**文章编号:** 0583-1431(2019)01-0167-10 **文献标识码: A**

# 解析 Morrey 域的若干刻画

金建军

合肥工业大学宣城校区基础部 宣城 242000
E-mail: jinjjhb@163.com

唐树安

贵州师范大学数学科学学院 贵阳 550001
E-mail: tsaflyhigher@163.com

**摘 要** 研究了导数的对数属于解析 Morrey 空间的单叶函数, 并建立了解析 Morrey 域的若干新刻画.

**关键词** 解析 Morrey 空间; Schwarz 导数; Grunsky 核; 单叶函数的拟共形延拓
**MR(2010) 主题分类** 30C20, 30C62, 42B35
**中图分类** O174.5

## Some Characterizations of Analytic Morrey Domains

Jian Jun JIN

*Hefei University of Technology, Xuancheng Campus,*
*Xuancheng* 242000*, P. R. China*
*E-mail*: *jinjjhb@163.com*

Shu An TANG

*School of Mathematics Sciences, Guizhou Normal University,*
*Guiyang* 550001*, P. R. China*
*E-mail*: *tsaflyhigher@163.com*

**Abstract** We study univalent functions $f$ for which $\log f'$ belongs to the analytic Morrey spaces. We establish some new characterizations of the analytic Morrey domains.

**Keywords** analytic Morrey spaces; Schwarzian derivative; Grunsky kernel; quasiconformal extension of univalent functions
**MR(2010) Subject Classification** 30C20, 30C62, 42B35
**Chinese Library Classification** O174.5

收稿日期: 2017-09-22; 接受日期: 2018-05-16
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11501157, 11601100)

## 1 引言

设 $\Delta$ 为扩充复平面 $\widehat{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 上的单位圆, $\Delta^*=\widehat{\mathbb{C}}\setminus\overline{\Delta}$ 为 $\Delta$ 的外部, $S^1=\partial\Delta=\partial\Delta^*$ 为单位圆周. 记 $\mathscr{H}(\Delta)$ 为单位圆 $\Delta$ 上全体解析函数的集合.

设 $p\in(0,+\infty)$, 如果函数 $f\in\mathscr{H}(\Delta)$ 满足

$$\|f\|_{H_p}^p=\sup_{0<r<1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{\mathrm{i}\theta})|^p d\theta<\infty,$$

则称函数 $f$ 属于 Hardy 空间 $H^p(\Delta)$.

记 $I$ 为 $S^1$ 上的子弧, $I$ 取规范化的弧长 $|I|=\frac{1}{2\pi}\int_I|d\zeta|$.

记 $f_I=\frac{1}{|I|}\int_I f(\zeta)\frac{|d\zeta|}{2\pi}, f\in H(\Delta)$ 为 $f$ 在 $I$ 上的平均. 设 $s\in(0,1]$, 则解析 Morrey 空间 $\mathscr{L}^{2,s}(\Delta)$ 为 $f\in H^2(\Delta)$ 且满足条件

$$\sup_{I\subset S^1}\frac{1}{|I|^s}\int_I|f(\zeta)-f_I|^2\frac{|d\zeta|}{2\pi}<\infty$$

的函数构成的集合. 若进一步地, $f\in\mathscr{L}^{2,s}(\Delta)$ 且满足

$$\lim_{|I|\to 0}\frac{1}{|I|^s}\int_I|f(\zeta)-f_I|^2\frac{|d\zeta|}{2\pi}=0,$$

则所构成的集合称为小 Morrey 空间, 记为 $\mathscr{L}_0^{2,s}(\Delta)$. 当 $s=1$ 时, 解析 Morrey 空间 $\mathscr{L}^{2,s}(\Delta)$ 即为经典 BMOA 空间, 而 $\mathscr{L}_0^{2,s}(\Delta)$ 即为 VMOA.

对于 $S^1$ 上的任意子弧 $I$, 定义它在 $\Delta$ 与 $\Delta^*$ 上的 Carleson 方块分别为

$$S_\Delta(I)=\{z=re^{\mathrm{i}\theta}:1-|I|<r\le 1,\ e^{\mathrm{i}\theta}\in I\}\ \text{与}\ S_{\Delta^*}(I)=\{z=re^{\mathrm{i}\theta}:1\le r<1+|I|,\ e^{\mathrm{i}\theta}\in I\}.$$

记 $\mathscr{D}=\Delta$ 或 $\Delta^*$, 设 $\lambda$ 为 $\mathscr{D}$ 上的正 Borel 测度, 若 $\lambda$ 满足条件

$$\|\lambda\|_{C,s}=\sup_{I\subset S^1}\frac{\lambda(S_{\mathscr{D}}(I))}{|I|^s}<\infty,$$

则称 $\lambda$ 为 $\mathscr{D}$ 上的 $s$-Carleson 测度, 进一步地, 若 $\|\lambda\|_{C,s}<\infty$ 且满足

$$\lim_{|I|\to 0}\frac{\lambda(S_{\mathscr{D}}(I))}{|I|^s}=0,$$

则称 $\lambda$ 为 $\mathscr{D}$ 上的小 Carleson 测度. 为记号的简洁, 用 $S(I)$ 与 $S_*(I)$ 分别表示 $S_\Delta(I)$ 与 $S_{\Delta^*}(I)$.

$\Delta$ 上的 $s$-Carleson 测度有如下等价刻画 [25].

