第 41 卷 第 5 期　　应 用 数 学 学 报　　Vol. 41 No. 5
2018 年 9 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　Sep., 2018

一类核反应堆数学模型正解的全局分歧 *

陈瑞鹏　　李小亚

(北方民族大学数学与信息科学学院，银川 750021)

(E-mail: ruipengchen@163.com; lixiaoyacrp@163.com)

摘　要　本文研究一类源于核反应堆的数学模型正解的存在性. 该模型旨在描述与快中子流密度、反应堆温度紧密相关的核反应过程. 本文主要讨论反应堆与外界有热交换的情形. 从数学的角度来看，模型自身的非合作特性导致对正解存在性及相关性质的研究较为困难，适用于研究合作系统的比较原理等方法将不再有效. 运用分歧理论，我们获得了该模型存在正解的充分必要条件，建立了正解的全局分歧结果，同时对正解的渐近行为进行了仔细分析. 所得结果丰富并补充了核反应堆数学模型的相关理论.

关键词　核反应堆；正解；存在性；渐近行为；分歧理论

MR(2000) 主题分类　35J57

中图分类　O175.8

1　引言

本文研究源于核反应堆的数学模型

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = au - buv, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ v_t - \Delta v = cu - duv - ev, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \dfrac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} + \alpha v = 0, & x \in \partial\Omega, \ t > 0, \\ u(x,0) = u_0 \geq, \not\equiv 0, \quad v(x,0) = v_0 \geq, \not\equiv 0, \quad x \in \Omega & \end{cases} \tag{1.1}$$

稳态正解的存在性及其渐近行为，其中 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ 中的一个有界连通区域且具有 $C^{2+\theta}$ $(\theta \in (0,1))$ 类的光滑边界 $\partial\Omega$. 在实际应用中，Ω 代表密闭容器. $\mathbf{n}$ 为 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量，常系数 a, b, c, d, e 和 α 均为正. $u_0, v_0 \in C(\overline{\Omega})$ 为初始条件. 通过添加温度的扩散与非线性反馈，模型 (1.1) 改良了由 Kastenberg 和 Chambré[1] 提出的原模型. 在现

本文 2017 年 7 月 12 日收到. 2018 年 4 月 2 日收到修改稿.
* 国家自然科学基金 (61761002, 11601011), 北方民族大学校级科研一般项目 (2018XYZSX03) 和北方民族大学重大专项项目经费 (ZDZX201804) 资助项目.

实世界应用中，未知函数 u 和 v 分别表示快中子流的密度与核反应堆的温度．(1.1) 中的边界条件意味着快中子流不能穿越容器壁且核反应堆与外界有着热交换，其中 $\alpha > 0$ 称为热交换系数．显然，上述边界条件代表着更加贴近于实际的情形．

近年来，在 Dirichlet, Neumann 等不同类型边界条件下，模型 (1.1) 及其变型被诸多学者加以研究，见 [2–18] 等．同时，多位学者致力于研究 (1.1) 的一维类似系统，如 López-Gómez[6,7], Li[10], Wang[13−15] 和 Chen[16−18] 等．上述所提到的大多数文献主要讨论带 Dirichlet 边界条件的模型，且视 a 为分歧参数．例如， Arioli[5] 证明了 Dirichlet 边界条件下非平凡周期解和全局吸引子的存在性． López-Gómez[6] 主要研究模型的稳态形式，即椭圆系统

$$\begin{cases} -\Delta u = au - buv, & x \in \Omega, \\ -\Delta v = cu - duv - ev, & x \in \Omega, \\ u = v = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.2}$$

运用分歧方法， López-Gómez 获得了系统 (1.2) 正解的存在性及唯一性结果．随后，Antón 和 López-Gómez[7] 进一步讨论了 (1.2) 的空间非均匀情形，并建立了与 [6] 类似的结论．近几年，多位研究者对 [5–7] 的结果作了进一步补充和完善，如 [8, 9, 11, 18] 等．然而，据我们所知，带混合边界条件的模型 (1.1) 尚未被学者研究过．正如前文所述，(1.1) 中的混合边界条件代表了更加接近现实的情形，因此对于其稳态正解的存在性及渐近行为的研究极有必要．这些结果不仅可以更好地刻画核反应过程，而且能够进一步丰富核反应堆的相关理论．

鉴于此，本文将讨论椭圆系统

$$\begin{cases} -\Delta u = au - buv, & x \in \Omega, \\ -\Delta v = cu - duv - ev, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \dfrac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} + \alpha v = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.3}$$

下面，称 (1.3) 的一个解 (u,v) 为正解，若 u 和 v 都是 $\overline{\Omega}$ 上的正函数简记为 $u \gg 0$, $v \gg 0$. 我们将运用分歧理论证明本文的主要结果：

