第62卷第1期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.62, No.1
2019年1月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Jan., 2019

文章编号: 0583-1431(2019)01-0137-14 **文献标识码:** A

推广的 GDGH2 系统的自相似解及爆破现象

杜金金

西北大学数学学院 西安 710069
E-mail: 498484286@qq.com

王 昊

南京理工大学理学院 南京 210097
E-mail: wanghao_pde@njust.edu.cn

摘 要 本文研究了广义两分量 Dullin–Gottwald–Holm (GDGH2) 浅水波系统及其推广形式的一类自相似解. 首先通过构造 Emden 方程, 分析了解的全局存在性, 以及在一定条件下解的爆破现象; 其次利用扰动方法和特征线法, 构造了两种形式的精确解.

关键词 Dullin–Gottwald–Holm 系统; Emden 方程; 全局存在性; 爆破
MR(2010) 主题分类 35A01, 35B44, 35C08
中图分类 O175.2

Analytical Solutions and Blowup Phenomena for the GDGH2 System

Jin Jin DU

School of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710069*, P. R. China*
E-mail: 498484286@qq.com

Hao WANG

School of Science, Nanjing University of Science and Technology,
Nanjing 210097*, P. R. China*
E-mail: *wanghao_pde@njust.edu.cn*

Abstract In this paper, we study the analytical solutions for the extended generalized two-component Dullin–Gottwald–Holm shallow water system. By the resulting of Emden equation, we investigate the global existence and finite-time blowup phenomena. Furthermore, the perturbation method and characteristic method are used to construct two types of exact solutions for this system.

Keywords Dullin–Gottwald–Holm system; Emden equation; global existence; blowup
MR(2010) Subject Classification 35A01
Chinese Library Classification O175.2

收稿日期: 2017-10-15; 接受日期: 2018-03-08

1 引言

浅水波系统的研究不仅是应用数学和数学物理的一个重要组成部分,而且是非线性偏微分方程研究中的一个重要课题. 典型的浅水波系统有 Korteweg-de Vries (KdV) 方程 [39, 44], Benjamin-Bona-Mahoney (BBM) 方程 [3] 及 Camassa–Holm (CH) 方程 [4] 等. 1993 年, Camassa 和 Holm 在研究浅水波运动时, 通过对 Euler 方程的哈密顿算子进行渐近展开得到 CH 方程

$$u_t - u_{txx} + 2\omega u_x + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}, \tag{1.1}$$

该方程描述了浅水波在水平底面单向且无旋的传播状态 [4, 13, 27, 29, 30]. Olver 和 Rosenau [40] 通过对 KdV 方程的哈密顿算子进行对偶重组, 同样得到了方程 (1.1). 事实上, 1981 年, Fokas 和 Fuchssteiner [19, 20] 在研究遗传算子时已给出了该方程, 并证明了对任意 ω, 方程 (1.1) 是完全可积的 [4, 20]. 而 Camassa 和 Holm 工作的重要性在于他们通过严格的物理证明推导出了 CH 方程并给出了相应的物理解释, 其中 u 表示流体的水平速度, ω 是一个与临界浅水波速度有关的常数. 对任意的 ω, CH 方程具有无穷多个守恒率 [4], 满足适定性, 具有几何结构 [6, 31, 38] 等性质. 当 $\omega = 0$ 时, CH 方程具有 $ce^{-|x-ct|}$ 形式的尖峰孤子解 (Peakon) [2, 4, 34]. 与一般的光滑孤子解不同的是, 在波峰处其一阶导数不存在, 且这些尖峰孤子解是轨道稳定的 [14, 15, 33].

2008 年, Constantin 和 Ivanov [11, 28] 在涡量为非零常数的浅水波理论中推导得到了两分量 Camassa–Holm 系统 (CH2):

$$\begin{cases} u_t - u_{txx} - Au_x + 3uu_x + \kappa\rho\rho_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}, \\ \rho_t + (\rho u)_x = 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 $u(t, x)$ 表示水波速度, $\rho(t, x)$ 表示液体密度, 标量 $A \geq 0$ 用来描述线性切流的特征. 当 $\rho \equiv 0$, $A \doteq 0$ 时, 系统 (1.2) 可化为标准的 CH 方程 (1.1). 2011 年, Chen 和 Liu [5] 利用 Ivanov 的方法推广得到了广义两分量 Camassa–Holm 系统 (GCH2):

$$\begin{cases} u_t - u_{txx} - Au_x + 3uu_x + \kappa\rho\rho_x = \sigma(2u_x u_{xx} + uu_{xxx}), \\ \rho_t + (\rho u)_x = 0, \end{cases} \tag{1.3}$$

当 $|x| \to \infty$ 时, $u \to 0$, $\rho \to 1$. σ 是一个实无量纲常数, 表示流体间相互作用. 当 $\sigma = 0$ 时, 流体表面张力为 0; 当 $\sigma = 1$ 时, 系统 (1.3) 转化为标准两分量 CH 系统. 当 $\kappa = -1$ 时, 重力加速度方向向上. 对该系统数学性质的研究已有丰富的成果, 见文 [11, 17, 21–23, 26, 40, 41].

2001 年, Dullin, Gottwald 和 Holm [16] 从 Euler 方程出发, 利用渐近扩张思想, 推导得到了一类 1+1 维新型单向浅水波方程 (DGH 方程):

$$m_t + c_0 u_x + um_x + 2mu_x = -\gamma u_{xxx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{1.4}$$

其中 $m = u - \alpha^2 u_{xx}$ 表示动量, γ/c_o 为尺度变换的平方, $c_0 = \sqrt{gh}$ ($c_0 := 2\omega$) 表示无扰动条件下水波的线性传播速度. DGH 方程 (1.4) 具有双哈密顿结构且可以构造一个 Lax 对 [16]. 其次, DGH 方程包含两类特殊的可积方程: KdV 方程和 CH 方程. 前者含有线性色散项, 后者含有非线性色散项. 因此该方程是一类非常重要的可积浅水波方程, 它和 KdV 方程是一样存在孤子解, 也具备了和 Camassa–Holm 方程类似的尖峰解. 由变换 $m = u - \alpha^2 u_{xx}$, DGH 方程可改写为如下等价形式

$$u_t - \alpha^2 u_{txx} + 2\omega u_x + 3uu_x + \gamma u_{xxx} = \alpha^2(2u_x u_{xx} + uu_{xxx}), \tag{1.5}$$

当 $\alpha^2=0$ 时, 方程 (1.5) 可化为 KdV 方程

$$u_t+2\omega u_x+3uu_x+\gamma u_{xxx}=0.$$

当 $\gamma=0$ 时, 方程 (1.5) 可化为 CH 方程.