**定理 1.1** 设 $\lambda$ 为 $\Delta$ 上的正 Borel 测度. $\lambda$ 为 $\Delta$ 上的 $s$-Carleson 测度当且仅当

$$M_\lambda=\sup_{\zeta\in\Delta}\iint_\Delta\left(\frac{1-|\zeta|^2}{|1-\bar{\zeta}w|^2}\right)^s d\lambda(w)<\infty,$$

$\lambda$ 为 $\Delta$ 上的小 $s$-Carleson 测度当且仅当 $M_\lambda<\infty$ 且

$$\lim_{|\zeta|\to 1^-}\iint_\Delta\left(\frac{1-|\zeta|^2}{|1-\bar{\zeta}w|^2}\right)^s d\lambda(w)=0.$$

Wu 和 Xie 在文 [24] 中证明了:

**定理 1.2** 设 $s\in(0,1]$, $f\in\mathscr{H}(\Delta)$, 则 $f\in\mathscr{L}^{2,s}(\Delta)$ (或 $\mathscr{L}_0^{2,s}(\Delta)$) 当且仅当 $|f'(z)|^2(1-|z|^2)dxdy$ 为 $\Delta$ 上的 $s$-Carleson 测度 (或小 $s$-Carleson 测度).

解析 Morrey 空间更多内容及研究结果可见 Liu 的文 [13] 及其参考文献.

设 $f$ 是 $\Delta$ 上的单叶函数, 对于 $\mathscr{H}(\Delta)$ 的子空间 $X$, 我们引用文 [10] 的说法, 如果 $\log f'\in X$, 则称 $\Omega=f(\Delta)$ 为 $X$ 域. 最近, 对于不同的空间 $X\subset\mathscr{H}(\Delta)$, 一些学者研究了 $\log f'\in X$ 与 $f$ 的 Schwarz 导数之间的关系. 这里 $f$ 的 Schwarz 导数记为 $S_f(z)$, 定义如下:

$$S_f(z)=N_f'(z)-\frac{1}{2}N_f^2(z),\quad N_f(z)=(\log f')'(z)=\frac{f''(z)}{f'(z)}.$$

1991 年, Astala 和 Zinsmeister [1] 首先利用 $f$ 的 Schwarz 导数刻画了 BMOA 域, 随后, Pau 与 Peláez [15] 将文 [1] 中的结果推广到了 $Q_p$ 空间的情形. 而 Pérez-González 和 Rättyä 在文 [16] 中对 Dirichlet 域和 VMOA 域证明了相关结果. 最近 Zorboska [28] 研究了更一般的 Besov 型域, Zhou [27] 则考虑了 $X=Q_K$ 的情形.

而对于 $X$ 为解析 Morrey 空间, Wang 和 Xiao 在文 [21] 中也研究了 $\log f'$ 属于解析 Morrey 空间与 $f$ 的 Schwarz 导数之间的关系, 并证明了如下结果.

**定理 1.3** 设 $s\in(0,1)$, $f$ 为 $\Delta$ 上的单叶函数.

(1) 若 $\log f'\in\mathscr{L}^{2,s}(\Delta)$ (或 $\mathscr{L}_0^{2,s}(\Delta)$), 则 $\log f'\in\mathscr{B}$, 且 $|S_f(z)|^2(1-|z|^2)^3dxdy$ 是 $\Delta$ 上的 $s$-Carleson 测度 (或小 $s$-Carleson 测度);

(2) 若 $\log f'\in\mathscr{B}_0$, 且 $|S_f(z)|^2(1-|z|^2)^3dxdy$ 是 $\Delta$ 上的 $s$-Carleson 测度 (或小 $s$-Carleson 测度), 则 $\log f'\in\mathscr{L}^{2,s}(\Delta)$ (或 $\mathscr{L}_0^{2,s}(\Delta)$).

这里 $\mathscr{B}$ 为 Bloch 空间, 定义为

$$\mathscr{B}=\left\{f:f\in\mathscr{H}(\Delta),\|f\|_{\mathscr{B}}=\sup_{z\in\Delta}|f'(z)|(1-|z|^2)<\infty\right\},$$

而小 Bloch space $\mathscr{B}_0$ 则定义为

$$\mathscr{B}_0=\left\{f:f\in\mathscr{H}(\Delta):\lim_{|z|\to1^-}|f'(z)|(1-|z|^2)=0\right\}.$$

本文针对定理 1.3 的第 (2) 部分, 将利用拟共形映射理论的若干结果, 建立解析 Morrey 空间域更多的描述刻画, 这些结果同时增进了我们对 Morrey 空间理论以及拟共形映射理论的理解. 为叙述本文的主要结果, 接下来介绍拟共形映射理论的一些记号及定义 [11, 19].

设 $h$ 是单位圆周 $S^1$ 到自身的保向同胚. 我们称 $h$ 是拟对称的, 如果存在 $C(h)$, 使得对任意 $S^1$ 上的子弧 $I\subset S^1$ ($|I|\le\frac{1}{2}$) 有 $|h(I^*)|\le C(h)|h(I)|$ 成立, 这里 $I^*$ 是与 $I$ 有相同中点而 2 倍长度于 $I$ 的弧. 设 $f$ 为 $\Delta$ 上的单叶函数, 其边界 $\partial f(\Delta)$ 是 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上的一条 Jordan 曲线. $g$ 是 $\Delta^*$ 到 $\widehat{\mathbb{C}}\setminus\overline{f(\Delta)}$ 上的 Riemann 映射. 则 $h=f^{-1}\circ g:S^1\to S^1$ 为 $S^1$ 的一个自同胚. 我们称 $h$ 是对应于 $f$ 的共形粘合, 并且 $h$ 是拟对称的当且仅当 $f$ 可以拟共形延拓到整个复平面.

对于单位圆周 $S^1$ 上的拟对称同胚 $h$, Hu 和 Shen [11] 引入了如下核函数

$$\phi_h(\zeta,z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{S^1}\frac{h(w)}{(1-\zeta w)^2(1-zh(w))}\,dw,\quad(\zeta,z)\in\Delta\times\Delta.$$

设 $f$ 为 $\Delta$ 上的单叶函数, $f$ 的所谓 Grunsky 核定义为

$$U(f,\zeta,z)=\frac{f'(\zeta)f'(z)}{[f(\zeta)-f(z)]^2}-\frac{1}{(\zeta-z)^2},\quad(\zeta,z)\in\Delta\times\Delta.$$

记

$$\phi_h(z)=\Big(\frac{1}{\pi}\iint_\Delta |\phi_h(\zeta,z)|^2\,d\xi d\eta\Big)^2,\quad z\in\Delta,$$

$$U(f,z)=\left(\frac{1}{\pi}\iint_\Delta |U(f,\zeta,z)|^2\,d\xi d\eta\right)^{\frac{1}{2}},\quad z\in\Delta.$$

以下即是本文的主要结果.

