第62卷第1期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.62, No.1
2019年1月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Jan., 2019

文章编号: 0583-1431(2019)01-0157-10 **文献标识码: A**

一个标量泛函的研究及其在集值优化问题中的应用

张从军 李 赛

南京财经大学应用数学学院 南京 210023
E-mail: zcjyysxx@163.com; lisaimath@163.com

摘 要 本文在 K 条件下, 研究了所给标量泛函的连续性和拟凸性, 并利用该标量泛函, 将集值优化问题转化为均衡问题, 进而研究了含约束的集值优化问题弱充分解的存在性和拟集值优化问题强逼近解映射的上半连续性与下半连续性. 与最近的文献相比, 我们的方法是新的, 条件和结论也更具一般性.

关键词 标量泛函; 集值优化问题; 连续性; 拟凸性
MR(2010) 主题分类 49J53, 90C29
中图分类 O177.91

The Study of a Scalarizing Function with Application in Set-valued Optimization Problems

Cong Jun ZHANG Sai LI

School of Applied Mathematics, Nanjing university of Finance and Economics, Nanjing 210023*, P. R. China*
E-mail: *zcjyysxx@*163*.com*; *lisaimath@*163*.com*

Abstract We investigate a scalarizing function's continuity and convexity under K-conditions. Utilizing that function, we convert set-valued optimization problems into equilibrium problems, and then study existence of efficient solutions of set-valued optimization problems with constraints, the upper semicontinuity and lower semicontinuity of strongly approximate solution mappings to the parametric set-valued optimization problems. As compared with relevant literatures, our methods are new, our conclusions and conditions are more general.

Keywords scalarizing function; set-valued optimization problems; continuity; quasi-convexity
MR(2010) Subject Classification 49J53, 90C29
Chinese Library Classification O177.91

收稿日期: 2017-11-02; 接受日期: 2018-05-15
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11071109);
江苏省自然科学基金项目 (BK20171041) 及江苏省研究生科研创新项目 (KYCX17_1204)

1 引言

文 [3, 5] 引进了标量方法, 并以此研究向量优化问题, 得到两个非凸的分离理论. 文 [1, 6, 11] 把该方法推广到集值优化问题中. 具体说来, 文 [6] 在非凸的假设下, 得到了集值优化问题的表示理论和存在性理论, 文 [1] 得到了 Jordan 类型的替代理论, 文 [11] 对于集值优化问题引进了三种 well-posedness 概念, 并且证明了相关的等价性理论. 本文不同于文 [1, 3, 5, 6, 11], 我们利用一个标量泛函, 把集值优化问题转化为均衡问题, 通过求解均衡问题从而解决原问题.

最近, 文 [8] 研究了文 [6] 中引进泛函的连续性和凸性, 进而研究了拟集值优化问题强逼近解映射的上半连续性与下半连续性. 他们在集值参数映射连续性, 凸性的假设下, 得到了标量泛函的连续性和拟凸性, 并以此研究拟集值优化问题的强逼近解. 文 [8] 的方法依赖于集值分析中的相关结论和赋范空间的相关性质.

与文 [8] 的研究方法完全不同. 本文以拓扑向量空间为框架, 在 K- 条件下, 证明了所给泛函的连续性和拟凸性. 在集值优化问题中, 半序往往是由锥诱导出来的, 而 K 条件与锥紧密相关. 我们的方法不仅适用于文 [8] 中的标量泛函, 还适用于文 [1] 中的相关标量泛函. 我们的方法是全新的, 空间框架、假设条件和结论也更加一般.

以上方法的使用以及研究问题的视角, 本文尚属首次.

本文第 2 节介绍预备知识. 第 3 节在 K 条件下讨论标量泛函的连续性和拟凸性. 第 4, 5 节利用以上结果, 研究了含约束的集值优化问题弱充分解的存在性, 拟集值优化问题强逼近解映射的上半连续性和下半连续性.

2 预备知识

本节 $(Y, \preceq)$ 表示拓扑向量空间, 这里半序 $\preceq$ 是由闭凸点锥 $K \subset Y$ 诱导出来的. $\wp_0(Y)$ 表示 Y 中的非空子集族, 对 $A \in \wp_0(Y)$, $\text{int}A$ 和 $\text{cl}A$ 分别表示 A 的内部和闭包. 半序 $\preceq$ 的定义如下: $x, y \in Y$,

$$x \preceq y \Leftrightarrow y - x \in K,$$
$$x \ll y \Leftrightarrow y - x \in \text{int}\, K.$$

以下假定 e 是 -int$K$ 中的一个固定点. 令 $k_0 := -e$.

定义 2.1 令 a 是 Y 中的一个点. 如下定义的泛函 $\phi_{e,a} : Y \to R$,

$$\phi_{e,a}(y) := \min\{t \in R : y \in te + a + K\}, \quad \forall y \in Y \tag{2.1}$$

被称为 Gerstewizt's 泛函.

已知泛函 (2.1) 是 Y 上的连续函数, 由 $\phi_{e,a}(b) = \phi_{e,0}(b - a)$ 可知, $\phi_{e,\cdot}(\cdot)$ 是 $Y \times Y$ 上的连续函数.

用子集 $A \in \wp_0(Y)$ 代替点 a, 我们得到如下泛函 $\phi_{e,A}(y) : Y \to R \cup \{-\infty\}$,

$$\phi_{e,A}(y) := \inf\{t \in R : y \in te + A + K\}, \quad \forall y \in Y. \tag{2.2}$$

同样地, 泛函 (2.2) 也是 Y 上的连续函数, 并且 $\phi_{e,A}(y) = \inf_{a \in A}\{\phi_{e,a}(y)\}$.