Dullin–Gottwald–Holm 方程作为一类重要的可积型孤立波方程, 近年来引起国内外专家学者的广泛关注. 2005 年, Tian 等人 [43] 讨论了 DGH 方程的适定性问题, 等谱问题及散射问题, 同时也给出了 DGH 方程的散射数据; Lu 等人 [36] 解决了广义 DGH 方程的适定性问题; 进一步, Liu 和 Yin [35] 利用 Kato 定理研究了广义 DGH 方程的适定性及尖峰孤立波的轨道稳定性问题. 通过对 DGH 方程进行推广, 分别可以得到两分量 Dullin–Gottwald–Holm (DGH2) 系统

$$\begin{cases} u_t-u_{txx}-Au_x+3uu_x=2u_xu_{xx}+uu_{xxx}-\gamma u_{xxx}-\rho\rho_x,\\ \rho_t+(\rho u)_x=0 \end{cases} \tag{1.6}$$

及广义两分量 Dullin–Gottwald–Holm (GDGH2) 系统

$$\begin{cases} u_t-u_{txx}-Au_x+3uu_x=\sigma(2u_xu_{xx}+uu_{xxx})-\gamma u_{xxx}-\rho\rho_x,\\ \rho_t+(\rho u)_x=0. \end{cases} \tag{1.7}$$

Guo [24, 25] 等人对上述系统进行了详细的推导. DGH2 系统和 GDGH2 系统是可积的且具备双哈密顿结构.

在广义两分量 Dullin–Gottwald–Holm 浅水波系统研究的基础上, 本文考虑推广的 GDGH2 系统的自相似解及爆破现象

$$\begin{cases} u_t-u_{txx}-Au_x+k_1uu_x=\sigma(2u_xu_{xx}+uu_{xxx})-\gamma u_{xxx}-k_4\rho\rho_x,\\ \rho_t+k_2u\rho_x+k_3\rho u_x=0, \end{cases} \tag{1.8}$$

其中 k_1, k_2 和 k_3 为任意常数, $k_4=\pm1$. 当 $k_1=3$, $k_2=k_3=k_4=1$ 时, 系统可化为 GDGH2 系统 (1.7); 当 $k_1=-1$, $\sigma=\rho=\gamma=0$ 时, 系统可化为 BBM 方程; 当 $k_1=3$, $\gamma=\rho=0$, $\sigma=1$ 时, 系统可化为 CH 方程.

精确解的构造可以有效地简化非线性问题. 常用的求解方法有 Darboux 变换, 反散射方法, 分离变量法等. 2010 年后, Yuen [45, 46] 利用分离变量法得到了两分量 Camassa–Holm 系统和两分量 Degasperis–Procesi 浅水波系统的自相似爆破解. 此外, 利用扰动方法构造了两分量 CH 系统的精确解 [47]

$$u(t,x)=c(t)x+b(t),\quad \rho(t,x)=c_1(t)x^2+c_2(t)x+c_3(t).$$

基于上述相关研究成果, 本文主要利用分离变量法, 结合扰动方法和特征线法研究 GDGH2 系统及其推广形式的自相似解的结构, 性质及爆破现象.

2 主要定理及其证明

本节研究了推广的广义两分量 Dullin–Gottwald–Holm 系统的自相似解及爆破现象

$$\begin{cases} u_t-u_{txx}+k_1uu_x=\sigma(2u_xu_{xx}+uu_{xxx})-\gamma u_{xxx}-k_4\rho\rho_x,\\ \rho_t+k_2u\rho_x+k_3\rho u_x=0, \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 k_1, k_2 及 k_3 是任意的常数, $k_4=\pm1$.

定理 2.1 设函数 $a(s)$ 是 Emden 方程

$$\begin{cases} \ddot{a}(s)-\dfrac{\xi\mathrm{Sign}(a(s))}{k_1|a(s)|^k}=0,\\ a(0)=a_0\neq0,\quad \dot{a}(0)=a_1 \end{cases} \tag{2.2}$$

的解, 且

$$f(\eta)=\frac{\xi}{k_4}\sqrt{-\frac{k_4}{\xi}\eta^2+\left(\frac{k_4}{\xi}\alpha\right)^2}, \tag{2.3}$$

$\eta=x/a^{k_2/k_1}(s)$, $k=(2k_2+2k_3-k_1)/k_1$, $s=k_1t$, 其中 ξ, a_0 及 a_1 为任意常数. 在此, 假设 $k_1>0$, 有以下结论:

(1) 当 $0<k<1$ 时, 即 $0<(2k_2+2k_3-k_1)/k_1<1$.

(1a) 若 $\xi<0$, 则在有限时间 S, $\lim_{s\to S^-}a(s)=0$ 成立;

(1b) 若 $\xi>0$, $a_0>0$, 则在有限时间 S, $\lim_{s\to S^-}a(s)=0$ 成立当且仅当

$$a_1\leq-\sqrt{2\xi a_0^{1-k}/k_1(1-k)}=-\sqrt{\xi a_0^{1-k}/(k_1-k_2-k_3)},$$

否则 $a(s)$ 全局存在, 满足 $\lim_{s\to+\infty}a(s)=+\infty$;

(1c) 若 $\xi>0$, $a_0<0$, 则在有限时间 S, $\lim_{s\to S^-}a(s)=0$ 成立当且仅当

$$a_1\geq\sqrt{2\xi|a_0|^{1-k}/k_1(1-k)}=\sqrt{\xi|a_0|^{1-k}/(k_1-k_2-k_3)},$$

否则 $a(s)$ 全局存在, 满足 $\lim_{s\to+\infty}a(s)=-\infty$.

(2) 当 $k>1$ 时, 即 $(2k_2+2k_3-k_1)/k_1>1$.

(2a) 若 $\xi>0$, 则在有限时间 S, $\lim_{s\to+\infty}a(s)=+\infty$ 成立;

(2b) 若 $\xi<0$, $a_0>0$, 则在有限时间 S, $\lim_{s\to S^-}a(s)=0$ 成立当且仅当

$$a_1\leq-\sqrt{2\xi a_0^{1-k}/k_1(1-k)}=-\sqrt{\xi a_0^{1-k}/(k_1-k_2-k_3)},$$

否则 $a(s)$ 全局存在, 满足 $\lim_{s\to+\infty}a(s)=+\infty$;

(2c) 若 $\xi<0$, $a_0<0$, 则在有限时间 S, $\lim_{s\to S^-}a(s)=0$ 成立当且仅当

$$a_1\geq\sqrt{2\xi|a_0|^{1-k}/k_1(1-k)}=\sqrt{\xi|a_0|^{1-k}/(k_1-k_2-k_3)},$$

否则 $a(s)$ 全局存在, 满足 $\lim_{s\to+\infty}a(s)=-\infty$.

引理 2.2 连续性方程

$$\rho_t+k_2u\rho_x+k_3\rho u_x=0, \tag{2.4}$$

存在如下形式的解

$$\rho(t,x)=\frac{f(\eta)}{a^{k_3/\lambda}(\lambda t)},\quad u(t,x)=\frac{\dot{a}(\lambda t)}{a(\lambda t)}x, \tag{2.5}$$

对任意的 $f(\eta)\geq0\in C^1$, 其中 $\eta=x/a^{k_2/\lambda}(\lambda t)$, $a(\lambda t)>0\in C^1$, λ 为任意常数.