定理 1.1 系统 (1.3) 有一个正解当且仅当

$$0 < a < \frac{bc}{d}. \tag{1.4}$$

进一步，若视 a 为分歧参数，则必存在 (1.3) 正解的无界连通分支 $\mathfrak{C}_+ \subset \mathbb{R} \times [C^1(\overline{\Omega})]^2$, 使得

$$(a;u,v) = (0;0,0) \in \overline{\mathfrak{C}}_+, \qquad \mathcal{P}_a\mathfrak{C}_+ = \left(0, \frac{bc}{d}\right),$$

其中 $\mathcal{P}_a$ 为投影算子．

方便起见，对任意光滑子区域 $D \subset \Omega$ 及定义于 D 的可测函数 V, 记 $\lambda(-\Delta + V, D)$ 为算子 $-\Delta + V$ 在齐次 Neumann 边界条件下的主特征值．显然， $\lambda_1 := \lambda(-\Delta, \Omega) = 0$.

定义 Banach 空间 $Y := C^1(\overline{\Omega})$,

$$E := \Big\{u \in Y : \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x) = 0,\ x \in \partial\Omega\Big\},$$
$$F := \Big\{u \in Y : \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x) + \alpha v(x) = 0,\ x \in \partial\Omega\Big\}.$$

本文的主要工作空间将是 $X := E \times F$.

2 预备知识

本节首先给出系统 (1.3) 存在正解的必要条件.

引理 2.1 假设 (u,v) 为系统 (1.3) 的一个正解. 若它满足 $(u,v) \geq (0,0)$, $(u,v) \neq (0,0)$, 则 $u \gg 0$, $v \gg 0$ 且

$$a = \lambda(-\Delta + bv), \qquad \|v\|_\infty := \max_{x\in\overline{\Omega}} |v(x)| < \frac{c}{d}. \tag{2.1}$$

进一步, (1.4) 成立.

证 若 $u = 0$, 则由 (1.3) 的 v- 方程可得

$$-\Delta v + ev = 0, \qquad x \in \Omega, \qquad \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} + \alpha v = 0, \qquad x \in \partial\Omega,$$

由于 $e > 0$ 且 $-\Delta$ 在 Robin 边界条件下没有负特征值, 因此 $v = 0$; 另一方面, 若 $v = 0$, 则由 (1.3) 的 v- 方程可得 $cu = 0$, 从而 $u = 0$. 于是, 系统 (1.3) 的任一非平凡非负解 (u,v) 必于 $\overline{\Omega}$ 上满足

$$u \geq 0, \quad \not\equiv 0, \qquad v \geq 0, \quad \not\equiv 0. \tag{2.2}$$

因为 (1.3) 的 $u-$ 方程等价于

$$(-\Delta + bv)u = au, \quad x \in \Omega, \qquad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0, \qquad x \in \partial\Omega,$$

所以由 (2.2), 主特征值的唯一性以及主特征函数的强正性可得 $u \gg 0$ 且 $a = \lambda(-\Delta + bv)$.

假设 $x_0 \in \Omega$ 使得 $v(x_0) = \|v\|_\infty > 0$, 则 $-\Delta v(x_0) \geq 0$, 再由 (1.3) 的 $v-$ 方程可得

$$\big(c - dv(x_0)\big)u(x_0) \geq ev(x_0) > 0.$$

从而 $\|v\|_\infty = v(x_0) < \frac{c}{d}$, 这表明 (2.1) 成立.

由 (2.1) 及主特征值的性质可知

$$0 = \lambda_1 < \lambda(-\Delta + bv) = a < \lambda(-\Delta + bc/d) = bc/d,$$

故 (1.4) 亦成立. 最后, 因为 $e > 0$ 且

$$\begin{cases} (-\Delta + e)v = (c - dv)u > 0, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} + \alpha v = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

所以由椭圆边值问题的强极大值原理知 $v \gg 0$. 证毕.

下面，我们给出证明定理 1.1 的充分性部分时需要的几个引理.

引理 2.2 $a=0$ 是从平凡解 $(0,0)$ 处分歧出系统 (1.3) 正解的实解析曲线的唯一分歧参数值.