令 $A \in \wp_0(Y)$, A 称为 K- 适当, 如果 $A + K \neq Y$; A 称为 K- 闭, 如果 $A + K$ 是闭集; A 称为 K- 有界, 如果对于 Y 中的每个零邻域 U, 存在一个正数 t 满足 $A \subseteq tU + K$; A 称为 K- 紧, 如果对于 A 的任意形式的覆盖 $\{U_\alpha + K\}$, U_α 是开集, 存在有限子覆盖. 容易得到, 若 A 是 K-

紧的, 则 A 是 K- 闭并且 K- 有界的. 令 $\wp_{0K}(Y)$ 是 Y 中的 K- 适当子集族. 本文中所说的 K 条件具体是指, K- 适当, K- 闭, K- 有界, K- 紧, 以及后面提到的 K- 上半连续, K- 下半连续, K- 凸等条件.

命题 2.2 令 $A \in \wp_{0K}(Y)$, $r \in R$. 然后对于任何 $y \in Y$, 我们有:

(i) $-\infty < \phi_{e,A}(y) < \infty$.

(ii) $\phi_{e,A}(y) < r \Leftrightarrow y \in re + A + \operatorname{int} K$.

(iii) $\phi_{e,A}(y) \le r \Leftrightarrow y \in re + \operatorname{cl}(A + K)$.

定义 2.3 [6] 泛函 $G_e(\cdot,\cdot) : \wp_{0K}(Y) \times \wp_{0K}(Y) \to R \cup \{\infty\}$ 被定义成如下:

$$G_e(A,B) := \sup_{b\in B}\{\phi_{e,A}(b)\}, \quad \forall (A,B) \in \wp_{0K}(Y) \times \wp_{0K}(Y). \tag{2.3}$$

令 $A, B \in \wp_0(Y)$, 我们用 $\preceq^K$ ($\ll^K$) 表示如下的集合半序关系

$$A \preceq^K B \Leftrightarrow B \subseteq A + K (A \ll^K B \Leftrightarrow B \subseteq A + \operatorname{int} K).$$

这里的集合半序关系是向量半序关系的自然推广.

定义 2.4 一个函数 $f : \wp_{0K}(Y) \to R \cup \{\infty\}$ 被称为 K- 递减 (K- 递增) 如果

$$A, B \in \wp_{0K}(Y), A \preceq^K B \Rightarrow f(B) \le f(A) \quad (f(A) \le f(B)).$$

命题 2.5 [6] 令 $A, B \in \wp_{0K}(Y)$, 我们有如下关系:

(i) 如果 A 是 K- 闭的, 则 $G_e(A, A) = 0$.

(ii) 如果 A,B 是 K- 有界的, 则 $-\infty < G_e(A,B) < \infty$.

(iii) $G_e(A,\cdot)$ 是 K- 递减的.

(iv) $G_e(\cdot,B)$ 是 K- 递增的.

(v) 如果 A 和 B 是 K- 紧的, 则 $G_e(A,B) \ge 0 \Leftrightarrow A \ll B$ 不成立.

(vi) 如果 A 是 K- 闭和 K- 有界的, B 是 K- 紧的, 则 $G_e(A,B) = \max_{b\in B}\{\phi_{e,A}(b)\}$.

(vii) 如果 A 是 K- 闭的并且 $G_e(A,B) < \infty$, 则 $G_e(A,B) = \min\{t \in R : B \subseteq te + A + K\}$.

(viii) 如果 A 是 K- 闭的, 则 $A \preceq^K B \Leftrightarrow G_e(A,B) \le 0$.

(ix) 如果 A 是 K- 闭的, 则 $\phi_{e,A}(y) = \min_{a\in A}\{\phi_{e,a}(y)\}$.

定义 2.6 设 X 是拓扑向量空间, A 是 X 的非空凸子集. 集值映射 $\varphi : A \rightrightarrows Y$ 称为:

(i) K- 凸, 如果对于任何 $x_1, x_2 \in A$, 任何 $t \in [0,1]$, 如下关系成立

$$t\varphi(x_1) + (1-t)\varphi(x_2) \subseteq \varphi(tx_1 + (1-t)x_2) + K.$$

(ii) 严格 K- 凸, 如果对于任何 $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \ne x_2$, 任何 $t \in]0,1[$, 如下关系成立

$$t\varphi(x_1) + (1-t)\varphi(x_2) \subseteq \varphi(tx_1 + (1-t)x_2) + \mathrm{intK}.$$

(iii) 自然拟 K- 凸, 如果对于任何 $x_1, x_2 \in A$, 任何 $t \in [0,1]$, 存在 $\lambda \in [0,1]$ 满足

$$\lambda\varphi(x_1) + (1-\lambda)\varphi(x_2) \subseteq \varphi(tx_1 + (1-t)x_2) + K.$$

(iv) 自然拟 K- 凹, 如果对于任何 $x_1, x_2 \in A$, 任何 $t \in [0,1]$, 存在 $\lambda \in [0,1]$ 满足

$$\varphi(tx_1 + (1-t)x_2) \subseteq \lambda\varphi(x_1) + (1-\lambda)\varphi(x_2) + K.$$

以上概念是集值映射凸性有关概念的自然推广, 引进它的主要原因是, 半序是由锥诱导出的.

设 X 是拓扑空间, 集值映射 $F: X \rightrightarrows Y$ 在 $x_0 \in X$ 是 Hausdorff 上半连续的 (H-u.s.c), 如果对于 Y 的任何零邻域 V, 存在 x_0 的邻域 U_{x_0}, in X, K- 上半连续 (K-u.s.c), 如果对于任何 Y 中的开集 V, $F(x_0) \subseteq V$, 存在 x_0 的邻域 U_{x_0},

$$F(x) \subseteq F(x_0) + V, \quad \forall\, x \in U_{x_0}.$$

称 F 在 X 上 Hausdorff 上半连续, 如果对于任何 $x_0 \in X$, F 在 x_0 是 Hausdorff 上半连续的.