证明 首先, 将方程 (2.5) 代入 (2.4) 得

$$\begin{aligned}
&\rho_t+k_2u\rho_x+k_3\rho u_x\\
&\quad=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{f\left(\frac{x}{a^{k_2/\lambda}(\lambda t)}\right)}{a^{k_3/\lambda}(\lambda t)}\right)+k_2\frac{\dot{a}(\lambda t)}{a(\lambda t)}x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f\left(\frac{x}{a^{k_2/\lambda}(\lambda t)}\right)}{a^{k_3/\lambda}(\lambda t)}\right)+k_3\frac{f\left(\frac{x}{a^{k_2/\lambda}(\lambda t)}\right)}{a^{k_3/\lambda}(\lambda t)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\dot{a}(\lambda t)}{a(\lambda t)}x\right)\\
&\quad=-k_3\frac{f(\eta)\dot{a}(\lambda t)}{a^{(k_3/\lambda)+1}(\lambda t)}-\frac{\dot{f}(\eta)}{a^{k_3/\lambda}(\lambda t)}\frac{k_2x\dot{a}(\lambda t)}{a^{(k_2/\lambda)+1}(\lambda t)}\\
&\qquad+k_2\frac{\dot{a}(\lambda t)}{a(\lambda t)}x\frac{1}{a^{k_3/\lambda}(\lambda t)}\frac{\dot{f}(\eta)}{a^{k_2/\lambda}(\lambda t)}+k_3\frac{f(\eta)}{a^{k_3/\lambda}(\lambda t)}\frac{\dot{a}(\lambda t)}{a(\lambda t)}=0.
\end{aligned}$$

将 (2.5) 代入 (2.1) 中 DGH 方程, 有

$$\begin{aligned}
&u_t+k_1uu_x+k_4\rho\rho_x\\
&\quad=\lambda x\left(\frac{\ddot{a}(\lambda t)}{a(\lambda t)}-\frac{\dot{a}^2(\lambda t)}{a^2(\lambda t)}\right)+k_1\left(\frac{\dot{a}(\lambda t)}{a(\lambda t)}\right)\left(\frac{\dot{a}(\lambda t)}{a(\lambda t)}x\right)+k_4\frac{f(\eta)}{a^{k_3/\lambda}(\lambda t)}\frac{\dot{f}(\eta)}{a^{k_3/\lambda}(\lambda t)}\frac{1}{a^{k_2/\lambda}(\lambda t)},
\end{aligned}$$

则当 $\lambda = k_1$ 时, 上式可化为

$$k_1\frac{\ddot{a}(k_1t)}{a(k_1t)}x + k_4\frac{f(\eta)\dot{f}(\eta)}{a^{(2k_3+k_2)/k_1}(k_1t)} = \frac{k_4}{a^{(2k_3+k_2)/k_1}(k_1t)}\left(\frac{\xi}{k_4}\eta + f(\eta)\dot{f}(\eta)\right).$$

因为函数 $a(s)$, $s = k_1t$ 满足 Emden 方程 (2.2). 因此, 上式化为 0, 由此可得

$$\rho(t,x) = \frac{f(\eta)}{a^{k_3/k_1}(k_1t)},\quad u(t,x) = \frac{\dot{a}(k_1t)}{a(k_1t)}x$$

同样满足推广的两分量 DGH 系统.

至此, 原偏微分方程问题可转化为求解常微分方程的初值问题.

若 $\xi/k_4 < 0$,

$$\begin{cases} \dfrac{\xi}{k_4}\eta + f(\eta)\dot{f}(\eta) = 0, \\ f(0) = -\alpha \leq 0; \end{cases} \tag{2.6}$$

若 $\xi/k_4 > 0$,

$$\begin{cases} \dfrac{\xi}{k_4}\eta + f(\eta)\dot{f}(\eta) = 0, \\ f(0) = \alpha \geq 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

由常微分方程 (2.6), (2.7) 可得

$$f(\eta) = \frac{\xi}{k_4}\sqrt{-\frac{k_4}{\xi}\eta^2 + \left(\frac{k_4}{\xi}\alpha\right)^2}.$$

证毕.

解的构造依赖于辅助函数 $a(s)$, ξ, a_0, a_1 的取值, 其满足 Emden 方程. 接下来, 分析不同情形下解的性质.

定理 2.1 的证明 定理的证明分为两步. 在此, 考虑 $k > 1$ ($(2k_2+2k_3-k_1)/k_1 > 1$, $k_1 > 0$) 的情形, 当 $0 < k < 1$ 时, 证明类似.

第一步 首先证明 (2a).

(1) 当 $\xi > 0$, $\mathrm{Sign}(a(s)) = 1$ 时, $a(s)$ 为上凹函数, 且在初始时刻 $a(s) > 0$. 在 Emden 方程 (2.2) 两边同时乘以 $\dot{a}(s)$ 后积分, 可得能量守恒方程

$$\frac{1}{2}(\dot{a}(s))^2 + \frac{\xi a^{1-k}(s)}{k_1(k-1)} = E\left(= \frac{1}{2}(a_1)^2 + \frac{\xi a_0^{1-k}}{k_1(k-1)}\right). \tag{2.8}$$

由条件 $a_0 > 0$, $\xi > 0$, $k > 1$ 可知 $E > 0$, 则

$$\frac{1}{2}(\dot{a}(s))^2 = E - \frac{\xi a^{1-k}(s)}{k_1(k-1)} \geq 0, \tag{2.9}$$

且

$$a(s) \geq \left[\frac{\xi}{k_1(k-1)E}\right]^{\frac{1}{k-1}} > 0, \tag{2.10}$$

即 $a(s)$ 存在下界.

(1.1) 当 $a_1 > 0$, $a(s)$ 单调递增, 满足 $s \to +\infty$ 时, $a(s) \to +\infty$;

(1.2) 当 $a_1 < 0$, 存在以下两种情形:

(1.2a) $a(s)$ 先单调递减, 后单调递增.

对此类情形, 假设存在有限时间 $\sigma > 0$, 使得 $\dot{a}(\sigma) \geq 0$ 成立. 当 $s > \sigma$, $\dot{a}(s) > 0$, 满足 $s \to +\infty$ 时, $a(s) \to +\infty$.

(1.2b) $a(s)$ 一直单调递减.

如果 $a(s)$ 取得下确界, 满足 $s \to +\infty$ 时, $\dot{a}(s) \to 0$, 又

$$s = \int_0^s ds = \int_{a_{\inf}}^{a_0} \frac{1}{\sqrt{2E - \frac{2\xi a^{1-k}(s)}{k_1(k-1)}}} da.$$

由瑕积分性质可知, 等式右边收敛. 而当 $s \to +\infty$ 时, 等式左边无界, 即可得到矛盾.

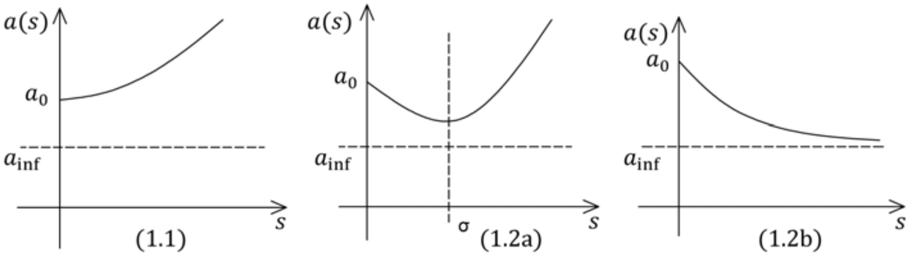

图 1 情形 (1) 中函数 $a(s)$ 变化趋势图

(2) 当 $\xi > 0$, $\mathrm{Sign}(a(s)) = -1$ 时, $a(s)$ 为下凹函数, 且在初始时刻 $a(s) < 0$.