证 显然，(1.3) 等价于

$$\begin{cases} (-\Delta+e+1)u=(a+e+1)u-buv, & x\in\Omega, \\ (-\Delta+e+1)v=cu-duv+v, & x\in\Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}=0, \quad \dfrac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}+\alpha v=0, & x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{2.3}$$

因为 $e>0$, 所以无论在 Neumann 边界条件下，还是 Robin 边界条件下，算子 $-\Delta+e+1$ 都可逆. 定义算子 $\mathfrak{F}:\mathbb{R}\times X\to X$ 为

$$\mathfrak{F}(a,u,v):=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}-(-\Delta+e+1)^{-1}\begin{pmatrix} (a+e+1)u-buv \\ cu+v-duv \end{pmatrix}, \qquad (u,v)\in X. \tag{2.4}$$

为统一起见，此处 $(-\Delta+e+1)^{-1}$ 既表示 $-\Delta+e+1$ 在 Neumann 边界条件下的逆算子，也表示在 Robin 边界条件下的逆算子. 显然，$\mathfrak{F}$ 是实解析的且满足

$$\mathfrak{F}(a,0,0)=0, \qquad \forall\, a\in\mathbb{R}.$$

由椭圆正则性可知 $\mathfrak{F}(a,u,v)=0$ 当且仅当 (u,v) 是系统 (1.3) 的一个解. 进一步,

$$\mathfrak{F}(a,u,v)=\mathfrak{L}(a)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}+\mathfrak{R}(a,u,v),$$

其中

$$\mathfrak{L}(a)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}-(-\Delta+e+1)^{-1}\begin{pmatrix} a+e+1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

且

$$\mathfrak{R}(a,u,v)=(-\Delta+e+1)^{-1}\begin{pmatrix} buv \\ duv \end{pmatrix}.$$

容易看到对任意的 $a\in\mathbb{R}$, 有

$$\mathfrak{L}(a)=\mathfrak{F}_{(u,v)}(a,0,0).$$

由 Ascoli-Arzelà 定理和经典的 Schauder 估计可知

$$\mathfrak{R}(a)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}:=(-\Delta+e+1)^{-1}\begin{pmatrix} a+e+1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \qquad (u,v)\in X$$

是一个紧线性算子，且使得 $\mathfrak{L}(a)=I_X-\mathfrak{R}(a)$ 成为 0 指标的 Fredholm 算子，其中 I_X 表示从 X 到 X 的恒同算子.

令

$$\mathfrak{L}_0:=\mathfrak{L}(0), \qquad \mathfrak{L}_1:=\frac{d\mathfrak{L}}{da}(0)=-(-\Delta+e+1)^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

简单计算可得 $\mathfrak{L}_0$ 的零空间为

$$N(\mathfrak{L}_0)=\operatorname{span}\big\{(1,(-\Delta+e)^{-1}(c))\big\},$$

其中 1 是对应于 $\lambda_1=0$ 的规范化的正主特征函数, $(-\Delta+e)^{-1}$ 是 $-\Delta+e$ 在 Robin 边界条件下的逆.

我们宣称

$$\mathfrak{L}_1\begin{pmatrix}1\\(-\Delta+e)^{-1}(c)\end{pmatrix}=-(-\Delta+e+1)^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\notin R(\mathfrak{L}_0).\tag{2.5}$$

事实上, 若

$$-(-\Delta+e+1)^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\in R(\mathfrak{L}_0),$$

则存在 $u\in E$, 使得

$$-(-\Delta+e+1)^{-1}(1)=u-(-\Delta+e+1)^{-1}\big[(e+1)u\big].$$

由椭圆正则性可知 $u\in E\cap C^{2+\theta}(\overline{\Omega})$ 且

$$-\Delta u=-1,\qquad x\in\Omega.$$

用 1 乘以此等式, 然后在 Ω 上积分可得 $\int_\Omega 1dx=0$. 矛盾. 从而 (2.5) 成立.

由于 $\mathfrak{L}_0$ 是 0 指标的 Fredholm 算子, 故

$$\mathfrak{L}_1(N(\mathfrak{L}_0))\oplus R(\mathfrak{L}_0)=X,\tag{2.6}$$

这恰好是 Crandall-Rabinowitz 分歧定理 [19] 所需的横截条件. 于是, 由该定理可知 $a=0$ 是从平凡解 $(0,0)$ 处分歧出系统 (1.3) 正解的实解析曲线的一个分歧参数值.

下证参数值 $a=0$ 的唯一性.

反设对某个非零的 $a\in\mathbb{R}$, 存在 (2.3) 的正解序列 $\{(a_n;u_n,v_n)\}$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}(a_n;u_n,v_n)=(a;0,0)\in\mathbb{R}\times X.$$

则由 (2.3) 的 $u-$ 方程可得

$$\begin{aligned}&(-\Delta+e+1)\frac{u_n}{\|u_n\|_\infty}=(a_n+e+1)\frac{u_n}{\|u_n\|_\infty}-b\frac{u_n}{\|u_n\|_\infty}v_n,\qquad x\in\Omega,\\&\frac{\partial u_n}{\partial\mathbf{n}}=0,\qquad x\in\partial\Omega,\end{aligned}$$

