0) + \|f'_k(x)\|_1^2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . 将其代入 (2.15) 可得若  $q > -1$ , 则有  $0 < a < \min\{1, q+1\}$  使得存在常数  $m > 0$ ,  $\operatorname{Re} \lambda_k \leq m \frac{-a}{(2-2a)} < 0$ . 若  $q \leq -1$ , 则可知不存在  $a$  使得  $\frac{1-a+q}{1-a} < 0, 0 < a < 1$ . 证毕.

### 3 闭环系统的适定性和稳定性分析

下面考虑闭环系统 (1.2). 定义空间  $\mathbb{H} = \{(f, g, h) \in H^1(0, 1) \times L^2(0, 1) \times H^1(0, 1) | f(0) = h(0), ah(1) = f(1)\}$ . 算子  $\mathbb{A}: D(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{H}$ ,

$$\begin{cases} \mathbb{A}(f, g, h) = (g, f'', -h'), & \forall (f, g, h) \in D(\mathbb{A}), \\ D(\mathbb{A}) = \{(f, g, h) \in \mathbb{H} | \mathbb{A}(f, g, h) \in \mathbb{H}, f'(0) = qf(0)\}, \end{cases}$$

则系统 (1.2) 可写为如下发展方程

$$\frac{d}{dt}(w(\cdot, t), w_t(\cdot, t), z(\cdot, t)) = \mathbb{A}(w(\cdot, t), w_t(\cdot, t), z(\cdot, t)).$$

**定理 3** 令  $\mathbb{H}$  是一个 Hilbert 空间,  $\mathbb{A}$  如上定义.  $q \neq a-1$  时, 则  $\mathbb{A}$  在  $\mathbb{H}$  上生成一个  $C_0$ -半群  $\mathbb{T}$ . 若  $q > -1$ , 取  $0 < a < \min\{1, q+1\}$ ,  $a \neq 1/2$ . 则存在常数  $m > 0, C > 0$  使得  $\|\mathbb{T}_t\| \leq Ce^{-mt}$ ,  $t > 0$ . 若  $q \leq -1$ , 对于任意  $a \in \mathbb{R}$ , 满足  $\|\mathbb{T}_t\| \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty$ .

证 对于任意的  $(w(\cdot, t), w_t(\cdot, t), z(\cdot, t)) \in D(\mathbb{A})$ , 通过式 (2.1), (2.2), (2.3) 计算可知  $(\tilde{w}(\cdot, t), \tilde{w}_t(\cdot, t)) \in D(\mathcal{A})$ . 因此, 通过定理 2 可知当  $q \neq a-1, a \neq 1/2$  时, 系统 (2.5) 中  $\tilde{w}$  部分存在唯一的解满足  $((\tilde{w}(\cdot, \cdot), \tilde{w}_t(\cdot, \cdot))) \in C^1(0, \infty; X) \cap C(0, \infty; D(\mathcal{A}))$  且有隐正则性  $\tilde{w}(0, t) \in H_{\text{loc}}^1(0, \infty)$ . 令

$$w(x, t) = \tilde{w}(x, t) + az(x, t), \quad w_t(x, t) = \tilde{w}_t(x, t) + az_t(x, t).$$

通过 (2.4) 计算可知  $(w(\cdot, t), w_t(\cdot, t), z(\cdot, t))$  满足 (1.2), 有

$$(w(\cdot, t), w_t(\cdot, t), z(\cdot, t)) \in C(0, \infty; \mathbb{H}).$$

根据式 (2.12) 计算易知系统 (1.2) 解满足

$$\|w(\cdot, t), w_t(\cdot, t), z(\cdot, t)\|_{\mathbb{H}} \leq L\|(w(\cdot, 0), w_t(\cdot, 0), z(\cdot, 0))\|_{\mathbb{H}} e^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

$L$  为独立于  $t$  的正常数,  $\omega = \omega(\mathcal{A})$ . 按照引理 1 证明方法可得  $\rho(\mathbb{A}) \neq \emptyset$ . 进一步, 由于  $D(\mathbb{A})$  在  $\mathbb{H}$  中稠密,  $\mathbb{A}$  在  $\mathbb{H}$  上生成一个  $C_0$ -半群<sup>[20]</sup>. 若  $q > -1$ , 取  $0 < a <$

$\min\{1, q+1\}$ ,  $a \neq \frac{1}{2}$ , 系统 (2.5) 解是指数稳定的. 由引理 5 可得, 若  $q \leq -1$ , 对于任意  $a \in R$ , 满足  $\|\mathbb{T}_t\| \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty$ . 证毕.