由不等式 (2.10) 可知

$$a(s) \leq -\left[\frac{\xi}{k_1(k-1)E}\right]^{\frac{1}{k-1}} < 0,$$

即函数 $a(s)$ 有上界, 且上界为 $-(\xi/k_1(k-1)E)^{1/(k-1)}$. 同样可以分为 $a_1 > 0$ 和 $a_1 < 0$ 两种情形进行讨论, 证法与 (1) 类似.

综上可得结论 (2a).

第二步 其次证明 (2b).

(3) 当 $\xi < 0$, $\mathrm{Sign}(a(s)) = 1$ 时, $a(s)$ 为下凹函数, 且在初始时刻 $a(s) > 0$.

根据能量守恒方程 (2.8), 可分为 $E > 0$ 和 $E < 0$ 两种情形.

(3.1) $E > 0$, 结合能量守恒方程 (2.8) 可得

$$\dot{a}(s) \leq -\sqrt{\frac{2\xi a^{1-k}(s)}{k_1(1-k)}} \quad \text{或} \quad \dot{a}(s) \geq \sqrt{\frac{2\xi a^{1-k}(s)}{k_1(1-k)}},$$

且

$$a(s) \geq \left[\frac{\xi}{k_1 E(k-1)}\right]^{\frac{1}{k-1}} = a_{\inf},$$

由假设 $\xi < 0$, $k > 1$, $E > 0$ 可知 $a_{\inf} < 0$.

(3.1a) $\dot{a}(s) \leq -\sqrt{2\xi a^{1-k}(s)/k_1(1-k)} \leq 0$.

$a(s)$ 单调递减. 由于 $a_0 > 0$, $\dot{a}(s) < 0$, 则 $a(s)$ 一定会在有限时间 S 后与 s 轴相交.

(3.1b) $\dot{a}(s) \geq \sqrt{2\xi a^{1-k}(s)/k_1(1-k)} \geq 0$.

$a(s)$ 单调递增. 由下凹函数性质可知, 当 $s \to +\infty$ 时, 满足 $a(s) \to +\infty$.

(3.2) $E<0$, 结合能量守恒方程 (2.8) 可得

$$-\sqrt{\frac{2\xi a^{1-k}(s)}{k_1(1-k)}}\leq \dot{a}(s)\leq \sqrt{\frac{2\xi a^{1-k}(s)}{k_1(1-k)}},$$

由假设 $\xi<0$, $k>1$ 及 $E<0$, 可知 $a_{\inf}>0$.

由 (2.9) 及 $0<a(s)\leq\left[\frac{\xi}{k_1E(k-1)}\right]^{\frac{1}{k-1}}$ 可知 $a(s)$ 有上界, 且不会化为 0, 则 $a(s)$ 一定与 s 轴无交点.

综上可得结论 (2b).

(4) 当 $\xi<0$, $\mathrm{Sign}(a(s))=-1$ 时, $a(s)$ 为上凹函数, 且在初始时刻 $a(s)<0$.

在 Emden 方程 (2.2) 中, 令 $b(t)=-a(t)$, $a_0<0$, 可得

$$\begin{cases}\ddot{b}(s)-\dfrac{\xi\mathrm{Sign}(a(s))}{k_1|b(s)|^k}=0,\quad k_1>0,\\ b(0)=b_0>0,\quad \dot{b}(0)=b_1.\end{cases}$$

证法与 (2b) 类似, 可得结论 (2c). 证毕.

根据能量守恒方程 (2.8), 可以描绘出势能 $\xi a^{1-k}(s)/k_1(k-1)$ 的变化趋势.

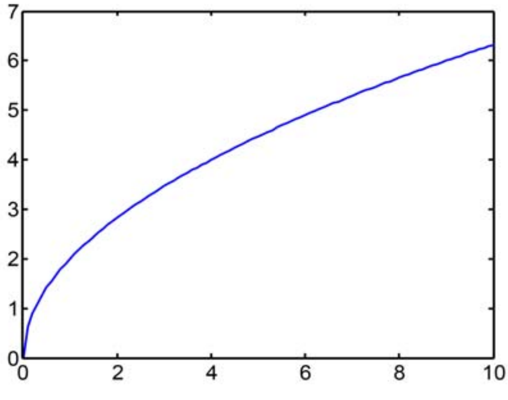

图 2 当 $\xi=-1$, $k_1=1$ 及 $k=\frac{1}{2}$ 时的势能曲线

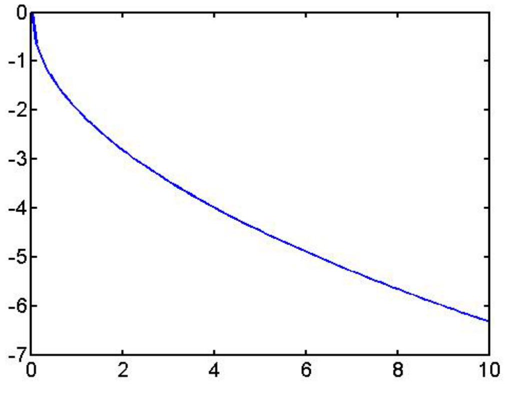

图 3 当 $\xi=1$, $k_1=1$ 及 $k=\frac{1}{2}$ 时的势能曲线

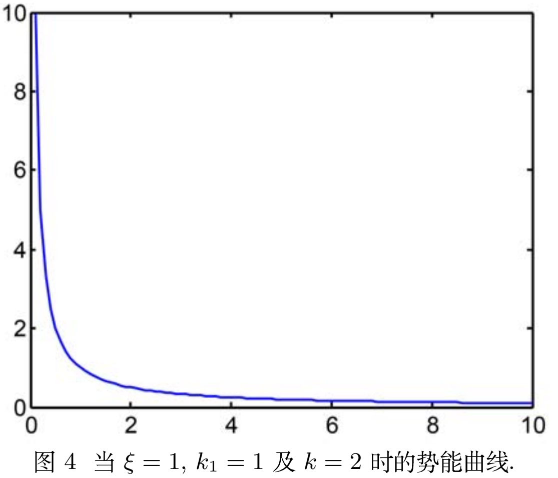

图 4 当 $\xi=1$, $k_1=1$ 及 $k=2$ 时的势能曲线.

3 推广的 GDGH2 系统的扰动方法

广义两分量 DGH 系统允许对称 $V=u\partial_u+x\partial_x$, 具有 $u(t,x)=c(t)x$ 形式的自相似解. 本节构造如下解的形式

$$u(t,x)=c(t)x+b(t), \tag{3.1}$$

其中 $c(t)=\dot a(k_1t)/a(k_1t)$.