等价地,

$$\begin{aligned}\frac{u_n}{\|u_n\|_\infty}=&(a_n+e+1)(-\Delta+e+1)^{-1}\frac{u_n}{\|u_n\|_\infty}-b(-\Delta+e+1)^{-1}\Big(\frac{u_n}{\|u_n\|_\infty}v_n\Big)\\=&(e+1)(-\Delta+e+1)^{-1}\frac{u_n}{\|u_n\|_\infty}+(a_n-a)(-\Delta+e+1)^{-1}\frac{u_n}{\|u_n\|_\infty}\\&+(-\Delta+e+1)^{-1}\Big(a\frac{u_n}{\|u_n\|_\infty}-bv_n\frac{u_n}{\|u_n\|_\infty}\Big).\end{aligned}$$

由 (2.1) 和 $(-\Delta+e+1)^{-1}$ 在齐次 Neumann 边界条件下的紧性，可知存在 $\{\frac{u_n}{\|u_n\|_\infty}\}$ 的子列 (仍记为自身), 使得对某个 $\psi\in E$: $\|\psi\|_\infty=1$, 成立

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\|u_n\|_\infty}=\psi\gg 0.$$

在此式中令 $n\to\infty$ 可得

$$\psi=(e+1)(-\Delta+e+1)^{-1}\psi+a(-\Delta+e+1)^{-1}\psi,$$

即

$$-\Delta\psi=a\psi,\qquad x\in\Omega,\qquad \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}=0,\qquad x\in\partial\Omega.$$

从而 $a=0$, 这与 $a\neq 0$ 矛盾．证毕．

条件 (2.6) 蕴含了由 [20] 定义的代数重数 $\chi[\mathfrak{L};\cdot]$ 满足 $\chi[\mathfrak{L}(a);0]=1$. 由 [20, 命题 12.3.1] 知当参数 a 跨越 0 时，度数 $\mathrm{ind}(\mathfrak{L}(a),0)$ 将产生变化；再由 [21, 定理 6.2.1] 可得 (2.3) 非平凡解的闭联集 $\mathfrak{C}_0$, 它满足 $(0;0,0)\in\overline{\mathfrak{C}}_0$. 根据 Rabinowitz[22] 的单侧分歧理论，在 $(0;0,0)$ 的邻域中 $\mathfrak{C}_0$ 由两个子闭联集 $\mathfrak{C}_0^+$ 和 $\mathfrak{C}_0^-$ 组成，其中 $\mathfrak{C}_0^+$ 由正解构成， $\mathfrak{C}_0^-$ 由负解构成．然而正如 [21, 23] 所指出的，尽管 $\mathfrak{C}_0$ 满足 Rabinowitz 全局分歧定理 [22] 的选择，但是 $\mathfrak{C}_0^+$ 未必满足．好在由 [23, 定理 1.1] 可得正解的一个全局连通分支 $\mathfrak{C}_+$, 它满足 $(0;0,0)\in\overline{\mathfrak{C}}_+$. 下面，我们逐步验证 [23, 定理 1.1] 的条件．

由引理 2.2 的证明过程可知 (2.3) 的解是算子 $\mathfrak{F}$ 的零点，即是

$$\mathfrak{L}(a)\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}+\mathfrak{R}(a,u,v)=0, \tag{2.7}$$

的解．现已知 $\mathfrak{L}(a)$ 是 0 指标的 Fredholm 算子．进一步，使得算子 $\mathfrak{L}(a)$ 奇异，即使得

$$\dim N(\mathfrak{L}(a))\geq 1 \tag{2.8}$$

的 $a\in\mathbb{R}$ 构成的集合是离散的．事实上， (2.8) 成立当且仅当存在 $(u,v)\in X\backslash\{0\}$, 使得

$$\begin{cases}(-\Delta+e+1)u=(a+e+1)u, & x\in\Omega,\\ (-\Delta+e+1)v=cu+v, & x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}=0,\quad \dfrac{\partial v}{\partial\mathbf{n}}+\alpha v=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

因为 $u=0$ 导致

$$(-\Delta+e)v=0,\quad x\in\Omega,\qquad \frac{\partial v}{\partial\mathbf{n}}+\alpha v=0,\quad x\in\partial\Omega,$$