定义 2.7[4] 集值映射 $F: X \rightrightarrows Y$ 称为

(i) 在 $x_0 \in X$, K- 上半连续 (K-u.s.c), 如果对于任何 Y 中的开集 V, $F(x_0) \subseteq V$, 存在 x_0 的邻域 U_{x_0},

$$F(x) \subseteq V + K, \quad \forall\, x \in U_{x_0}.$$

(ii) 在 $x_0 \in X$, K- 下半连续 (K-l.s.c), 如果对于任何 Y 中的开集 V, $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$, 存在 x_0 的邻域 U_{x_0},

$$F(x) \cap (V - K) \neq \emptyset, \quad \forall\, x \in U_{x_0}.$$

特别地, 我们称单值映射 $f: X \to Y$ 在 $x_0 \in X$ 是 K- 上半连续的, 如果对于任何 Y 中的开集 V, $f(x_0) \in V$, 存在 x_0 的邻域 U_{x_0},

$$f(x) \in V + K, \quad \forall\, x \in U_{x_0}.$$

称单值映射 f 在 $x_0 \in X$ 是 K- 下半连续, 如果对于任何 Y 中的开集 V, $f(x_0) \in V$, 存在 x_0 的邻域 U_{x_0},

$$f(x) \in V - K, \quad \forall\, x \in U_{x_0}.$$

容易看出, 当集值映射退化为单值映射的时候, 集值映射的 K- 上 (下) 半连续的定义与单值映射的 K- 上 (下) 半连续的定义是一致的. 我们称集值映射 F 在 x_0 是 K- 连续的, 如果 F 在 x_0 既是 K- 上半连续也是 K- 下半连续的. 同样地, 我们称 F 在 X 上是 K- 上半连续, K- 上半连续, K- 连续的, 若 F 在每一点都是 K- 上半连续, K- 上半连续, K- 连续的. 对于单值映射 f 也类似.

下面讨论引进的 K- 上半连续, K- 下半连续, K- 连续与通常的上半连续, 下半连续, 连续概念之间的关系.

命题 2.8 对于集值映射 $F: X \rightrightarrows Y$, 下面结论成立:

(i) 若 F 在 $x_0 \in X$ 上半连续 (下半连续), 则 F 在 x_0 点 K- 上半连续, K- 下半连续.

(ii) K- 上半连续与 K- 下半连续之间没有必然的蕴含关系.

(i) 通过定义可得. 下面我们来说明 (ii).

例 2.9 令 $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{R}_+ = \{x \in R : x \geq 0\}$, $x_0 \in X$. 对于单值映射 $f: X \to Y$, 如下关系成立:

(i) f 在 x_0 点上半连续 $\Leftrightarrow$ f 在 x_0 点 K- 下半连续.

(ii) f 在 x_0 点下半连续 $\Leftrightarrow$ f 在 x_0 点 K- 上半连续.

这里只证明 (i). (ii) 类似可得. 若 f 在 x_0 点上半连续. 对于任何 Y 中的开集 V, $f(x_0) \in V$, 存在 $\epsilon > 0$ 满足 $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) \subseteq V$. 由 f 的上半连续性可得, 存在 x_0 的邻域 U_{x_0} 满足 $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$, 对任何 $x \in U_{x_0}$. 即 $f(x) \in V - K$, 对于任何 $x \in U_{x_0}$. 若 f 在 x_0 点 K- 下半连续, 要证 f 在 x_0 点上半连续, 只需证明对于任何 $r > f(x_0)$, 存在 x_0 的邻域 U_{x_0} 满足 $f(x) < r$, 对任何 $x \in U_{x_0}$. 选择一个合适的 $\epsilon > 0$ 满足 $r > f(x_0) + \varepsilon$. 由 f 在 x_0 点 K- 下半连续, 存在 x_0 的邻域 U_{x_0} 满足 $f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) - K$, 对任何 $x \in U_{x_0}$. 即 $f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon < r$, 对任何 $x \in U_{x_0}$.

具体的, 设 A 是 $\mathbb{R}$ 中的非空开集, B 是 $\mathbb{R}$ 中的非空闭集, 令 $f_1 = \chi_A, f_2 = \chi_B$, χ_A 和 χ_B 是集合的特征函数. 易知 f_1 是下半连续的, 而不是上半连续的, 由上面结论可得 f_1 是 K- 上半连续的, 而不是 K- 下半连续的; 同理可得 f_2 是 K- 下半连续的, 而不是 K- 上半连续的.

3 连续性和拟凸性

本节, $(Y, \preceq)$ 表示拓扑向量空间, 这里半序 $\preceq$ 是由闭凸点锥 $K \subset Y$ 诱导出来的.

定理 3.1 设 X_1, X_2 是两个拓扑空间. 如果集值映射 $A(x) : X_1 \rightrightarrows Y$ 和 $B(y) : X_2$ 是 K-连续的, 并且是具 K- 适当, K- 紧值的, 则泛函 $G_e(A(x), B(y))$ 是 $X_1 \times X_2$ 上的连续函数.

证明 由于对任何 $x \in X_1$, $y \in X_2$, $A(x)$ 和 $B(y)$ 是 K- 适当, K- 紧的, 故是 K- 有界的. 由命题 2.5 (ii) 可得 $-\infty < G_e(A(x), B(y)) < \infty$.