定理 3.1 推广的 GDGH2 系统 (2.1), 存在如下一族精确解

$$\begin{cases}\rho^2(t,x)=\max\left\{\dfrac{\int_0^t\mu(s)G(s)ds+k}{\mu(t)}-\dfrac{2}{k_4}\left[\dot b(t)+k_1b(t)\dfrac{\dot a(k_1t)}{a(k_1t)}\right]x\right.\\ \qquad\qquad\left.-\dfrac{k_1}{k_4}\dfrac{\xi}{a^{(2k_2+2k_3)/k_1}(k_1t)}x^2,0\right\},\\ u(t,x)=\dfrac{\dot a(k_1t)}{a(k_1t)}x+b(t),\end{cases} \tag{3.2}$$

其中 $H(t)=2k_3c(t)$, $G(t)=\frac{2k_3}{k_4}b(t)[\dot b(t)+k_1b(t)c(t)]$, $\mu(t)=\mathrm{e}^{\int_0^t H(s)ds}$; $a(t),b(t)$ 分别满足以下微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{d^2}{dt^2}a(k_1t)=\dfrac{\xi}{a^{(2k_2+2k_3-k_1)/k_1}(k_1t)},\\ \dfrac{d^2}{dt^2}b(t)+(k_1+k_2+2k_3)\dfrac{\dot a(k_1t)}{a(k_1t)}\dfrac{d}{dt}b(t)+k_1(k_1+k_2)\dfrac{\xi}{a^{(2k_2+2k_3)/k_1}(k_1t)}b(t)\\ \qquad+(k_1k_2+2k_1k_3-k_1^2)\dfrac{\dot a^2(k_1t)}{a^2(k_1t)}b(t)=0,\\ \dfrac{d}{dt}[\rho^2(t,0)]+2\dfrac{\dot a(k_1t)}{a(k_1t)}\rho^2(t,0)=2\dfrac{k_3}{k_4}b(t)\left[\dot b(t)+k_1b(t)\dfrac{\dot a(k_1t)}{a(k_1t)}\right],\end{cases} \tag{3.3}$$

其中 ξ,k_1,k_2,k_3 及 k_4 为任意常数.

证明 首先证明 (3.2) 第一个式子. 考虑速度 u 是线性项, (2.1) 化为

$$u_t+k_1uu_x+k_4\rho\rho_x=0,$$

将 (3.2) 中速度项 $u(t,x)$ 代入推广的 GDGH2 方程, 可得

$$[\dot c(t)x+\dot b(t)]+k_1[c(t)x+b(t)]c(t)+\frac{k_4}{2}\frac{\partial}{\partial x}\rho^2=0,$$

即

$$\frac{k_4}{2}\frac{\partial}{\partial x}\rho^2=-[\dot b(t)+k_1b(t)c(t)]-[\dot c(t)+k_1c^2(t)]x.$$

等式两边关于 x 积分,

$$\frac{k_4}{2}\int_0^x\frac{\partial}{\partial s}\rho^2ds=-[\dot b(t)+k_1b(t)c(t)]\int_0^x ds-[\dot c(t)+k_1c^2(t)]\int_0^x sds,$$

$$\frac{k_4}{2}[\rho^2(t,x)-\rho^2(t,0)]=-[\dot b(t)+k_1b(t)c(t)]x-\frac{[\dot c(t)+k_1c^2(t)]}{2}x^2,$$

化简可得

$$\rho^2(t,x)=\rho^2(t,0)-\frac{2}{k_4}[\dot b(t)+k_1b(t)c(t)]x-\frac{[\dot c(t)+k_1c^2(t)]}{k_4}x^2. \tag{3.4}$$

将 u 代入连续性方程, 有

$$\rho_t+k_2[c(t)x+b(t)]\rho_x+k_3\rho c(t)=0,$$

等式两边同乘以 ρ,

$$\frac{1}{2}(\rho^2)_t+\frac{k_2[c(t)x+b(t)]}{2}(\rho^2)_x+k_3\rho^2c(t)=0. \tag{3.5}$$

结合 (3.4) 和 (3.5), 并根据 x 的指数合并同类项

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(\rho^2)_t+\frac{k_2}{2}[c(t)x+b(t)](\rho^2)_x+k_3\rho^2c(t)\\
&=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial t}[\rho^2(t,0)]-\frac{2}{k_4}\frac{\partial}{\partial t}[\dot b(t)+k_1b(t)c(t)]x-\frac{\partial}{\partial t}\frac{[\dot c(t)+k_1c^2(t)]}{k_4}x^2\right\}\\
&\quad+\frac{k_2}{2}[c(t)x+b(t)]\left\{-\frac{2}{k_4}[\dot b(t)+k_1b(t)c(t)]-\frac{2}{k_4}[\dot c(t)+k_1c^2(t)]x\right\}\\
&\quad+k_3c(t)\left\{\rho^2(t,0)-\frac{2}{k_4}[\dot b(t)+k_1b(t)c(t)]x-\frac{[\dot c(t)+k_1c^2(t)]}{k_4}x^2\right\}\\
&=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}[\rho^2(t,0)]+k_3c(t)\rho^2(t,0)-\frac{k_2}{k_4}b(t)[\dot b(t)+k_1b(t)c(t)]\\
&\quad+\left\{-\frac{1}{k_4}\frac{\partial}{\partial t}[\dot b(t)+k_1b(t)c(t)]-\frac{k_2}{k_4}c(t)[\dot b(t)+k_1b(t)c(t)]\right.\\
&\qquad\left.-\frac{k_2}{k_4}b(t)[\dot c(t)+k_1c^2(t)]-\frac{2k_3}{k_4}c(t)[\dot b(t)+k_1b(t)c(t)]\right\}\cdot x\\
&\quad+\left\{-\frac{1}{2k_4}\frac{\partial}{\partial t}[\dot c(t)+k_1c^2(t)]-\frac{k_2}{k_4}[\dot c(t)+k_1c^2(t)]c(t)-\frac{k_3c(t)[\dot c(t)+k_1c^2(t)]}{k_4}\right\}\cdot x^2\\
&=0.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

整理可得

$$\begin{cases}
\dfrac{d}{dt}[\rho^2(t,0)]+2k_3c(t)\rho^2(t,0)-\dfrac{2k_3}{k_4}b(t)[\dot b(t)+k_1b(t)c(t)]=0,\\
\dfrac{d}{dt}[\dot b(t)+k_1b(t)c(t)]+(k_2+2k_3)c(t)[\dot b(t)+k_1b(t)c(t)]+k_2b(t)[\dot c(t)+k_1c^2(t)]=0,\\
\dfrac{d}{dt}[\dot c(t)+k_1c^2(t)]+2(k_2+k_3)c(t)[\dot c(t)+k_1c^2(t)]=0.
\end{cases} \tag{3.7}$$

下面分别对 (3.7) 的三个方程进行化简. (3.7) 中第一个方程可被改写为如下等价形式

$$\begin{cases}
\dfrac{d}{dt}[\rho^2(t,0)]+\rho^2(t,0)H(t)=G(t),\\
\rho^2(0,0)=\alpha^2,
\end{cases}$$

其中 $H(t)=2k_3c(t)$, $G(t)=\frac{2k_3}{k_4}b(t)[\dot b(t)+k_1b(t)c(t)]$.