**定理 1.4** 设 $0<s<1$, $f$ 为 $\Delta$ 上的有界单叶函数, $h=f^{-1}\circ g$ 为对应的拟对称共形粘合. 若 $\log f'\in\mathscr{B}_0$, 则如下叙述相互等价:

(1) $\log f'\in\mathscr{L}^{2,s}(\Delta)$ (或 $\mathscr{L}_0^{2,s}(\Delta)$).

(2) $|S_f(z)|^2(1-|z|^2)^3dxdy$ 是 $\Delta$ 上的 $s$-Carleson 测度 (或小 $s$-Carleson 测度).

(3) $f$ 可拟延拓为整个复平面上的一个拟共形映射, 且其复特征 $\mu$ 满足 $\frac{|\mu(z)|^2}{|z|^2-1}dxdy$ 是 $\Delta^*$ 上的 $s$-Carleson 测度 (或小 $s$-Carleson 测度).

(4) $U^2(f,z)(1-|z|^2)\,dxdy$ 是 $\Delta$ 上的 $s$-Carleson 测度 (或小 $s$-Carleson 测度).

(5) $\phi_h^2(\bar z)(1-|z|^2)\,dxdy$ 是 $\Delta$ 上的 $s$-Carleson 测度 (或小 $s$-Carleson 测度).

以下, 我们将用 $C$ 表示某个正常数, 且它在不同的位置可能取不同的值.

## 2 若干引理

为证明主要结果, 需要一些引理. 将用到文 [2] 中证明的如下结果.

**引理 2.1** 设 $f$ 为 $\Delta$ 上的有界单叶函数, $\partial f(\Delta)$ 是复平面 $\mathbb{C}$ 内的 Jordan 曲线且 $\log f'\in\mathscr{B}_0$, 则 $f$ 可拟延拓到整个复平面上, 且存在常数 $R>1$ 使得其复特征 $\mu$ 满足

$$|\mu(z)|=\frac{1}{2}\left|S_f\left(\frac{1}{\bar z}\right)\right|\left(1-\frac{1}{|z|^2}\right)^2,\quad 1<|z|<R.$$

Hu 和 Shen 在文 [11] 中还引入了如下核函数

$$\psi_h(\zeta,z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{S^1}\frac{h(w)}{(\zeta-w)^2(1-zh(w))}\,dw,\quad (\zeta,z)\in\Delta\times\Delta.$$

他们同时定义了如下两个算子

$$T_h^-\psi(\zeta)=\frac{1}{\pi}\iint_\Delta \phi_h(\zeta,\bar z)\psi(z)\,dxdy,\quad \psi\in\mathscr{A}^2,\ \ \zeta\in\Delta,$$

$$T_h^+\psi(\zeta)=\frac{1}{\pi}\iint_\Delta \psi_h(\zeta,\bar z)\psi(z)\,dxdy,\quad \psi\in\mathscr{A}^2,\ \ \zeta\in\Delta,$$

这里 $\mathscr{A}^2$ 是 $\Delta$ 上的具有如下内积的解析 Hilbert 空间:

$$\langle\phi,\psi\rangle=\frac{1}{\pi}\iint_\Delta \phi(w)\overline{\psi(w)}\,dudv,\quad \|\phi\|=\langle\phi,\phi\rangle^{\frac{1}{2}}<\infty.$$

文 [11] 证明了 $T_h^-$ 和 $T_h^+$ 是 $\mathscr{A}^2$ 上的两个有界算子. 随后, Shen 和 Wei 在文 [19] 中证明了:

**引理 2.2** 设 $f$ 为 $\Delta$ 上的单叶函数, $h=f^{-1}\circ g$ 为对应的拟对称共形粘合, 则有

$$U(f,z)\le\phi_h(\bar z)\le\|T_h^+\|U(f,z),\quad z\in\Delta.$$

**引理 2.3** 设 $f$ 为 $\Delta$ 上的单叶函数, $h=f^{-1}\circ g$ 为对应的拟对称共形粘合, $\upsilon$ 是 $h^{-1}$ 延拓到 $\Delta$ 内的拟共性映射的复特征, 则有

$$\frac{(1-|z|^2)^2}{36}|S_f(z)|^2\le U^2(f,z)\le\phi_h^2(\bar z)\le\frac{1}{\pi}\iint_\Delta\frac{|\upsilon(w)|^2}{1-|\upsilon(w)|^2}\frac{1}{|1-\bar zw|^4}dudv.$$

最后我们还需要如下引理 (见 [26]).

**引理 2.4** 设 $\alpha>-1,\gamma,\beta>0$, $\gamma+\beta-\alpha>2$. 若 $\beta<\alpha+2<\gamma$, 则有

$$\iint_{\Delta}\frac{(1-|w|^2)^{\alpha}}{|1-z\bar{w}|^{\gamma}|1-\zeta\bar{w}|^{\beta}}dudv\le\frac{C}{(1-|z|^2)^{\gamma-\alpha-2}|1-\zeta\bar{z}|^{\beta}}.$$

## 3 定理 1.4 的证明

我们仅就解析 Morrey 空间 $\mathscr{L}^{2,s}(\Delta)$ 证明定理 1.4, 小 Morrey 空间 $\mathscr{L}_0^{2,s}(\Delta)$的证明完全类似.