下面任取 $x_0 \in X_1$, $y_0 \in X_2$, 证明 $G_e(A(x), B(y))$ 在 (x_0, y_0) 点的连续性. 为了符号的简单, 令 $\lambda = G_e(A(x_0), B(y_0))$. 任取 $\epsilon > 0$, 由定义知, 对于任何 $b \in B(y_0)$, 存在 $a_{(b)} \in A(x_0)$, 满足

$$\phi_{e,a_{(b)}}(b) < \phi_{e,A(x_0)}(b) + \varepsilon. \tag{3.1}$$

既然 $\phi_{e,\cdot}(\cdot)$ 是 $Y \times Y$ 上的连续函数, 故存在 $a_{(b)}$ 的开邻域 $U_{a_{(b)}}$ 和 b 的开邻域 U_b 满足

$$\phi_{e,x}(y) < \phi_{e,a_{(b)}}(b) + \varepsilon, \quad \forall\, (x, y) \in U_{a_{(b)}} \times U_b. \tag{3.2}$$

下面证明如下关系成立:

$$\phi_{e,x}(y) < \phi_{e,a_{(b)}}(b) + \varepsilon, \quad \forall\, (x, y) \in (U_{a_{(b)}} - K) \times (U_b + K). \tag{3.3}$$

对于 $(x, y) \in (U_{a_{(b)}} - K) \times (U_b + K)$, 存在 $x_1 \in U_{a_{(b)}}$, $k_1 \in K$, $y_2 \in U_b$, $k_2 \in K$ 满足 $x = x_1 - k_1$, $y = y_2 + k_2$. 然后由命题 2.5 (iii), (iv) 和式子 (3.1), 可得 $\phi_{e,x}(y) \le \phi_{e,x_1}(y) \le \phi_{e,x_1}(y_2) < \phi_{e,a_{(b)}}(b) + \varepsilon$. 既然 $B(y_0)$ 是 K- 紧的, 故存在 U_{b_i} $(1 \le i \le n)$ 满足 $B(y_0) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (U_{b_i} + K)$. 由于集值映射 $B(y)$ 是 K- 上半连续的, 故存在 y_0 的开邻域 $U_{y_0}^{(1)}$ 满足

$$B(y) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (U_{b_i} + K) + K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (U_{b_i} + K), \quad \forall\, y \in U_{y_0}^{(1)}. \tag{3.4}$$

注意到集值映射 $A(x)$ 是 K- 下半连续的, 故存在 x_0 的开邻域 $U_{x_0}^{(1)}$ 满足: 对于任意 i, $1 \le i \le n$,

$$A(x) \cap (U_{a_{(b_i)}} - K) \ne \emptyset, \quad \forall\, x \in U_{x_0}^{(1)} \tag{3.5}$$

对于任何 $(x, y) \in U_{x_0}^{(1)} \times U_{y_0}^{(1)}$, 任何 $b \in B(y)$, 存在 $U_{b_i} (1 \le i \le n)$ 满足 $b \in U_{b_i} + K$, 存在 $a \in A(x) \cap (U_{a_{(b_i)}} - K)$. 然后由 (3.1) 和 (3.3) 得到

$$\phi_{e,A(x)}(b) \le \phi_{e,a}(b) < \phi_{e,a_{(b_i)}}(b_i) + \varepsilon < \phi_{e,A(x_0)}(b_i) + 2\varepsilon \le G_e(A(x_0), B(y_0)) + 2\varepsilon.$$

由上面的式子就得到

$$G_e(A(x), B(y)) \le \lambda + 2\varepsilon, \quad \forall\, (x, y) \in U_{x_0}^{(1)} \times U_{y_0}^{(1)}. \tag{3.6}$$

另一方面, 由定义知, 存在 $b \in B(y_0)$ 满足

$$\lambda - \varepsilon < \phi_{e,A(x_0)}(b). \tag{3.7}$$

既然 $\phi_{e,\cdot}(\cdot)$ 是 $Y \times Y$ 上的连续函数, 那么对于任何 $a \in A(x_0)$, 存在 a 的开邻域 U_a, b 的开邻域 $U_b^{a(b)}$ 满足

$$\phi_{e,a}(b) - \varepsilon < \phi_{e,x}(y), \quad \forall\, (x, y) \in U_a \times U_b^{a(b)}. \tag{3.8}$$

由命题 2.5 (iii), (iv) 以及 (3.8) 得到

$$\phi_{e,a}(b)-\varepsilon<\phi_{e,x}(y),\quad \forall\,(x,y)\in(U_a+K)\times(U_b^{a(b)}-K). \tag{3.9}$$

由于 $A(x_0)$ 是 K- 紧的, 故存在 $U_{a_j}(1\le j\le m)$ 满足 $A(x_0)\subseteq\bigcup_{j=1}^m(U_{a_j}+K)$. 既然集值映射 $A(x)$ 是 K- 上半连续的, 那么存在 x_0 的开邻域 $U_{x_0}^{(2)}$ 满足

$$A(x)\subseteq\bigcup_{j=1}^m(U_{a_j}+K)+K\subseteq\bigcup_{j=1}^m(U_{a_j}+K),\quad \forall\,x\in U_{x_0}^{(2)}. \tag{3.10}$$

利用 $B(y)$ 是 K- 下半连续的, 那么存在 y_0 的开邻域 $U_{y_0}^{(2)}$ 满足

$$B(y)\cap\left(\left(\bigcap_{j=1}^m U_b^{a_j(b)}\right)-K\right)\neq\emptyset,\quad \forall\,y\in U_{y_0}^{(2)}. \tag{3.11}$$

对于任何 $(x,y)\in U_{x_0}^{(2)}\times U_{y_0}^{(2)}$, 任何 $a\in A(x)$, 存在 $U_{a_j}(1\le j\le m)$ 满足 $a\in U_{a_j}+K$, 并且 $b^*\in B(y)\cap((\bigcap_{j=1}^m U_b^{a_j(b)})-K)$. 由 (3.7) 和 (3.9) 得到

$$\lambda-2\varepsilon<\phi_{e,A(x_0)}(b)-\varepsilon\le\phi_{e,a_j}(b)-\varepsilon<\phi_{e,a}(b^*).$$

由 a 的任意性得到

$$\lambda-2\varepsilon\le\phi_{e,A(x)}(b^*).$$

再由 $G_e(A(x),B(y))$ 的定义, 得到如下式子

$$\lambda-2\varepsilon\le G_e(A(x),B(y)),\quad \forall\,(x,y)\in U_{x_0}^{(2)}\times U_{y_0}^{(2)}. \tag{3.12}$$

如果令 $U_{x_0}=U_{x_0}^{(1)}\cap U_{x_0}^{(2)}$, $U_{y_0}=U_{y_0}^{(1)}\cap U_{y_0}^{(2)}$, 并且结合式子 (3.6) 和 (3.12), 就得到

$$\lambda-2\varepsilon\le G_e(A(x),B(y))\le\lambda+2\varepsilon,\quad \forall\,(x,y)\in U_{x_0}\times U_{y_0}.$$

这就得到了泛函 $G_e(A(x),B(y))$ 在 (x_0,y_0) 点的连续性. 再由 (x_0,y_0) 的任意性, 可知原命题成立. 证毕.