由常数变易法可解得该一阶常微分方程

$$\rho^2(t,0)=\frac{\int_0^t\mu(s)G(s)ds+k}{\mu(t)},$$

其中 $\mu(t)=\mathrm{e}^{\int_0^t H(s)ds}$. 进一步, 有

$$\rho^2(t,x)=\frac{\int_0^t\mu(s)G(s)ds+k}{\mu(t)}-\frac{2}{k_4}\left[\dot b(t)+k_1b(t)\frac{\dot a(k_1t)}{a(k_1t)}\right]x-\frac{k_1}{k_4}\frac{\ddot a(k_1t)}{a(k_1t)}x^2. \tag{3.8}$$

其次, (3.7) 中第二个方程可化简为

$$\begin{aligned}&\ddot{b}(t)+k_1\dot{b}(t)c(t)+k_1b(t)\dot{c}(t)+(k_2+2k_3)c(t)\dot{b}(t)+(k_2+2k_3)k_1b(t)c^2(t)+k_2b(t)\dot{c}(t)+k_1k_2b(t)c^2(t)\\&\quad=b(t)+(k_1+k_2+2k_3)\dot{b}(t)c(t)+(k_1+k_2)b(t)\dot{c}(t)+(2k_1k_2+2k_1k_3)b(t)c^2(t)\\&\quad=\ddot{b}(t)+(k_1+k_2+2k_3)\frac{\dot{a}(k_1t)}{a(k_1t)}\dot{b}(t)+k_1(k_1+k_2)b(t)\frac{\ddot{a}(k_1t)}{a(k_1t)}+(k_1k_2+2k_1k_3-k_1^2)b(t)\frac{\dot{a}^2(k_1t)}{a^2(k_1t)}\\&\quad=0.\end{aligned}$$

当 $a(k_1t)$, $\dot{a}(k_1t)$ 存在时, 则 $b(t)$ 存在且有意义.

(3.7) 中第三个方程可化简为

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left[k_1\frac{\ddot{a}(k_1t)}{a(k_1t)}-k_1\frac{\dot{a}^2(k_1t)}{a^2(k_1t)}+k_1\frac{\dot{a}^2(k_1t)}{a^2(k_1t)}\right]+2(k_2+k_3)\left[k_1\frac{\ddot{a}(k_1t)}{a(k_1t)}-k_1\frac{\dot{a}^2(k_1t)}{a^2(k_1t)}+k_1\frac{\dot{a}^2(k_1t)}{a^2(k_1t)}\right]\frac{\dot{a}(k_1t)}{a(k_1t)}\\&\quad=\frac{d}{dt}\left(k_1\frac{\ddot{a}(k_1t)}{a(k_1t)}\right)+(2k_1k_2+2k_1k_3)\frac{\ddot{a}(k_1t)}{a(k_1t)}\frac{\dot{a}(k_1t)}{a(k_1t)}\\&\quad=k_1^2\frac{\dddot{a}(k_1t)}{a(k_1t)}-k_1^2\frac{\ddot{a}(k_1t)\dot{a}(k_1t)}{a^2(k_1t)}+(2k_1k_2+2k_1k_3)\frac{\ddot{a}(k_1t)\dot{a}(k_1t)}{a^2(k_1t)}\\&\quad=k_1^2\frac{\dddot{a}(k_1t)}{a(k_1t)}+(2k_1k_2+2k_1k_3-k_1^2)\frac{\ddot{a}(k_1t)\dot{a}(k_1t)}{a^2(k_1t)}\\&\quad=0.\end{aligned}$$

在等式两边同乘以 $a^2(k_1t)$, 有

$$k_1a(k_1t)\dddot{a}(k_1t)+(2k_2+2k_3-k_1)\dot{a}(k_1t)\ddot{a}(k_1t)=0,$$

化简可得

$$\ddot{a}(k_1t)=\frac{\xi}{a^{(2k_2+2k_3-k_1)/k_1}(k_1t)},\tag{3.9}$$

最后, 将 (3.9) 代入上式即可证明方程.

至此, 可得推广的广义两分量 Dullin–Gottwald–Holm 系统的一族精确解

$$\begin{cases}\rho^2(t,x)=\max\left\{\dfrac{\int_0^t\mu(s)G(s)ds+k}{\mu(t)}-\dfrac{2}{k_4}\left[\dot{b}(t)+k_1b(t)\dfrac{\dot{a}(k_1t)}{a(k_1t)}\right]x-\dfrac{k_1}{k_4}\dfrac{\xi}{a^{(2k_2+2k_3)/k_1}(k_1t)}x^2,0\right\},\\ u(t,x)=\dfrac{\dot{a}(k_1t)}{a(k_1t)}x+b(t),\end{cases}$$

证毕.

特别地, 当 $k_1=3, k_2=k_3=k_4=1$ 时, 可以得到 GDGH2 系统的一族精确解

$$\begin{cases}\rho^2(t,x)=\max\left\{\rho^2(t,0)-2\left[\dot{b}(t)+3b(t)\dfrac{\dot{a}(3t)}{a(3t)}\right]x-\dfrac{3\xi}{a^{4/3}(3t)}x^2,0\right\},\\ u(t,x)=\dfrac{\dot{a}(3t)}{a(3t)}x+b(t).\end{cases}\tag{3.10}$$

当 $\alpha=a_0=b_1=1$, $a_1=0$ 及 $\xi=-\frac{1}{3}<0$, GDGH2 系统存在爆破解; 当 $\alpha=a_0=b_1=1$, $a_1=0$ 及 $\xi=\frac{1}{3}>0$, GDGH2 系统存在全局解.

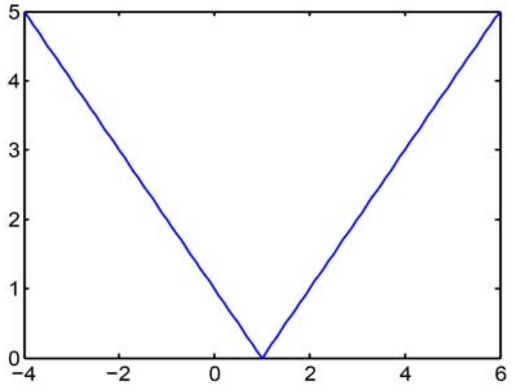

图 5 $\rho_0(x)=\sqrt{1-2x+x^2}$

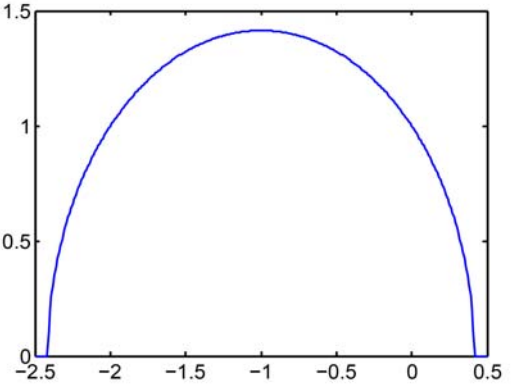

图 6 $\rho_0(x)=\max\{\sqrt{1-2x-x^2},0\}$

4 推广的 GDGH2 系统的扰动解

本节应用特征线法构造了具有 drift 结构的解

$$u(t,x)=\frac{\dot a(t)}{a(t)}(x+d(t))+b(t), \tag{4.1}$$

其中 $b(t)$ 和 $d(t)$ 均依赖于时间, 可直观地刻画实际问题中某时刻外界的扰动.