首先注意到 (1)⇔(2) 已由定理 1.3 给出. 引理 2.2 说明 (4)⇔(5), 而引理 2.3 蕴含 (5)⇒(2), 因此只需证明 (2)⇒(3) 和 (3)⇒(5) 即可.

首先证明 (2)⇒(3). 设 $|S_f(z)|^2(1-|z|^2)^3dxdy$ 是 $\Delta$ 上的 $s$-Carleson 测度, 又 $\log f'\in\mathscr{B}_0$, 由引理 2.1, 则 $f$ 可拟延拓到整个复平面上, 且存在常数 $R\in(1,2)$ 使得其复特征 $\mu$ 满足

$$|\mu(z)|=\frac{1}{2}\left|S_f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)\right|\left(1-\frac{1}{|z|^2}\right)^2,\quad 1<|z|<R.$$

于是

$$\frac{|\mu(z)|^2}{|z|^2-1}=\frac{|S_f(\frac{1}{\bar{z}})|^2(|z|^2-1)^3}{4|z|^8}\le\left|S_f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)\right|^2(|z|^2-1)^3,\quad 1<|z|<R.\tag{3.1}$$

由 $|S_f(z)|^2(1-|z|^2)^3dxdy$ 是 $\Delta$ 上的 $s$-Carleson 测度, 易见 $|S_f(\frac{1}{\bar{z}})|^2(|z|^2-1)^3dxdy$ 为 $\Delta^*$ 上的 $s$-Carleson 测度, 从而由 (3.1) 不难看到 $\frac{|\mu(z)|^2}{|z|^2-1}dxdy$ 是 $\Delta^*$ 上的 $s$-Carleson 测度.

其次证明 (3)⇒(5). 设 $f$ 为 $\Delta$ 上的有界单叶函数, 且 $f$ 可拟延拓到整个复平面, 其复特征 $\mu$ 满足 $\frac{|\mu(z)|^2}{|z|^2-1}dxdy$ 是 $\Delta^*$ 上的 $s$-Carleson 测度. 下面说明 $\frac{|\mu(\frac{1}{\bar{z}})|^2}{1-|z|^2}dxdy$ 为 $\Delta$ 上的 $s$-Carleson 测度.

由于 $\frac{|\mu(z)|^2}{|z|^2-1}dxdy$ 是 $\Delta^*$ 上的 $s$-Carleson 测度, 首先对于 $I\subset S^1$ 且 $|I|>\frac{1}{2}$, 有

$$\begin{aligned}\frac{1}{|I|^s}\iint_{S(I)}\frac{|\mu(\frac{1}{\bar{z}})|^2}{1-|z|^2}dxdy&\le 2\iint_{\{z\in S(I):|z|<\frac{1}{2}\}}\frac{|\mu(\frac{1}{\bar{z}})|^2}{1-|z|^2}dxdy\\&\quad+2\iint_{\{z\in S(I):|z|\ge\frac{1}{2}\}}\frac{|\mu(\frac{1}{\bar{z}})|^2}{1-|z|^2}dxdy\\&\le C+2\iint_{S_*(S^1)}\frac{|\mu(z)|^2}{|z|^2-1}\frac{1}{|z|^2}dxdy\le C.\end{aligned}$$

我们再考虑 $|I|\le\frac{1}{2}$ 的弧. 记 $J$ 是与 $I$ 有相同中点, $|J|=2|I|$ 的弧. 于是, 若 $z\in S(I)$, 则 $\frac{1}{\bar{z}}\in S_*(J)$, 且有

$$\begin{aligned}\frac{1}{|I|^s}\iint_{S(I)}\frac{|\mu(\frac{1}{\bar{z}})|^2}{1-|z|^2}dxdy&\le\frac{2}{|J|^s}\iint_{S_*(J)}\frac{|\mu(z)|^2}{|z|^2-1}\frac{1}{|z|^2}dxdy\\&\le\frac{2}{|J|^s}\iint_{S_*(J)}\frac{|\mu(z)|^2}{|z|^2-1}dxdy\le C.\end{aligned}$$

这意味着 $\frac{|\mu(\frac{1}{\bar{z}})|^2}{1-|z|^2}dxdy$ 为 $\Delta$ 上的 $s$-Carleson 测度.

然后注意到 $h=f^{-1}\circ g$, 则 $\tilde{f}=g^{-1}\circ f|_{\Delta^*}$ 是以 $h^{-1}$ 为边界, $\Delta^*$ 到自身的拟共形映射, 且在 $\Delta^*$ 上 $\tilde{f}$ 与 $f$ 具有相同的复特征 $\mu$. 于是 $\hat{f}=j\circ\tilde{f}\circ j|_{\Delta}$, $j(z)=\frac{1}{\bar{z}}$ 是以 $h^{-1}$ 为边界, $\Delta$ 到自

身的拟共形映射, 且 $\hat{f}$ 的复特征 $\upsilon$ 满足 $|\upsilon(z)|=|\mu(\frac{1}{\bar{z}})|$. 因此 $\frac{|\upsilon(z)|^2}{1-|z|^2}dxdy$ 为 $\Delta$ 上的 $s$-Carleson 测度. 于是由引理 2.3, 有

$$\begin{aligned}&\sup_{\zeta\in\Delta}\iint_{\Delta}\left(\frac{1-|\zeta|^2}{|1-\bar{\zeta}w|^2}\right)^s\phi_h^2(\bar{w})(1-|w|^2)dudv\\&\leq\frac{1}{\pi}\sup_{\zeta\in\Delta}\iint_{\Delta}\left(\frac{1-|\zeta|^2}{|1-\bar{\zeta}w|^2}\right)^s(1-|w|^2)dudv\iint_{\Delta}\frac{|\upsilon(z)|^2}{1-|\upsilon(z)|^2}\frac{1}{|1-z\bar{w}|^4}dxdy\\&\leq C\sup_{\zeta\in\Delta}\iint_{\Delta}\left(\frac{1-|\zeta|^2}{|1-\bar{\zeta}z|^2}\right)^s\frac{|\upsilon(z)|^2}{1-|z|^2}dxdy\iint_{\Delta}\frac{(1-|w|^2)|1-\zeta\bar{z}|^{2s}(1-|z|^2)}{|1-\zeta\bar{w}|^{2s}|1-z\bar{w}|^4}dudv.\end{aligned}$$