故 $v=0$, 因此必有 $u\neq 0$. 从而 (2.8) 成立当且仅当 a 是 $-\Delta$ 在 Neumann 边界条件下的一个特征值．这表明使得 $\mathfrak{L}(a)$ 奇异的 $a\in\mathbb{R}$ 构成的集合是离散的，即 [23] 的假设 (HL) 满足．显然， $\mathfrak{R}\in C(\mathbb{R}\times X,X)$ 在有界集上是紧的且

$$\lim_{(u,v)\to 0}\frac{\mathfrak{R}(a,u,v)}{\|u\|_\infty+\|v\|_\infty}=0.$$

于是， [23] 的假设 (HR) 也满足．最后，引理 2.1 保证了文 [23] 的假设 (HP) 也是满足的．事实上，若用 P_N 和 P_R 分别表示 E 和 F 中非负函数构成的锥，则 X 成为一个有序 Banach 空间，其序关系由 $\mathcal{P} := P_N \times P_R$ 诱导．由引理 2.1 可知若

$$(a, u, v) \in [\mathbb{R} \times (\mathcal{P}\backslash\{0\})] \cap \mathfrak{F}^{-1}(0),$$

则必有 $u \gg 0$ 及 $v \gg 0$, 因此 $(u, v) \in \mathrm{int}\mathcal{P}$, 从而假设 (HP) 也被满足．

考虑引理 2.2 证明中定义的算子 $\mathfrak{R}(a)$, 由已有分析不难验证 $a = 0$ 是使得 1 成为 $\mathfrak{R}(a)$ 的特征值，且对应正特征函数的唯一参数值．此外，

$$N(\mathfrak{L}_0) = N(I_X - \mathfrak{R}(0)) = \mathrm{span}\big\{(1, (-\Delta + e)^{-1}(c))\big\}.$$

现在，尽管 $\mathfrak{R}(0)$ 在 $\mathfrak{R}(0)(\mathcal{P}\backslash\{0\}) \subset \mathrm{int}\mathcal{P} = \mathrm{int}P_N \times \mathrm{int}P_R$ 意义下不是强正的 (见 [23, (1.4)]), 但是对每个 $a \geq 0$, 必有

$$\mathfrak{R}(a)\big([P_N\backslash\{0\}] \times [P_R\backslash\{0\}]\big) \subset \mathrm{int}\mathcal{P} = \mathrm{int}P_N \times \mathrm{int}P_R. \tag{2.9}$$

事实上，对任意满足 $a > -(e+1)$ 的 $a \in \mathbb{R}$,(2.9) 必成立，特别地，当 $a = 0$ 时亦成立．这足以保证 [23, 定理 1.1] 的有效性．最终，结合 [23, 定理 1.1] 与引理 2.2 可得：

引理 2.3 存在 (1.3) 正解的一个无界连通分支 $\mathfrak{C}_+$, 使得 $(0; 0, 0) \in \overline{\mathfrak{C}}_+$, 并且对任意的 $a \neq 0$, 有 $(a; 0, 0) \notin \overline{\mathfrak{C}}_+$.

注 2.1 分歧理论在椭圆方程及系统研究方面的应用，还可见 [24–29] 等.

3 主要结果的证明

定理 1.1 的证明 引理 2.1 已证明了条件 (1.4) 的必要性．要完成此定理的证明，我们只需说明 $a = \frac{bc}{d}$ 是从无远处产生分歧的唯一分歧参数值.

由 (1.4) 可知 $\mathcal{P}_a\mathfrak{C}_+$ 有界，又因为 $\mathfrak{C}_+$ 于 $\mathbb{R} \times X$ 无界，所以 (2.1) 保证存在正解序列 $\big\{(a_n, u_n, v_n)\big\} \subset \mathbb{R} \times X$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\|_\infty = \infty.$$

此外，由 (1.4) 知存在 $\{a_n\}$ 的收敛子列 (仍记为自身), 使得

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a^* \in \Big[0, \frac{bc}{d}\Big]. \tag{3.1}$$

令

$$\widehat{u}_n := \frac{u_n}{\|u_n\|_\infty}, \qquad \widehat{v}_n := \frac{v_n}{\|u_n\|_\infty}, \qquad n \geq 1, \tag{3.2}$$

则有

$$\begin{cases} (-\Delta + e + 1)\widehat{u}_n = (a_n + e + 1)\widehat{u}_n - bv_n\widehat{u}_n, & x \in \Omega, \\ (-\Delta + e + 1)\widehat{v}_n = c\widehat{u}_n - dv_n\widehat{u}_n + \widehat{v}_n, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial \widehat{u}_n}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \dfrac{\partial \widehat{v}_n}{\partial \mathbf{n}} + \alpha\widehat{v}_n = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.3}$$

由 (2.1), (3.1) 和 (3.2) 可知 (3.3) 中第一个方程右端在 $L^\infty(\Omega)$ 中有界，从而由 L^p 估计 [30] 知对任意的 $p>1$, 序列 $\{\widehat{u}_n\}$ 在

$$W_N^{2,p}(\Omega) := \Big\{u \in W^{2,p}(\Omega):\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x) = 0,\ x \in \partial\Omega\Big\}$$

有界．于是，存在 $\{\widehat{u}_n\}$ 的子列 (仍记为自身) 及某个 $\widehat{u} \in E$, 使得在 E 中成立

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{u}_n = \widehat{u}. \tag{3.4}$$

进一步，对任给的 $p>1$, 由 (2.1) 可知 $\{v_n\}$ 在 $L^p(\Omega)$ 有界，故存在其子列 (仍记为自身) 及某个 $v \in L^p(\Omega)$, 使得在 $L^p(\Omega)$ 中有如下弱收敛性质成立：

$$\lim_{n\to\infty} v_n = v, \tag{3.5}$$

见 [31].