注 3.2 定理 3.1 推广了文 [8, 定理 3.1] (在 [8] 中 Y 是一个赋范空间, $A(x)$ 和 $B(y)$ 是连续的, 并且具 K- 适当, 紧值的). 需要指出的是, 文 [8] 中的证明, 依赖于赋范空间的性质, 并需要借助于集值分析的结论. 这种方法对本文的定理 3.1 是失效的, 我们用的证明方法不依赖于赋范空间的限制和集值分析中的现有结论, 该它不仅适用于文 [8] 中的标量泛函, 对于文 [1] 中的相关标量泛函同样适用.

通过证明可得下面两个重要推论, 即标量泛函 $G_e(A(x),B(y))$ 的上半连续性和下半连续性.

推论 3.3 设 X_1, X_2 是两个拓扑空间. 如果集值映射 $A(x):X_1\rightrightarrows Y$ 是 K- 下半连续的, 并且具 K- 适当, K- 有界值的. 集值映射 $B(y):X_2\rightrightarrows Y$ 是 K- 上半连续的, 并且具 K- 适当, K- 紧值的, 则泛函 $G_e(A(x),B(y))$ 是 $X_1\times X_2$ 的上半连续函数.

推论 3.4 设 X_1, X_2 是两个拓扑空间. 如果集值映射 $A(x):X_1\rightrightarrows Y$ 是 K- 上半连续的, 并且具 K- 适当, K- 紧值的. 集值映射 $B(y):X_2\rightrightarrows Y$ 是 K- 下半连续的, 并且具 K- 适当, K- 有界值的, 则泛函 $G_e(A(x),B(y))$ 是 $X_1\times X_2$ 上的下半连续函数.

注 3.5 无论是在变分不等式, 均衡问题, 还是优化问题中. 连续性都是比较强的条件, 因此人们更倾向于在上半连续和下半连续的条件下讨论问题. 我们得到了泛函 $G_e(A(x),B(y))$ 上 (下) 半连续的成立条件. 而且较连续性来说, 条件更弱. 具体说来, 如果我们要求泛函是上半连

续的, 我们只要求集值映射 $B(y)$ 是具 K- 紧值的, 而不需要 $A(x)$ 的 K- 紧性, K- 紧性条件被削弱了. 对于下半连续也类似. 同样地, 集值映射 $A(x)$, $B(y)$ 的 K- 连续性条件也被削弱了. 通过推论还能看出泛函 $G_e(A(x),B(y))$ 上 (下) 半连续和集值映射 $B(y)$ 的 K- 上 (下) 连续一致.

定理 3.6 设 X 是拓扑向量空间. 假定子集 $A\in\wp_{0K}(Y)$, 并且 $A+K$ 是凸的. 如果集值映射 $B(x):X\rightrightarrows Y$ 是自然拟 K- 凹的, 并且具 K- 适当值的, 那么集合 $\{x\in X:G_e(A,B(x))<0\}$ 是凸的.

证明 令 $x_1,x_2\in\{x\in X:G_e(A,B(x))<0\}$, 我们证明, 对于任何 $t\in[0,1]$, $tx_1+(1-t)x_2\in\{x:G_e(A,B(x))<0\}$. 由命题 2.2 (ii) 可知, 存在 $\lambda_1<0,\lambda_2<0$ 满足

$$B(x_1)\subseteq\lambda_1e+A+\operatorname{int}K,\quad B(x_2)\subseteq\lambda_2e+A+\operatorname{int}K.$$

既然 $B(x)$ 是自然拟 K- 凹的, 存在 $\lambda\in[0,1]$ 满足

$$B(tx_1+(1-t)x_2)\subseteq\lambda B(x_1)+(1-\lambda)B(x_2)+K.$$

于是

$$B(tx_1+(1-t)x_2)\subseteq(\lambda\lambda_1+(1-\lambda)\lambda_2)e+\lambda A+(1-\lambda)A+K+\operatorname{int}K.$$

注意到 $A+K$ 是凸的, 那么

$$B(tx_1+(1-t)x_2)\subseteq(\lambda\lambda_1+(1-\lambda)\lambda_2)e+A+K+\operatorname{int}K=(\lambda\lambda_1+(1-\lambda)\lambda_2)e+A+\operatorname{int}K.$$

所以 $G_e(A,B(tx_1+(1-t)x_2))\leq(\lambda\lambda_1+(1-\lambda)\lambda_2)$, 并且 $tx_1+(1-t)x_2\in\{x:G_e(A,B(x))<0\}$. 证毕.

定理 3.7 设 X 是拓扑向量空间. $B\in\wp_{0K}(Y)$, 并是 K- 紧的. 如果集值映射 $A(x):X\rightrightarrows Y$ 是严格 K- 凸的, 并具 K- 适当, K- 闭, K- 有界值的, 那么泛函 $G_e(A(x),B)$ 是 X 上的严格凸函数.