运用引理 2.4 (取 $\alpha=1$, $\beta=2s$, $\gamma=4$), 则有

$$\sup_{\zeta\in\Delta}\iint_{\Delta}\left(\frac{1-|\zeta|^2}{|1-\bar{\zeta}w|^2}\right)^s\phi_h^2(\bar{w})(1-|w|^2)dudv\leq C\sup_{\zeta\in\Delta}\iint_{\Delta}\left(\frac{1-|\zeta|^2}{|1-\bar{\zeta}z|^2}\right)^s\frac{|\upsilon(z)|^2}{1-|z|^2}dxdy.$$

因此, 由 $\frac{|\upsilon(z)|^2}{1-|z|^2}dxdy$ 为 $\Delta$ 上的 $s$-Carleson 测度及定理 1.1 我们知 $\phi_h^2(\bar{z})(1-|z|^2)\,dxdy$ 是 $\Delta$ 上的 $s$-Carleson 测度. 定理 1.4 证毕.

**注 3.1** 在以上证明中, 我们由 (3)⇒(5) 及 (5)⇒(2) 推出 (3)⇒(2). 而 (3) ⇒ (5) 与 (5) ⇒ (2) 都依赖于引理 2.3. 以下我们给出 (3)⇒(2) 不依赖引理 2.3 的一个直接证明.

我们只证明 (3)⇒(2) 中涉及 $s$-Carleson 测度的部分, 涉及小 $s$-Carleson 测度的部分可类似证明. 下面, 我们在假设 $s\in(0,1]$, $f$ 在 $\Delta$ 上单叶的条件下证明 (3)⇒(2).

下面证明 (3)⇒(2). 设 $f$ 为 $\Delta$ 上的单叶函数, 它可拟延拓到整个复平面上, 且其复特征 $\mu$ 满足 $\frac{|\mu(z)|^2}{|z|^2-1}dxdy$ 是 $\Delta^*$ 上的 $s$-Carleson 测度. 令 $\bar{f}=\tau\circ f$, 这里 $\tau(z)=\frac{1}{f'(0)}[z-f(0)]$, 则 $\bar{f}(0)=0$, $\bar{f}'(0)=1$. 再令 $\widehat{f}=\varsigma\circ\bar{f}\circ\varsigma$, 这里 $\varsigma(z)=\frac{1}{z}$, 则不难看到 $\widehat{f}$ 在 $\mathbb{C}\setminus\overline{\Delta}$ 上单叶, 且在无穷远 $\infty$ 处有如下分解式

$$\widehat{f}(z)=z+\frac{b_1}{z}+\cdots.$$

记 $\widehat{f}$ 在 $\Delta$ 上的复特征为 $\mu_{\widehat{f}}(z)$, 则直接计算容易得到 $|\mu(z)|=|\mu_{\widehat{f}}(\frac{1}{z})|$, $z\in\Delta^*\setminus\{\infty\}$. 下面验证 $\frac{|\mu_{\widehat{f}}(z)|^2}{1-|z|^2}dxdy$ 是 $\Delta$ 上的 $s$-Carleson 测度. 首先, 对于 $I\subset S^1$, 且 $|I|>\frac{1}{3}$, 有

$$\begin{aligned}\frac{1}{|I|^s}\iint_{S(I)}\frac{|\mu_{\widehat{f}}(z)|^2}{1-|z|^2}dxdy&\leq 3\iint_{\{z\in S(I):|z|\leq\frac{3}{4}\}}\frac{|\mu_{\widehat{f}}(z)|^2}{1-|z|^2}dxdy\\&\quad+3\iint_{\{z\in S(I):|z|>\frac{3}{4}\}}\frac{|\mu_{\widehat{f}}(z)|^2}{1-|z|^2}dxdy\\&\leq C+12\sup_{I'\subset S^1,|I'|=\frac{1}{4}}\frac{1}{|I'|^s}\iint_{S(I')}\frac{|\mu_{\widehat{f}}(z)|^2}{1-|z|^2}dxdy.\end{aligned}$$

因此, 余下只需考虑 $|I|\leq\frac{1}{3}$ 的情形. 记 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 为 $I$ 的中点, 令 $J$ 为中点是 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$, $|J|=2|I|$ 的弧, 若 $z\in S(I)$, 则 $\frac{1}{z}\in S_*(J)$, 于是

$$\begin{aligned}\frac{1}{|I|^s}\iint_{S(I)}\frac{|\mu_{\widehat{f}}(z)|^2}{1-|z|^2}dxdy&\leq\frac{2}{|J|^s}\iint_{S_*(J)}\frac{|\mu_{\widehat{f}}(\frac{1}{z})|^2}{|z|^2-1}\frac{1}{|z|^2}dxdy\\&\leq\frac{2}{|J|^s}\iint_{S_*(J)}\frac{|\mu(z)|^2}{|z|^2-1}dxdy.\end{aligned}$$

于是由 $\frac{|\mu(z)|^2}{|z|^2-1}dxdy$ 是 $\Delta^*$ 上的 $s$-Carleson 测度知

$$\frac{|\mu_{\widehat{f}}(z)|^2}{1-|z|^2}dxdy$$

是 $\Delta$ 上的 $s$-Carleson 测度. 接下来我们先证明 $|S_{\widehat{f}}(z)|^2(|z|^2-1)^3dxdy$ 是 $\Delta^*$ 上的 $s$-Carleson 测度. 运用 Astala 与 Zinsmeister 在文 [1] 中建立的关于 Schwarz 导数的一个不等式, 有

$$|S_{\widehat{f}}(z)|^2(|z|^2-1)^3 \le C(|z|^2-1)\iint_{\Delta}\frac{|\mu_{\widehat{f}}(\zeta)|^2}{|\zeta-z|^4}\,d\xi d\eta, \quad z\in\Delta^*\setminus\{\infty\}.$$