选取检验函数 $\phi \in C^\infty(\Omega)$. 用 ϕ 乘以 (3.3) 中第一个方程，并在 Ω 上积分可得

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla\widehat{u}_n\nabla\phi =& a_n\int_\Omega \widehat{u}_n\phi - b\int_\Omega v_n\widehat{u}_n\phi\\ =& a_n\int_\Omega \widehat{u}_n\phi - b\int_\Omega v_n\widehat{u}\phi - b\int_\Omega v_n(\widehat{u}_n-\widehat{u})\phi, \qquad \forall\, n\geq 1.\end{aligned}$$

在此式中令 $n\to\infty$, 则由 (3.4) 和 (3.5) 可得

$$\int_\Omega \nabla\widehat{u}\nabla\phi = a^*\int_\Omega \widehat{u}\phi - b\int_\Omega v\widehat{u}\phi.$$

这表明 $\widehat{u}$ 是边值问题

$$\begin{cases} -\Delta\widehat{u} = a^*\widehat{u} - bv\widehat{u}, & x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial\widehat{u}}{\partial\mathbf{n}} = 0, & x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{3.6}$$

的一个弱解．显然，$\|\widehat{u}\|_\infty = 1$ 且 $\widehat{u}$ 非负．由椭圆正则性，$\widehat{u}\in W^{2,p}(\Omega)$ 是 (3.6) 在古典意义下的解，且 v 不依赖于 $p>1$. 因此 $\widehat{u} \in \bigcap\limits_{p>1} W^{2,p}(\Omega)$ 是 (3.6) 的一个强解．于是，由主特征值的唯一性可得

$$a^* = \lambda(-\Delta + bv), \qquad \widehat{u} \gg 0. \tag{3.7}$$

另一方面，记 (η_1, φ_1) 为线性问题

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = \eta\varphi, & x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} + \alpha\varphi = 0, & x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{3.8}$$

的主特征值与主特征函数，且满足 $\varphi_1 \gg 0$, $\|\varphi_1\|_\infty = 1$, 则由 (3.3) 的第二个方程可推出

$$\begin{aligned}-\int_\Omega \widehat{v}_n\Delta\varphi_1 =& c\int_\Omega \widehat{u}_n\varphi_1 - d\int_\Omega v_n\widehat{u}_n\varphi_1 - e\int_\Omega \widehat{v}_n\varphi_1\\ =& c\int_\Omega \widehat{u}_n\varphi_1 - d\int_\Omega v_n\widehat{u}\varphi_1 - d\int_\Omega v_n(\widehat{u}_n-\widehat{u})\varphi_1 - e\int_\Omega \widehat{v}_n\varphi_1, \qquad \forall\, n\geq 1.\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\widehat{v}_n=0$ 于 Ω 上一致地成立，故

$$\int_\Omega \widehat{u}(x)\varphi_1(x)(c-dv(x))\,\mathrm{d}x=0.$$

于是，在 Ω 中几乎处处满足 $v=\frac{c}{d}$, 这结合 (3.7) 蕴含了

$$a^*=\lambda\Big(-\Delta+\frac{bc}{d}\Big)=\frac{bc}{d}.$$

综上所述， $a=\frac{bc}{d}$ 确为从无远处产生分歧的唯一参数值，且 $\mathcal{P}_a\mathfrak{C}_+=\big(0,\frac{bc}{d}\big)$. 证毕.