证明 令 $x_1,x_2\in X$, $x_1\neq x_2$, $t\in]0,1[$. 由命题 2.5 (vi) 可知, 存在 $b_0\in B$ 满足

$$G_e(A(tx_1+(1-t)x_2),B)=\max_{b\in B}\{\phi_{e,A(tx_1+(1-t)x_2)}(b)\}=\phi_{e,A(tx_1+(1-t)x_2)}(b_0). \tag{3.13}$$

既然 $A(x_1)$, $A(x_2)$ 是 K- 闭, 则存在 $y_1\in A(x_1)$ 和 $y_2\in A(x_2)$ 满足

$$\phi_{e,A(x_1)}(b_0)=\min_{y\in A(x_1)}\{\phi_{e,y}(b_0)\}=\phi_{e,y_1}(b_0). \tag{3.14}$$

$$\phi_{e,A(x_2)}(b_0)=\min_{y\in A(x_2)}\{\phi_{e,y}(b_0)\}=\phi_{e,y_2}(b_0). \tag{3.15}$$

(3.14), (3.15) 可由命题 2.5 (ix) 得到. 由 $A(x)$ 是严格 K- 凸, 得到

$$tA(x_1)+(1-t)A(x_2)\subseteq A(tx_1+(1-t)x_2)+\operatorname{int}K.$$

因此, 存在 $y_t\in A(tx_1+(1-t)x_2)$ 满足 $y_t\ll ty_1+(1-t)y_2$. 容易验证

$$\phi_{e,y_t}(b_0)<\phi_{e,ty_1+(1-t)y_2}(b_0). \tag{3.16}$$

显然 $\phi_{e,\cdot}(b_0)$ 是 Y 上的凸函数. 那么

$$\phi_{e,ty_1+(1-t)y_2}(b_0)\leq t\phi_{e,y_1}(b_0)+(1-t)\phi_{e,y_2}(b_0). \tag{3.17}$$

结合 (3.13)–(3.17), 得到

$$G_e(A(tx_1+(1-t)x_2),B)<t\phi_{e,A(x_1)}(b_0)+(1-t)\phi_{e,A(x_2)}(b_0).$$

于是

$$G_e(A(tx_1+(1-t)x_2),B)<tG_e(Ax_1,B)+(1-t)G_e(Ax_2,B).$$

证毕.

4 含约束的集值优化问题的弱充分解

本节, $(Y,\preceq)$ 表示 Banach 空间, 这里半序 $\preceq$ 是由闭凸点锥 $K\subset Y$ 诱导出来的. 我们研究在不动点约束下, 集值优化问题弱充分解的存在性.

首先介绍一些符号, 令 C_0 是 Y 中的一个非空子集, $T:Y\rightrightarrows Y$ 是一个集值映射. $T_{|C_0}$ 表示 T 在 C_0 上的限制, $\mathrm{fix}(T_{|C_0})$ 表示集合 $\{x\in C_0: x\in T(x)\}$.

引理 4.1 [2] 令 C 是 Y 的非空子集, $f:C\times C\to R$ 是函数, $T:C\rightrightarrows C$ 是集值映射. 假若存在 C 的非空闭凸子集 C_0, 并且存在 C_0 的紧子集 D 满足如下条件:

(i) $T_{|C_0}: C_0\rightrightarrows C$ 是下半连续的, 具非空, 闭值的, 并且对于任何 $x\in C_0$, $T(x)\subseteq D$.

(ii) $T_{|C_0}$ 的图像是 $C_0\times C$ 中的闭集.

(iii) 对于任何 $x\in \mathrm{fix}(T_{|C_0})$, $f(x,x)\geq 0$.

(iv) 对于任何 $x\in \mathrm{fix}(T_{|C_0})$, 集合 $\{y\in C: f(x,y)<0\}$ 是凸的.

(v) f 在 $\mathrm{fix}(T_{|C_0})\times C$ 的限制是上半连续的.

那么存在 $x\in T(x)$, 对于任何 $y\in T(x)$, $f(x,y)\geq 0$.

注 4.2 这里的引理 4.1 与文 [2, 定理 4.1] 中的表述不太一致. 我们这里引用的实际上是一个更一般的版本, 即在文 [2, 注 4.1] 描述的那个版本.

定理 4.3 令 C 是 Y 的非空子集, $T:C\rightrightarrows C$ 是集值映射, 集值映射 $A(x):C\rightrightarrows Y$ 具 K-适当, K- 紧值的, 集值映射 $B(y):C\rightrightarrows Y$ 是 K- 上半连续的, 并且具 K- 适当, K- 紧值的. 假若存在 C 的非空闭凸子集 C_0, 并且存在 C_0 的紧子集 D 满足如下条件:

(i) $T_{|C_0}: C_0\rightrightarrows C$ 是下半连续的, 具非空, 闭值的, 并且对于任何 $x\in C_0$, $T(x)\subseteq D$.

(ii) $T_{|C_0}$ 的图像是 $C_0\times C$ 中的闭集.

(iii) 对于任何 $x\in \mathrm{fix}(T_{|C_0})$, $B(x)\preceq^K A(x)$.

(iv) 集值映射 $B(y)$ 是自然拟 K- 凹的.

(v) 对于任何 $x\in \mathrm{fix}(T_{|C_0})$, 集合 $A(x)+K$ 是凸集.

(vi) $A(x)$ 在 $\mathrm{fix}(T_{|C_0})$ 的限制是 K- 下半连续的,

则存在 $x\in T(x)$, 对于任何 $y\in T(x)$, $A(x)\ll^K B(y)$ 不成立.