于是, 对于 $S^1$ 上的子弧 $I$, 有

$$\iint_{S_*(I)}|S_{\widehat{f}}(z)|^2(|z|^2-1)^3\,dxdy \le C\iint_{S_*(I)}(|z|^2-1)\iint_{\Delta}\left(\iint_{\Delta}\frac{|\mu_{\widehat{f}}(\zeta)|^2}{|\zeta-z|^4}\,d\xi d\eta\right)dxdy. \tag{3.2}$$

下面估计积分

$$\mathrm{Int} := \iint_{S_*(I)}(|z|^2-1)\left(\iint_{\Delta}\frac{|\mu_{\widehat{f}}(\zeta)|^2}{|\zeta-z|^4}\,d\xi d\eta\right)dxdy. \tag{3.3}$$

以下用 $aI$ 表示与 $I$ 有相同中点, 而弧长为 $I$ 的 $a$ 倍的弧. 我们将 Int 分为两部分进行估计:

$$\begin{aligned}\mathrm{Int} &= \iint_{S_*(I)}(|z|^2-1)\left(\iint_{S(2I)}\frac{|\mu_{\widehat{f}}(\zeta)|^2}{|\zeta-z|^4}\,d\xi d\eta\right)dxdy\\ &\quad+\iint_{S_*(I)}(|z|^2-1)\left(\iint_{\Delta\setminus S(2I)}\frac{|\mu_{\widehat{f}}(\zeta)|^2}{|\zeta-z|^4}\,d\xi d\eta\right)dxdy\\ &= \mathrm{Int}_1+\mathrm{Int}_2.\end{aligned} \tag{3.4}$$

我们先估计 $\mathrm{Int}_1$. 当 $\zeta\in S(2I)$ 时, 有

$$\begin{aligned}\iint_{S_*(I)}\frac{|z|^2-1}{|\zeta-z|^4}dxdy &\le C\int_0^{|I|}\int_1^{1+|I|}\frac{r(r^2-1)drd\theta}{[(r-|\zeta|)^2+\theta^2]^2} \le C\int_0^{|I|}\int_0^{|I|}\frac{ududv}{[(u+1-|\zeta|)^2+v^2]^2}\\ &\le C\int_0^{|I|}\int_0^{|I|}\frac{ududv}{(u+v+1-|\zeta|)^4} \le \frac{C}{1-|\zeta|^2}.\end{aligned}$$

于是

$$\mathrm{Int}_1 \le C\iint_{S(2I)}|\mu_{\widehat{f}}(\zeta)|^2\left(\iint_{S_*(I)}\frac{|z|^2-1}{|\zeta-z|^4}dxdy\right)d\xi d\eta \le C\iint_{S(2I)}\frac{|\mu_{\widehat{f}}(\zeta)|^2}{1-|\zeta|^2}\,d\xi d\eta.$$

从而由 $\frac{|\mu_{\widehat{f}}(\zeta)|^2}{1-|\zeta|^2}d\xi d\eta$ 是 $\Delta$ 上的 $s$-Carleson 测度知

$$\mathrm{Int}_1 \le C|I|^s. \tag{3.5}$$

接下来估计 $\mathrm{Int}_2$. 我们用 $z_I$ 表示弧 $I$ 的中点, 则当 $\zeta\in\Delta\setminus S(2I)$ 时, 对任意 $z\in S_*(I)$ 有 $|\zeta-z|\ge C|\zeta-z_I|$. 于是

$$\begin{aligned}\mathrm{Int}_2 &\le C\iint_{S_*(I)}(|z|^2-1)\left(\iint_{\Delta\setminus S(2I)}\frac{|\mu_{\widehat{f}}(\zeta)|^2}{|\zeta-z_I|^4}\,d\xi d\eta\right)dxdy\\ &\le C|I|\int_1^{1+|I|}r(r^2-1)dr\iint_{\Delta\setminus S(2I)}\frac{|\mu_{\widehat{f}}(\zeta)|^2}{|\zeta-z_I|^4}\,d\xi d\eta\\ &\le C|I|^3\iint_{\Delta\setminus S(2I)}\frac{|\mu_{\widehat{f}}(\zeta)|^2}{|\zeta-z_I|^4}\,d\xi d\eta.\end{aligned}$$

设 $N$ 是使得 $2^n|I|\geq 1$ 成立的最小的正整数. 取 $2^N I=S^1$, $S(2^N I)=\Delta$. 对于 $n\in[1,N-1]$, $\zeta\in S(2^{n+1}I)\setminus S(2^n I)$, 我们有

$$|\zeta-z_I|\geq C(1-|\zeta|^2) \quad 及 \quad |\zeta-z_I|\geq C(2^n|I|).$$

因此

$$|\zeta-z_I|^4\geq C(1-|\zeta|^2)(2^n|I|)^3, \quad \zeta\in S(2^{n+1}I)\setminus S(2^n I).$$

于是

$$\begin{aligned}
\mathrm{Int}_2 &\leq C|I|^3\sum_{n=1}^{N-1}\iint_{S(2^{n+1}I)\setminus S(2^n I)}\frac{|\mu_{\widehat{f}}(\zeta)|^2}{|\zeta-z_I|^4}\,d\xi d\eta\\
&\leq C|I|^3\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{(2^n|I|)^3}\iint_{S(2^{n+1}I)\setminus S(2^n I)}\frac{|\mu_{\widehat{f}}(\zeta)|^2}{1-|\zeta|^2}\,d\xi d\eta\\
&= C\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{(2^n)^3}\iint_{S(2^{n+1}I)\setminus S(2^n I)}\frac{|\mu_{\widehat{f}}(\zeta)|^2}{1-|\zeta|^2}\,d\xi d\eta.
\end{aligned}$$