4 正解的渐近行为

本节讨论当 $a\to\frac{bc}{d}$ 时，椭圆系统 (1.3) 正解的渐近行为. 主要结果如下：

定理 4.1 对任给的 $a\in\mathcal{P}_a\mathfrak{C}_+$, 令 $(a;u_a,v_a)$ 为 (1.3) 的一个正解，使得

$$\lim_{a\to a^*}\|u_a\|_\infty=\infty,\tag{4.1}$$

其中 $a^*=\frac{bc}{d}$ 由本文第三部分给出，则在 $\overline{\Omega}$ 上一致地成立 $\lim\limits_{a\to a^*}u_a=\infty$, 并且对任意 $p>1$, 在 $L^p(\Omega)$ 中有如下弱收敛性质成立：

$$\lim_{a\to a^*}v_a=\frac{c}{d}.$$

证 假设 $\{(a_n;u_n,v_n)\}\subset\mathfrak{C}_+$ 为 (1.3) 的正解序列，使得

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a^*,\qquad \lim_{n\to\infty}\|u_n\|_\infty=\infty.$$

则由 (3.2) 以及类似于定理 1.1 证明中的紧性讨论可知在 E 中，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\|u_n\|_\infty}=\widehat{u}\gg 0,$$

并且在 $L^p(\Omega)$ 中有弱收敛性质成立：

$$\lim_{n\to\infty}v_n=\frac{c}{d},$$

其中 $\widehat{u}$ 是对应于 $a^*=\lambda\big(-\Delta+\frac{bc}{d}\big)$ 的主特征函数，可规范化使得 $\|\widehat{u}\|_\infty=1$. 因为上述结论对任意正解序列成立，故在 E 中必成立

$$\lim_{a\to a^*}\frac{u_a}{\|u_a\|_\infty}=\widehat{u},$$

且在 $L^p(\Omega)$ 中满足弱收敛性质：

$$\lim_{a\to a^*}v_a=\frac{c}{d}.$$

最后，令 $\widehat{u}_a := \frac{u_a}{\|u_a\|_\infty}$, 则当 $a \to a^*$ 时 $\widehat{u}_a \to \widehat{u} \gg 0$, 从而由 (4.1) 可知当 $a \to a^*$ 时，在 $\overline{\Omega}$ 一致地成立 $u_a = \widehat{u}_a \|u_a\|_\infty \to \infty$. 证毕.

注 4.1 定理 4.1 表明当核反应堆的温度 v 趋近于阈值 $\frac{c}{d}$ 时，快中子流的密度将会发生爆破.

注 4.2 若考虑封闭容器的边界绝热且快中子不能穿越容器壁的情形，则描述核反应堆行为的适当边界条件为齐次 Neumann 边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 = \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}, \qquad x \in \partial\Omega.$$

通过观察本文的讨论过程，不难看到我们的主要结果对于带 Neumann 边界条件的模型 (1.3) 仍成立.

注 4.3 Bie[12] 研究了模型

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = au - buv, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ v_t - \Delta v = cu - duv - ev, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 = \dfrac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0 \geq, \quad \not\equiv 0, \quad v(x,0) = v_0 \geq, \quad \not\equiv 0, & x \in \Omega \end{cases} \tag{4.2}$$

正平衡点的稳定性. 该文证明 (4.2) 存在唯一正常数平衡点 (u^*, v^*) 当且仅当 (1.4) 成立，其中

$$(u^*, v^*) = (u^*(a), v^*(a)) := \Big(\frac{ae}{bc - ad}, \frac{a}{b}\Big);$$

并且当 (1.4) 成立时 (u^*, v^*) 是全局渐近稳定的. 容易验证

$$\lim_{a \to bc/d} (u^*(a), v^*(a)) = (\infty, c/d),$$

这恰好彰显了定理 4.1 的有效性.

参　考　文　献

[1] Kastenberg W E, Chambré P L. On the stability of nonlinear space-dependent reactor kinetics. *Nucl. Sci. Engrg.*, 1968, 31: 67–79

[2] Pao C V. Bifurcation analysis on a nonlinear diffusion system in reactor dynamics. *Appl. Anal.*, 1979, 9: 107–119

[3] Wang M X. Global solution, asymptotic behavior and blow-up problems for a model of nuclear reactors. *Science in China (Series A)*, 1991, 5: 466–477 (in Chinese)

[4] Gu Y G, Wang M X. Existence of positive stationary solutions and threshold results for a reaction-diffusion system. *J. Differential Equations*, 1996, 130: 277–291

[5] Arioli G. Long term dynamics of a reaction-diffusion system. *J. Differential Equations*, 2007, 235: 298–307

[6] López-Gómez J. The steady states of a non-cooperative model of nuclear reactors. *J. Differential Equations*, 2009, 246: 358–372

[7] Antón I, López-Gómez J. Steady states of a non-cooperative model arising in nuclear engineering. *Nonlinear Anal. RWA*, 2013, 14: 1340–1360

[8] Peng R, Wei D, Yang G Y. Asymptotic behavior, uniqueness and stability of coexistence states of a non-cooperative reaction diffusion model of nuclear reactors. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 2010, 140 A: 189–201

[9] Zhou W S. Uniqueness and asymptotic behavior of coexistence states for a non-cooperative model of nuclear reactors. *Nonlinear Anal.*, 2010, 72: 2816–2820