证明 定义函数 $f:C\times C\to R$, $f(x,y):=G_e(A(x),B(y))$. 下面逐一验证引理 4.1 中的条件是满足的. (i), (ii) 显然满足. 对 f 应用命题 2.5 (i), (iii), 结合定理 4.3 条件 (iii) 可知, 对于任何 $x\in \mathrm{fix}(T_{|C_0})$, $f(x,x)\geq 0$. 同样对 f 应用定理 3.6, 再结合定理 4.3 条件 (iv), (v) 可知, 对于任何 $x\in \mathrm{fix}(T_{|C_0})$, 集合 $\{y\in C: f(x,y)<0\}$ 是凸的. 最后对 f 应用推论 3.3, 结合定理 4.3 条件 (vi) 可知, f 在 $\mathrm{fix}(T_{|C_0})\times C$ 的限制是上半连续的. 由上讨论可知存在 $x\in T(x)$, 对于任何 $y\in T(x)$, $f(x,y)\geq 0$. 再利用命题 2.5 (v), 可知定理结论成立. 证毕.

注 4.4 上面结论得到的解与通常解不一样, 这里是表述不等式不成立, 而通常的解是表述为不等式成立. 只能建立这种弱解的原因是, 我们这里讨论的是半序. 通常描述的最优解, 往往是指全序下的最优解. 实际上, 当研究的空间框架具有较好的序结构时, 在某一个方向上不等式不成立, 就意味着另一个方向的不等式成立. 例如在 $\mathbb{R}$ 上, $x<y$ 不成立则意味着 $x\geq y$ 成立. 当我们考虑单值映射时, 由上面的结论也能得到分离类型的结论.

下面给出一个关于单值映射的推论.

定理 4.5 令 C 是 Y 的非空子集, $A(x): C \to Y$ 是单值映射, $T: C \rightrightarrows C$ 是集值映射, 单值映射 $B(y): C \to Y$ 是 K- 上半连续的. 假若存在 C 的非空, 闭凸子集 C_0, 并且存在 C_0 的一个紧子集 D 满足如下条件:

(i) $T_{|C_0}: C_0 \rightrightarrows C$ 是下半连续的, 具非空, 闭值的, 并且对于任何 $x \in C_0$, $T(x) \subseteq D$.

(ii) $T_{|C_0}$ 的图像是 $C_0 \times C$ 中的闭集.

(iii) 对于任何 $x \in \operatorname{fix}(T_{|C_0})$, $B(x) \preceq A(x)$.

(iv) 若对任何 $x_1, x_2 \in C$, $t \in [0,1]$, 存在 $\lambda \in [0,1]$ 满足 $\lambda B(y_1) + (1-\lambda)B(y_2) \preceq B(ty_1 + (1-t)y_2)$.

(v) $A(x)$ 在 $\operatorname{fix}(T_{|C_0})$ 的限制是 K- 下半连续的,

则存在 $x \in T(x)$ 满足 $(A(x) + \operatorname{int} K) \cap \{z \in Y : z = B(y),\, y \in T(x)\} = \emptyset$.

证明 注意到单点集是 K- 紧的, 也是凸的. 然后根据向量之间的半序定义, 集合之间的半序定义, 再由定理 4.3 知命题成立. 证毕.

注 4.6 这里首次在 K- 条件下建立了充分解的存在性理论、分离类型的理论, 并且削弱了连续性的相关条件.

5 拟集值优化问题强逼近解映射的上半连续性与下半连续性

本节, Λ, X, Y 表示三个赋范向量空间, $F: X \rightrightarrows Y$, $T: \Lambda \rightrightarrows X$ 是两个集值映射, $f: X\times X \to \mathbb{R}$ 是一个函数, $\operatorname{Im} T$ 表示 T 的像集, 即 $\operatorname{Im} T := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} T(\lambda)$. 假定 $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. 受文 [7] 的启发, 令 $S: \mathbb{R}_+ \times \Lambda \rightrightarrows X$ 表示拟集值优化问题的强逼近解映射, 即 $S(\varepsilon, \lambda) = \{x \in T(\lambda) : F(x) \preceq^K F(y) + \varepsilon k_0,\ \forall\, y \in T(\lambda)\}$, $\forall\, (\varepsilon, \lambda) \in \mathbb{R}_+ \times \Lambda$.

注 5.1 若 $F: X \rightrightarrows Y$ 是集值映射, 具 K- 适当, K- 闭, K- 有界值的. 由命题 2.5 (vii), (viii) 可得如下论断, $F(x) \preceq^K F(y) + \varepsilon k_0$, $\Leftrightarrow G_e(F(x), F(y)) - \varepsilon \leq 0$.

令 $E: \mathbb{R}_+ \times \Lambda \rightrightarrows X$ 表示均衡问题的强逼近解映射, 即 $E(\varepsilon, \lambda) = \{x \in T(\lambda) : f(x,y) + \varepsilon \geq 0$, $\forall\, y \in T(\lambda)\}$, $\forall\, (\varepsilon, \lambda) \in R_+ \times \Lambda$.

定义函数 $\psi: X \times X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\} : \psi(x,y) = -G_e(F(x), F(y))$.

引理 5.2 假定 $F: X \rightrightarrows Y$ 是集值映射, 并且具 K- 适当, K- 闭, K- 有界值的, 则 $x_0 \in S(\varepsilon, \lambda) \Leftrightarrow x_0 \in T(\lambda)$, $\psi(x_0, y) + \varepsilon \geq 0$, $\forall\, y \in T(\lambda)$.

证明 这是注 5.1 的直接推论. 证毕.

引理 5.3[7] 令 $(\varepsilon_0, \lambda_0) \in R_+ \times \Lambda$. 假定 $T(\lambda_0)$ 是非空紧集, $T(\cdot)$ 在 λ_0 连续, $f(\cdot,\cdot)$ 是 $T(\lambda_0) \times T(\lambda_0)$ 上的连续函数, 则 $E(\cdot,\cdot)$ 在 $(\varepsilon_0, \lambda_0)$ 上半连续.

定理 5.4 令 $(\varepsilon_0, \lambda_0) \in R_+ \times \Lambda$. 假定 $T(\lambda_0)$ 是非空紧集, $T(\cdot)$ 在 λ_0 连续. 如果 $F: X \rightrightarrows Y$ 在 $T(\lambda_0)$ 上是 K- 连续的, 并具 K- 适当, K- 紧值, 那么 $S(\cdot,\cdot)$ 在 $(\varepsilon_0, \lambda_0)$ 上半连续.