首先, 引入如下的尺度变换

$$\rho(t,x)=\rho(\bar t,\bar x),\quad u(t,x)=u(\bar t,\bar x),\quad \bar t=k_1t,\quad \bar x=\frac{k_1}{k_2}x.$$

推广的 GDGH2 系统 (2.1) 可被改写为以下等价形式

$$\begin{cases} k_1u_{\bar t}+\dfrac{k_1^2}{k_2}uu_{\bar x}+\dfrac{k_1k_4}{k_2}\rho\rho_{\bar x}=0,\\ \rho_{\bar t}+u\rho_{\bar x}+\dfrac{k_3}{k_2}\rho u_{\bar x}=0. \end{cases} \tag{4.2}$$

将 (4.1) 代入 (4.2) 中连续性方程, 可得

$$\rho_{\bar t}+u\rho_{\bar x}+\frac{k_3}{k_2}\rho u_{\bar x}=\rho_{\bar t}+\left[\frac{\dot a(\bar t)}{a(\bar t)}(\bar x+d(\bar t))+b(\bar t)\right]\rho_{\bar x}+\frac{k_3}{k_2}\frac{\dot a(\bar t)}{a(\bar t)}\rho=0.$$

由特征线法

$$\frac{d\bar t}{1}=\frac{d\bar x}{\frac{\dot a(\bar t)}{a(\bar t)}(\bar x+d(\bar t))+b(\bar t)}=\frac{d\rho}{-\frac{k_3}{k_2}\frac{\dot a(\bar t)}{a(\bar t)}\rho},$$

则解可以表示为

$$\Phi\left(\frac{\bar x}{a(\bar t)}-\int^{\bar t}\left[\frac{\dot a(\bar t)}{a^2(\bar t)}d(\bar t)+\frac{b(\bar t)}{a(\bar t)}\right]dt,\rho a(\bar t)^{\frac{k_3}{k_2}}\right)=0, \tag{4.3}$$

其中 $\Phi\in C^1$.

受文献 [1] 的启发, 在 $d(\bar t)$ 前取负号且令 $b(\bar t)=\dot d(\bar t)$, 则 (4.3) 可化为

$$\Phi\left(\frac{\bar x-d(\bar t)}{a(\bar t)},\rho a(\bar t)^{\frac{k_3}{k_2}}\right)=0, \tag{4.4}$$

亦可化为精确解的形式

$$\rho(t,x)=\frac{f\left(\frac{\overline{x}-d(\overline{t})}{a(\overline{t})}\right)}{a(\overline{t})^{k_3/k_2}},$$

其中 $f\in C^1$.

定理 4.1 推广的 GDGH2 系统 (2.1), 存在一族扰动解

$$\begin{cases}\rho(t,x)=\dfrac{f(\eta)}{a(\overline{t})^{k_3/k_2}},\\ u(t,x)=\dfrac{\dot{a}(\overline{t})}{a(\overline{t})}(\overline{x}-d(\overline{t}))+\dot{d}(\overline{t}),\end{cases}\tag{4.5}$$

其中 $f(\eta)=\pm\sqrt{-k_2\xi\eta/k_4+\eta_0}$, $\eta=\big((\overline{x}-d(\overline{t}))/a(\overline{t})\big)^2$, η_0, ξ 为非零常数. 辅助函数 $a(\overline{t})$ 满足 Emden 动态系统

$$(a(\overline{t})^{k_1/k_2})''=\frac{k_2\xi}{k_1a(\overline{t})^{\frac{2k_3}{k_2}+2-\frac{k_1}{k_2}}},\quad a(0)=a_0\neq 0,\quad \dot{a}(0)=a_1,$$

$d(\overline{t})$ 满足

$$d(\overline{t})=\int^{\overline{t}}\frac{c}{a(t)^{k_1/k_2-1}}dt,$$

其中 a_0,a_1 和 c 为任意常数.

证明 容易证明 (4.5) 满足 (2.1) 中连续方程. 下面证明 (4.5) 满足推广的 GDGH 方程. 将 $u(t,x)$, $\rho(t,x)$ 代入 (4.2) 中的 DGH 方程, 整理可得

$$\begin{aligned}&k_1u_{\overline{t}}+\frac{k_1^2}{k_2}uu_{\overline{x}}+\frac{k_1k_4}{k_2}\rho\rho_{\overline{x}},\\ &=k_1\frac{\partial}{\partial\overline{t}}\left(\frac{\dot{a}(\overline{t})}{a(\overline{t})}(\overline{x}-d(\overline{t}))+\dot{d}(\overline{t})\right)+\frac{k_1^2}{k_2}u\frac{\partial}{\partial\overline{x}}\left(\frac{\dot{a}(\overline{t})}{a(\overline{t})}(\overline{x}-d(\overline{t}))+\dot{d}(\overline{t})\right)+\frac{k_1k_4}{k_2}\rho\frac{\partial}{\partial\overline{x}}\left(\frac{f(\eta)}{a(\overline{t})^{k_3/k_2}}\right)\\ &=\frac{k_1(\overline{x}-d(\overline{t}))}{a(\overline{t})}\left[\ddot{a}(\overline{t})-\left(1-\frac{k_1}{k_2}\right)\frac{\dot{a}(\overline{t})^2}{a(\overline{t})}+\frac{2k_4}{k_2}\frac{f(\eta)\dot{f}(\eta)}{a(\overline{t})^{1+2k_3/k_2}}\right]+k_1\left[\ddot{d}(\overline{t})-\left(1-\frac{k_1}{k_2}\right)\frac{\dot{a}(\overline{t})}{a(\overline{t})}\dot{d}(\overline{t})\right].\end{aligned}$$

令

$$\ddot{a}(\overline{t})-\left(1-\frac{k_1}{k_2}\right)\frac{\dot{a}(\overline{t})^2}{a(\overline{t})}=\frac{\xi}{a(\overline{t})^{1+2k_3/k_2}},$$

由相应的条件, 可以得到 Emden 动态系统

$$(a(\overline{t})^{k_1/k_2})''=\frac{k_2\xi}{k_1a(\overline{t})^{\frac{2k_3}{k_2}+2-\frac{k_1}{k_2}}},\quad a(0)=a_0\neq 0,\quad \dot{a}(0)=a_1.$$

令

$$\ddot{d}(\overline{t})-\left(1-\frac{k_1}{k_2}\right)\frac{\dot{a}(\overline{t})}{a(\overline{t})}\dot{d}(\overline{t})=0,$$

可得

$$d(\overline{t})=\int^{\overline{t}}\frac{c}{a(t)^{k_1/k_2-1}}dt,$$

其中 c 为任意常数.

又

$$\xi + \frac{2k_4}{k_2} f(\eta)\dot{f}(\eta) = 0,$$

则

$$f(\eta) = \pm\sqrt{-\frac{k_2\xi}{k_4}\eta + \eta_0}, \quad \eta = \left(\frac{\overline{x} - d(\overline{t})}{a(\overline{t})}\right)^2.$$

证毕.

观察以上所述的系统, 当参数 k_1, k_2, k_3 及 k_4 取某些特殊值时, 可得到 GDGH2, CH2, BBM 等其他系统扰动形式的精确解. 此类扰动解为自相似解, 同样具有爆破性及全局存在性等性质, 这些性质我们在第 2 节已经讨论过, 且该类扰动解在描述海啸模型的运动中起着重要的作用.

致谢 感谢审稿人对本文提出的宝贵意见.