由于 $\frac{|\mu_{\widehat{f}}(\zeta)|^2}{1-|\zeta|^2}d\xi d\eta$ 是 $\Delta$ 上的 $s$-Carleson 测度, 从而

$$\begin{aligned}
\mathrm{Int}_2 &\leq C\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{(2^n)^3}\iint_{S(2^{n+1}I)}\frac{|\mu_{\widehat{f}}(\zeta)|^2}{1-|\zeta|^2}\,d\xi d\eta\leq C\sum_{n=1}^{N-1}\frac{(2^{n+1}|I|)^s}{(2^n)^3}\\
&\leq C|I|^s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2^n)^{3-s}}\leq C|I|^s.
\end{aligned}\tag{3.6}$$

于是由 (3.2)–(3.6) 知 $|S_{\widehat{f}}(z)|^2(|z|^2-1)^3dxdy$ 是 $\Delta^*$ 上的 $s$-Carleson 测度. 我们再证明 $|S_f(z)|^2(1-|z|^2)^3dxdy$ 是 $\Delta$ 上的 $s$-Carleson 测度, 其证明思路与上面验证

$$\frac{|\mu_{\widehat{f}}(z)|^2}{1-|z|^2}dxdy$$

是 $\Delta$ 上的 $s$-Carleson 测度类似.

首先注意到对于 $\Delta$ 上的任意单叶函数 $f$ 有 (见文 [14] 或 [17])

$$\sup_{z\in\Delta}|S_f(z)|(1-|z|^2)^2\leq 6.$$

于是, 对于 $I\subset S^1$, 且 $|I|>\frac{1}{3}$, 有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|I|^s}\iint_{S(I)}|S_f(z)|^2(1-|z|^2)^3dxdy &\leq 3\iint_{\{z\in S(I):|z|\leq\frac{3}{4}\}}|S_f(z)|^2(1-|z|^2)^3dxdy\\
&\quad+3\iint_{\{z\in S(I):|z|>\frac{3}{4}\}}|S_f(z)|^2(1-|z|^2)^3dxdy\\
&\leq 108\iint_{\{z\in S(I):|z|\leq\frac{3}{4}\}}(1-|z|^2)^{-1}dxdy\\
&\quad+3\iint_{\{z\in S(I):|z|>\frac{3}{4}\}}|S_f(z)|^2(1-|z|^2)^3dxdy\\
&\leq C+12\sup_{I'\subset S^1,|I'|=\frac{1}{4}}\frac{1}{|I'|^s}\iint_{S(I')}|S_f(z)|^2(1-|z|^2)^3dxdy.
\end{aligned}$$

我们再考虑 $|I|\le\frac{1}{3}$ 的弧. 记 $e^{i\theta}$ 为 $I$ 的中点, 令 $J$ 为中点是 $e^{-i\theta}$, $|J|=2|I|$ 的弧, 则

$$\begin{aligned}\frac{1}{|I|^s}\iint_{S(I)}|S_f(z)|^2(1-|z|^2)^3dxdy &\le \frac{2}{|J|^s}\iint_{S_*(J)}\left|S_f\left(\frac{1}{z}\right)\right|^2\left(1-\frac{1}{|z|^2}\right)^3\frac{1}{|z|^4}dxdy\\ &\le \frac{2}{|J|^s}\iint_{S_*(J)}\left|S_f\left(\frac{1}{z}\right)\right|^2\frac{1}{|z|^8}(|z|^2-1)^3dxdy.\end{aligned}$$

由 Schwarz 导数的链式计算法则, 我们有

$$|S_{\hat{f}}(z)|=\left|S_f\left(\frac{1}{z}\right)\right|\frac{1}{|z|^4},\quad z\in\Delta^*\setminus\{\infty\},$$

于是

$$\frac{1}{|I|^s}\iint_{S(I)}|S_f(z)|^2(1-|z|^2)^3dxdy\le\frac{2}{|J|^s}\iint_{S_*(J)}|S_{\hat{f}}(z)|^2(|z|^2-1)^3dxdy.$$

因此, 由 $|S_{\hat{f}}(z)|^2(|z|^2-1)^3dxdy$ 是 $\Delta^*$ 上的 $s$-Carleson 测度知 $|S_f(z)|^2(1-|z|^2)^3dxdy$ 是 $\Delta$ 上的 $s$-Carleson 测度. (3)⇒(2) 证毕.

**注记 3.2** 以上证明推广了文 [1] 中的相关结果. 同时, 我们这里陈述的细致证明可作为同类问题证明的细节补充与文献参考.

## 4 待研究的问题

万有 Teichmüller 空间 $T$ 定义为全体函数 $\log f'$ 构成的集合, 这里 $f$ 为 $\Delta$ 上可拟共形延拓到整个复平面的单叶函数. 受万有 Teichmüller 空间的 BMO 理论 (见文 [1], [19]) 及本文证明结果的启发, 我们引入 Morrey–Teichmüller 空间的概念. 设 $0<s\le1$, Morrey–Teichmüller 空间 $T_{m,s}$ 定义为全体函数 $\log f'$ 构成的集合, 这里 $\log f'\in T$, 且 $f$ 的复特征 $\mu$ 满足

$$\frac{|\mu(z)|^2}{|z|^2-1}dxdy$$

是 $\Delta^*$ 上的 $s$-Carleson 测度. 当 $s=1$, $T_{m,s}$ 即为 BMOA–Teichmüller 空间.