证明 由定理 3.1, 引理 5.2, 5.3 可得. 证毕.

引理 5.5[9] 令 $\varepsilon_0 > 0$, 并且对某个 $\lambda_0 \in \Lambda$, $E(0, \lambda_0) \neq \emptyset$. 假定:

(i) 集合 $T(\lambda_0)$ 是非空凸的. 对于任何 $y \in T(\lambda_0)$, $f(\cdot, y)$ 是 $T(\lambda_0)$ 上的凹函数.

(ii) $K(\cdot)$ 在 λ_0 点 Hausdorff- 上半连续, 并且在 λ_0 点下半连续.

(iii) $f(\cdot,\cdot)$ 在 $\operatorname{Im}T \times \operatorname{Im}T$ 一致连续,

则 $E(\cdot,\cdot)$ 在 $(\varepsilon_0, \lambda_0)$ 是下半连续的.

引理 5.6[8] 令 $B \in \wp_{0K}(Y)$. 如果集值映射 $F: X \rightrightarrows Y$ 是 K- 凸的, 则 $G_e(F(x), B)$ 是 X 上的凸函数.

定理 5.7 令 $\varepsilon_0 > 0$, 并且对于某个 $\lambda_0 \in \Lambda$, $S(0, \lambda_0) \neq \emptyset$. 假定:

(i) 集合 $T(\lambda_0)$ 是非空凸的, $T(\cdot)$ 在 λ_0 点 Hausdorff- 上半连续, 并且在 λ_0 点下半连续.

(ii) $\operatorname{Im} T$ 是紧集.

(iii) F 在 $T(\lambda_0)$ 上是 K- 连续、K- 凸的, 并且具 K- 适当, K- 紧值的,

则 $S(\cdot, \cdot)$ 在 $(\varepsilon_0, \lambda_0)$ 下半连续.

证明 由定理 3.1, 引理 5.2, 5.5, 5.6 可得. 证毕.

引理 5.8[10] 令 $(\varepsilon_0, \lambda_0) \in R_+ \times \Lambda$. 假定:

(i) $T(\lambda_0)$ 是非空的紧凸集, $K(\cdot)$ 在 λ_0 连续.

(ii) 对于任何 $y \in T(\lambda_0)$, $f(\cdot, y)$ 是 $T(\lambda_0)$ 上的严格凹函数.

(iii) $f(\cdot, \cdot)$ 在 $T(\lambda_0) \times T(\lambda_0)$ 连续,

则 $E(\cdot, \cdot)$ 在 $(\varepsilon_0, \lambda_0)$ 下半连续.

定理 5.9 令 $(\varepsilon_0, \lambda_0) \in R_+ \times \Lambda$. 假定 $T(\lambda_0)$ 是非空的紧凸集, $K(\cdot)$ 在 λ_0 连续. 如果 $F: X \rightrightarrows Y$ 在 $T(\lambda_0)$ 上是 K- 连续, 严格 K- 凸的, 并且具 K- 适当, K- 紧值, 那么 $S(\cdot, \cdot)$ 在 $(\varepsilon_0, \lambda_0)$ 下半连续.

证明 由定理 3.1, 3.7 及引理 5.2, 5.8 可得. 证毕.

注 5.10 定理 5.4 推广了文 [8, 定理 5.1] (文 [8] 中 $F: X \rightrightarrows Y$ 是连续的, 并且具 K- 适当, 紧值). 定理 5.7 推广了文 [8, 定理 5.2] (文 [8] 中 $F: X \rightrightarrows Y$ 是连续的, K- 凸, 并且具 K- 适当, 紧值). 定理 5.9 推广了文 [8, 定理 5.3] (文 [8] 中 $F: X \rightrightarrows Y$ 是连续的, 严格 K- 凸, 并且具 K- 适当, 紧值).

参 考 文 献

[1] Araya Y., Four types of nonlinear scalarizations and some applications in set optimization, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2012, **75**: 3821–3835.

[2] Alleche B. D., Rădulescu V., Solutions and approxiamte solutions of Quasi-equilibrium problems in Banach spaces, *J. Optim.Theory Appl.*, 2016, **170**: 629–649.

[3] Dinh The L., Theory of Vector Optimization, Lecture Notes in Econon and Math. Systems, vol. 319. Springer, Berlin, 1989.

[4] Göpfert A., Riahi H., Tammer C., et al., Variational Mthods in Partially Ordered Spaces, Springer, Berlin, 2003.

[5] Gerth C., Weidner P., Nonconvex separation theorems and some applications, *J. Optim. Theory Appl.*, 1990, **67**: 297–320.

[6] Hernández E., Rodríguez-Maeín L., Nonconvex scalarization in set optimization with set-valued maps, *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, **325**: 1–18.

[7] Shan S. Q., Yu H., Huang N. J., Upper semicontinuity of solution mappings to parametric generalized vextor quasiequilibrium problems, *J. Funct. Sp.*, 2015, Article ID 764187, 6 pages.

[8] Yu H., Huang N. J., Continuity and Convexity of a Nonlinear Scalarizing Function in Set Optimization Problems with applications. *J. Optim. Theory Appl.*, 2017, https://doi.org/10.1007/s10957-017-1080-9.

[9] Yu H., Huang N. J., Some characterizations of the approximate solutions to generalized vector equilibrium problems, *J. Ind. Manag. Optim.*, 2016, **12**: 1135–1151.

[10] Yu H., Huang N. J., Existence and stablity of solutions for a class of generalized vector equilibrium problems, *Positivity*, 2016, **20**: 829–846.

[11] Zhang W. Y., Li S. J., Teo K. L., Well-posedness for set optimization problems, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications.*, 2009, **71**: 3769–3778.