#### 4 数值模拟

本节, 我们通过 matlab 利用有限差分的方法来对闭环系统 (1.2) 进行数值模拟来说明系统稳定. 空间步长和时间步长分别取 0.005, 0.0025. 设计参数和初始值为  $q = -0.3, a = 0.4, w_0 = x^2 - 2x, w_1(x) = z_0(x) = 0$ . 系统位置记为  $w(x, t), z(x, t)$ , 受控制时的系统模拟如图 1(a), (b), 不受控制时系统模拟如图 2(a). 从图 2 (b), (c) 可以看到系统的状态和控制均收敛到 0. 仿真结果进一步验证了我们得出的结论成立.

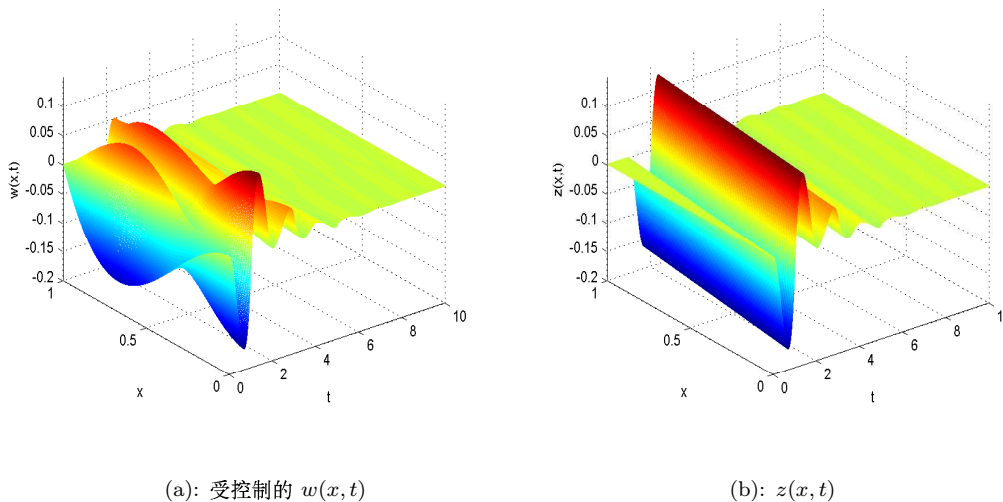


图 1 系统 (1.4) 仿真结果

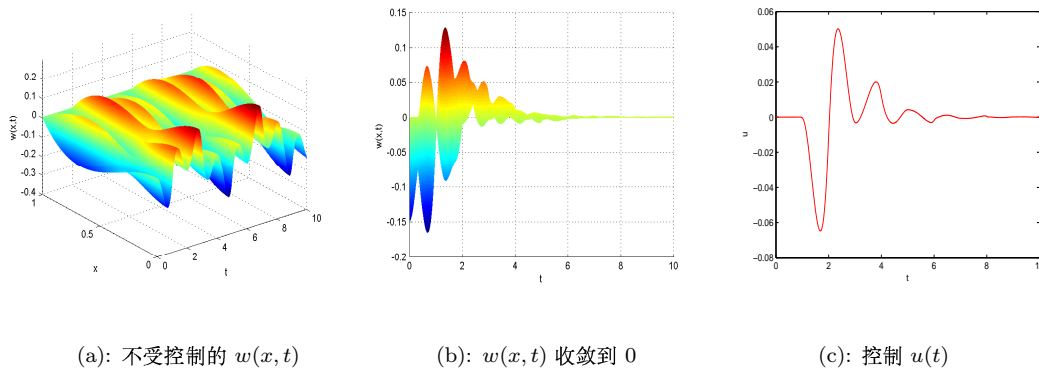


图 2 系统 (1.4) 仿真结果

## 5 结束语

本文呈现了一个基于非同位边界位移量测的时滞反馈控制器来稳定一维不稳定波动方程. 根据一个可逆的转换, 闭环系统的适定性和稳定性得以研究. 通过利用算子半群理论及 Riesz 基的方法, 系统的适定性被证明. 进一步, 本文证明了该反馈控制能够使系统指数稳定, 并给出对应反馈增益  $a$  的取值范围.