由于 BMOA–Teichmüller 空间理论在调和分析中的重要应用 (见文 [5, 8, 12, 18]), 最近, BMOA–Teichmüller 空间得到了广泛而系统的研究 [1, 4, 6, 7, 19, 20, 22, 23]. Morrey–Teichmüller 空间 $T_{m,s}$作为 BMOA–Teichmüller 空间的推广, 我们自然要问 $T_{m,s}$是否也存在 BMOA–Teichmüller 空间理论类似的结果. 例如 Morrey–Teichmüller 空间 $T_{m,s}$ 所确定的拟圆周, 拟对称同胚是否同 BMOA–Teichmüller 空间一样存在较好的内蕴刻画.

最后以 Morrey–Teichmüller 空间 $T_{m,s}$ 如下一个基本结果结束本文, 它是文 [1, 定理 1] 的推广. 设 $0<s\le1$, 对于 $I\subset S^1$, $\Delta$ 上的单叶函数 $f$, Bishop 与 Jones 在文 [3, 105 页] 中证明了

$$\iint_{S(I)}|N_f(z)|^2(1-|z|^2)dxdy\le C|I|+C\iint_{S(I)}|S_f(z)|^2(1-|z|^2)^3dxdy,$$

于是

$$\frac{1}{|I|^s}\iint_{S(I)}|N_f(z)|^2(1-|z|^2)dxdy\le C+\frac{C}{|I|^s}\iint_{S(I)}|S_f(z)|^2(1-|z|^2)^3dxdy.\tag{4.1}$$

若 $\log f'\in T_{m,s}$, 则由以上 (3)⇒(2) 的证明知 $|S_f(z)|^2(1-|z|^2)^3dxdy$ 是 $\Delta$ 上的 $s$-Carleson 测度, 于是由式 (4.1) 及定理 1.2 知 $\log f'\in\mathscr{L}^{2,s}(\Delta)$. 因此有

**定理 4.1** 设 $0 < s \leq 1$, Morrey–Teichmüller 空间 $T_{m,s}$ 为 $\mathscr{L}^{2,s}(\Delta)$ 的一个子集.

## 参 考 文 献


[1] Astala K., Zinsmeister M., Teichmüller spaces and BMOA, *Math. Ann.*, 1991, **289**: 613–625.

[2] Becker J., Pommerenke C., Über die quasikonforme Fortsetzung schlichter Funktionen, *Math. Z.*, 1978, **161**: 69–80 (in German).

[3] Bishop C., Jones P., Harmonic measure, $L^2$ estimates and the Schwarzian derivative, *J. Anal. Math.*, 1994, **62**: 77–113.

[4] Cui G., Zinsmeister M., BMO–Teichmüller spaces, *Illinois J. Math.*, 2004, **48**: 1223–1233.

[5] David G., Courbes corde-arc et espaces de Hardy généralises, *Ann. Inst. Fourier*, 1982, **32**: 227–239.

[6] Fan J., Hu J., Holomorphic contraxtibility and other properties of the Weil–Petersson and VMO–Teichmüller space, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 2016, **41**: 587–600.

[7] Fan Y., Hu Y., Shen Y., On strongly quasisymmetric homeomorphisms, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 2017, **42**: 921–930.

[8] Fefferman R., Kenig C., Pipher J., The theory of weights and the Dirichlet problems for elliptic equations, *Ann. Math.*, 1991, **134**: 65–124.

[9] Garnett J., Bounded Analytic Functions, Graduate Texts in Mathematics, vol. 236, Springer, Berlin, 2007.

[10] Garnett J., Marshall D., Harmonic Measure, New Math. Monogr., vol. 2, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005.

[11] Hu Y., Shen Y., On quasisymmetric homeomorphisms, *Israel J. Math.*, 2012, **191**: 209–226.

[12] Jones P., Homeomorphisms of the line which preserve BMO, *Ark. Math.*, 1983, **21**: 229–231.

[13] Liu J., Analytic Morrey spaces, Ph.D. thesis, Shantou University, 2014.

[14] Nehari I., The Schwarzian derivative and schlicht functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1949, **55**: 545–551.

[15] Pau J., Peláez J., Logarithms of the derivative of univalent functions in $Q_p$ spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 2009, **350**: 184–194.

[16] Pérez-González F., Rättyä J., Dirichlet and VMOA domains via Schwarzian derivative, *J. Math. Anal. Appl.*, 2009, **359**: 543–546.

[17] Pommerenke C., Univalent Functions, Vandenhoeck and Ruprecht, 1975.

[18] Semmes S., Quasiconformal mappings and chord-arc curves, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1988, **306**: 233–263.

[19] Shen Y., Wei H., Universal Teichmüller space and BMO, *Adv. Math.*, 2013, **234**: 129–148.

[20] Tang S., Wei H., Shen Y., On Douady-Earle extension and the contractibility of the VMO–Teichmüller space, *J. Math. Anal. Appl.*, 2016, **442**: 376–384.

[21] Wang J., Xiao J., Analytic Campanato spaces by functionals and operators, *J. Geom. Anal.*, 2016, **26**: 2996–3018.

[22] Wei H., A note on the BMO–Teichmüller space, *J. Math. Anal. Appl.*, 2016, **435**: 746–753.

[23] Wei H., Shen Y., On the tangent space to the BMO–Teichmüller space, *J. Math. Anal. Appl.*, 2014, **419**: 715–726.

[24] Wu Z., Xie C., $\mathscr{Q}$ spaces and Morrey spaces, *J. Funct. Anal.*, 2003, **201**: 282–297.

[25] Xiao J., Holomorphic $Q$ Classes, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1767, Springer, Berlin, 2001.

[26] Zhao R., Distances from Bloch functions to some Möbius invariant spaces, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 2008, **33**: 303–313.

[27] Zhou J., Schwarzian derivative, geometric conditions and $Q_K$ spaces (in Chinese), *Sci. Sin. Math.*, 2012, **42**: 939–950.

[28] Zorboska N., Schwarzian derivative and general Besov-type domains, *J. Math. Anal. Appl.*, 2011, **379**: 48–57.