[10] Li Y H, Li F Y. Nontrivial solutions to a class of systems of second-order differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 2012, 388: 410–419

[11] Zhou J, Shi J P. Uniqueness of the positive solution for a non-cooperative model of nuclear reactors. *Appl. Math. Lett.*, 2013, 26: 1005–1007

[12] Bie Q Y. Global stability of the positive equilibrium for a non-cooperative model of nuclear reactors. *Electron. J. Qual. Theo. Diff. Eqs.*, 2012, 16: 1–10

[13] Wang F L, An Y K. Positive solutions for a second-order differential system. *J. Math. Anal. Appl.*, 2011, 373: 370–375

[14] Wang F L, An Y K. On positive solutions for a second order differential system with indefinite weight. *Appl. Math. Comput.*, 2015, 259: 753–761

[15] Wang F L, Wang Y H. Existence of positive stationary solutions for a reaction-diffusion system. *Boundary Value Problems*, 2016, 2016(11): 1–10

[16] Chen R P, Ma R Y. Positive solutions of the second-order differential systems in reactor dynamics. *Appl. Math. Comput.*, 2012, 219: 3882–3892

[17] Chen R P, Ma R Y. Global bifurcation of positive radial solutions for an elliptic system in reactor dynamics. *Comput. Math. Appl.*, 2013, 65: 1119–1128

[18] Chen R P, Li X Y. The steady states of a non-cooperative model arising in reactor dynamics. *Comput. Math. Appl.*, 2016, 72: 594–602

[19] Crandall M G, Rabinowitz P H. Bifurcation from simple eigenvalues. *J. Funct. Anal.*, 1971, 8: 321–340

[20] López-Gómez J, Mora-Corral C. Algebraic Multiplicity of Eigenvalues of Linear Operators. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser/Springer, 2007

[21] López-Gómez J. Spectral Theory and Nonlinear Functional Analysis. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC, 2001

[22] Rabinowitz P H. Some global results for nonlinear eigenvalue problems. *J. Funct. Anal.*, 1971, 7: 487–513

[23] López-Gómez J, Molina-Meyer M. Bounded components of positive solutions of abstract fixed point equations: Mushrooms, loops and isolas. *J. Differential Equations*, 2005, 209: 416–441

[24] Ma R Y, Chen R P, Wang H Y. Coexistence states of an elliptic system modeling a population with

two age groups. *Comput. Math. Appl.*, 2015, 69: 1263–1271

[25] Ma R Y, Gao H L, Lu Y Q. Radial positive solutions of nonlinear elliptic systems with Neumann boundary conditions. *J. Math. Anal. Appl.*, 2016, 434: 1240–1252

[26] Ma R Y, Chen T L, Wang H Y. Nonconstant radial positive solutions of elliptic systems with Neumann boundary conditions. *J. Math. Anal. Appl.*, 2016, 443: 542–565

[27] Dai G W, Ma R Y. Unilateral global bifurcation phenomena and nodal solutions for p-Laplacian. *J. Differential Equations*, 2012, 252: 2448–2468

[28] Dai G W, Ma R Y. Global bifurcation, Berestycki's conjecture and one-sign solutions for p-Laplacian. *Nonlinear Anal.*, 2013, 91: 51-59

[29] Dai G W, Wang H Y, Yang B X. Global bifurcation and positive solution for a class of fully nonlinear problems. *Comput. Math. Appl.*, 2015, 69: 771–776

[30] Agmon S, Douglis A, Nirenberg L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary value conditions I. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1959, 12: 623–727

[31] Brézis H. Analyse Fontionnelle. Paris: Masson, 1983

Global Bifurcation of Positive Solutions of a Mathematical Model Arising In Nuclear Engineering

CHEN Ruipeng LI Xiaoya

(*College of Mathematics and Information Science, North Minzu University, Yinchuan* 750021*, China*)

(*E-mail: ruipengchen@126.com; lixiaoyacrp@163.com*)

Abstract In this paper, we investigate the existence of positive solutions of a mathematical model, which arises from nuclear reactor dynamics and has heat exchange with the outside. The model is introduced to study the interactions between the density of fast neutrons and the temperature in the reactor. From a mathematical point of view, the importance of this model relies upon the fact that the associated variational systems are of non-cooperative type and, consequently, the comparison techniques available for cooperative systems fail to work out. By applying the bifurcation theory, a necessary and sufficient condition for the existence of positive solutions is obtained, and the global bifurcation structure of positive solutions is established. Meanwhile, the asymptotic behavior of positive solutions is analysed carefully. Our results enrich and complement those available in the literature.

Key words nuclear reactor; positive solutions; existence; asymptotic behavior; bifurcation theory

MR(2000) Subject Classification 35J57

Chinese Library Classification O175.8