## 参 考 文 献

- [1] Krstic M, Guo B Z, Balogh A, Smyshlyaev A. Output-feedback stabilization of an unstable wave equation. *Automatica*, 2008, 44: 63–74
- [2] Feng H, Guo B Z. Output feedback stabilization of an unstable wave equation with general corrupted boundary observation. *Automatica*, 2014, 50: 3164–3172
- [3] Guo W, Guo B Z. Stabilization and regulator design for a one-dimensional unstable wave equation with input harmonic disturbance. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2013, 23: 514–533
- [4] Guo W, Guo B Z. Adaptive output feedback stabilization for one-dimensional wave equation with corrupted observation by harmonic disturbance. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2013, 51(2): 1679–1706
- [5] Feng H, Guo B Z. Distributed disturbance estimator and application to stabilization for multi-dimensional wave equation with corrupted boundary observation. *Automatica*, 2016, 66: 25–33
- [6] Guo B Z, Guo W. The strong stabilization of a one-dimensional wave equation by non-collocated dynamic boundary feedback control. *Automatica*, 2009, 45: 790–797
- [7] Guo B Z, Kang W. The Lyapunov approach to boundary stabilization of an anti-stable one-dimensional wave equation with boundary disturbance. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2014, 24: 54–69
- [8] Smyshlyaev A, Krstic M. Boundary control of an anti-stable wave equation with anti-damping on the uncontrolled boundary. *Systems and Control Letters*, 2009, 58: 617–623
- [9] Smyshlyaev A, Krstic M. Boundary control of Pdes: A Course on Backstepping Designs. Philadelphia: SIAM, 2008
- [10] Gugat M. Boundary feedback stabilization by time delay for one-dimensional wave equations. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 2010, 27: 189–203
- [11] Gugat M. Stabilizing a vibrating string by time delay. The 15th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, 2010, 144–147
- [12] Wang J M, Guo B Z, Krstic M. Wave equation stabilization by delays equal to even multiples of the wave propagation time. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2011, 49(2): 517–554
- [13] Udwadia F E. Non-collocated point control of nondispersive distributed parameter systems using time

- delays. *Applied Mathematics and Computation*, 1991, 42: 23–63
- [14] Feng H, Guo B Z. On stability equivalence between dynamic output feedback and static output feedback for a class of second order infinite-dimensional systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2015, 53(4): 1934–1955
- [15] 郭宝珠, 柴树根. 无穷维线性系统控制理论. 北京: 科学出版社, 2012  
(Guo B Z, Chai S G. Control Theory of Linear Infinite-Dimensional Systems. Beijing: Science Press, 2012)
- [16] Feng H, Guo B Z. Observer design and exponential stabilization for wave equation in energy space by boundary displacement measurement only. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(8): 1438–1444
- [17] Tucsnak M, Weiss G. Observation and Control for Operator Semigroups. Basel: Birkhauser, 2009
- [18] Guo B Z. Riesz basis approach to the stabilization of a flexible beam with a tip mass. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2001, 39(6): 1736–1747
- [19] Guo B Z, Xu C Z. The stabilization of a one-dimensional wave equation by boundary feedback with noncollocated observation. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 2007, 52(2): 371–377
- [20] Pazy A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. New York: Springer-Verlag, 1983

## Stabilization of a One-dimensional Wave Equation Based on Boundary Displacement Observation

WU XIAOHUI<sup>†</sup>      LI SHENGJIA

(School of Mathematical Sciences, Shanxi University, Taiyuan 030006, China)

(<sup>†</sup>E-mail: 18734838796@163.com)

**Abstract** In this paper, the stabilization of a one-dimensional wave equation with non-collocated observation at its unstable free end and controller at another end is considered. A novel output feedback control law with a constant time-delay only based on boundary displacement observation is proposed. The well-posedness of the close-loop system is proved by using operator semigroup theory and Riesz basis theory. The condition which guarantees the exponential stability of the closed-loop system can be determined. The result's relevance is illustrated with a numerical simulation.

**Key words** Riesz basis; exponential stability; feedback control; time delay; wave equation

**MR(2000) Subject Classification** 93B52; 93C40

**Chinese Library Classification** O175.2