参 考 文 献

[1] An H., Cheung K., Yuen M., Perturbational self-similar solutions for the 2-component Degasperi–Procesi system via a characteristic method, *Invent. Turk. J. Math.*, 2016, **40**: 1237–1245.
[2] Beals R., Sattinger D., Szmigielski J., Multi-peakons and a theorem of Stieltjes, *Invent. Inverse Problems*, 1999, **15**: L1–L4.
[3] Benjamin T. B., Bona J. L., Mahony J. J., Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems, *Invent. Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 1972, **272**: 47–78.
[4] Camassa R., Holm D. D., An integrable shallow water equation with peaked solitons, *Invent. Phys. Rev. Lett.*, 1993, **71**: 1661–1664.
[5] Chen R. M., Liu Y., Wave-breaking and global existence for a generalized two-component Camassa–Holm system, *Invent. Int. Math. Res. Not.*, 2011, **2011**: 1381–1416.
[6] Chou K. S., Qu C., Integrable equations arising from motions of plane curves, *Invent. J. Nonlinear. Sci.*, 2003, **13**: 487–517.
[7] Constantin A., On the Cauchy problem for the periodic Camassa–Holm equation, *Invent. J. Diff. Eqs.*, 1997, **141**: 18–235.
[8] Constantin A., Global existence of solutions and breaking waves for a shallow water equation: A geometric approach, *Invent. Ann. Inst. Fourier*, 2000, **50**: 321–362.
[9] Constantin A., On the blow-up of solutions of a periodic shallow water equation, *Invent. J. Nonlinear Sci.*, 2000, **10**: 391–399.
[10] Constantin A., Escher J., Well-posedness, global existence and blowup phenomena for a periodic quasilinear hyperbolic equation, *Invent. Comm. Pure Appl. Math.*, 1998, **51**: 475–504.
[11] Constantin A., Ivanov R., On an integrable two-component Camassa–Holm shallow water system, *Invent. Phys. Lett. A.*, 2008, **372**: 7129–7132.
[12] Constantin A., Johnson R. S., Propagation of very long water wave, with vorticity, over variable depth, with applications to tsunamis, *Invent. Fluid Dynam. Res.*, 2008, **40**: 175–211.
[13] Constantin A., Lannes D., The hydrodynamical relevance of the Camassa–Holm and Degasperis–Procesi equations, *Invent. Arch. Ration. Mech. Anal.*, 2009, **192**: 165–186.
[14] Constantin A., Strauss W. A., Stability of peakons, *Invent. Comm. Pure Appl. Math.*, 2000, **53**: 603–610.
[15] Constantin A., Strauss W. A., Stability of the Camassa–Holm solitons, *Invent. J. Nonlinear Sci.*, 2002, **12**: 415–422.
[16] Dullin H. R., Gottwald G. A., Holm D. D., An integrable shallow water equation with linear and nonlinear dispersion, *Invent. Phys. Rev. Lett.*, 2001, **87**: 194501–194504.
[17] Escher J., Lechtenfeld O., Yin Z., Well-posedness and blow-up phenomena for the 2-component Camassa–Holm equation, *Invent. Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2012, **19**: 493–513.
[18] Fokas A. S., Liu Q., Asymptotic integrability of water waves, *Invent. Phys. Rev. Lett.*, 1996, **77**: 2347–2351.
[19] Fuchssteiner, B., Some tricks from the symmetry-toolbox for nonlinear equations: generalizations of the Camassa–Holm equation, *Invent. Phys. D.*, 1996, **95**: 296–343.

[20] Fuchssteiner B., Fokas A. S., Symplectic structures, their Bäcklund transformation and hereditary symmetries, *Invent. Phys. D.*, 1981, **4**: 47–66.
[21] Guan C., Yin Z., Global weak solutions for a two-component Camassa–Holm shallow water system, *Invent. J. Funct. Anal.*, 2011, **260**: 1132–1154.
[22] Gui G., Liu Y., On the global existence and wave-breaking criteria for the two-component Camassa–Holm system, *Invent. J. Funct. Anal.*, 2010, **258**: 4251–4278.
[23] Gui G., Liu Y., On the Cauchy problem for the two-component Camassa–Holm system, *Invent. Math. Z.*, 2011, **268**: 45–66.
[24] Guo F., Gao H., Liu Y., On the wave-breaking phenomena for the two-component Dullin–Gottwald–Holm system, *Invent. J. London Math. Soc.*, 2012, **86**: 810–834.
[25] Han Y., Guo F., Gao H., On Solitary Waves and Wave-Breaking Phenomena for a Generalized Two-Component Integrable Dullin–Gottwald–Holm System, *Invent. J. Nonlinear Sci.*, 2013, **23**: 617–656.
[26] Henry D., Infinite propagation speed for a two component Camassa–Holm equation, *Invent. Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 2009, **12**: 597–606.
[27] Ionescu-Kruse D., Variational derivation of the Camassa–Holm shallow water equation, *Invent. J. Nonlinear Math. Phys.*, 2007, **14**: 303–312.
[28] Ivanov R., Two-component integrable systems modelling shallow water wave: the constant vorticity case, *Invent. Wave Motion*, 2009, **46**: 389–396.
[29] Johnson R. S., Camassa–Holm, Korteweg-de Vries and related models for water waves, *Invent. J. Fluid Mech.*, 2002, **455**: 63–82.
[30] Johnson R. S., The Camassa–Holm equation for water wave moving over shear flow, *Invent. Fluid Dynam. Res.*, 2003, **33**: 97–111.
[31] Kouranbaeva S., The Camassa–Holm equations as a geodesic flow on the diffeomorphism group, *Invent. J. Math. Phys.*, 1999, **40**: 857–868.
[32] Lakshmanan M., Integrable Nonlinear Wave Equations and Possible Connections to Tsunami Dynamics, Springer, Berlin, 2007.
[33] Lenells J., Stability of periodic peakons, *Invent. Int. Math. Res. Not.*, 2004, **10**: 485–499.
[34] Lenells J., Traveling wave solutions of the Camassa–Holm equation, *Invent. J. Diff. Eqs.*, 2005, **217**: 393–430.
[35] Liu X., Yin Z., Local well-posedness and stability of peakons for a generalizad Dullin–Gottwald–Holm equation, *Invent. Nonlinear Anal. Theor. Methods Appl.*, 2011, **74**: 2497–2507.
[36] Lu D., Peng D., Tian L., On the well-posedness problem for the generalized Dullin–Gottwald–Holm equation, *Invent. Int. J. Nonlinear Sci.*, 2006, **3**: 178–186.
[37] Mckean H. P., Integrable Systems and Algebraic Curves, Springer, Berlin, 1979.
[38] Misiolek G., A shallow water equation as a geodesic flow on the Bott-Virasoro group, *Invent. J. Geom. Phys.*, 1998, **24**: 203–208.
[39] Nariboli G. A., Nonlinear longitudinal dispersive waves in elastic rods, *Invent. J. Math. Phys. Sci.*, 1970, **4**: 64–73.
[40] Olver P. J., Rosenau, P., Tri-Hamiltonian duality between solitons and solitary-wave solutions having compact support, *Invent. Phys. Rev. E.*, 1996, **53**: 1900–1906.
[41] Popowwicz Z., A 2-component or N = 2 supersymmetric Camassa–Holm equation, *Invent. Phys. Lett. A.*, 2006, **354**: 110–114.
[42] Segur H., Waves in Shallow Water with Emphasis on the Tsunami of 2004, Springer, Berlin, 2007.
[43] Tian L., Gui G., Liu Y., On the Well-Posedness Problem and the Scattering Problem for the Dullin–Gottwald–Holm Equation, *Invent. Comm. Math. Phys.*, 2005, **257**: 667–701.
[44] Whitham G. B., Linear and Nonlinear Waves, Wiley, New York, 1974.
[45] Yuen M., Self-similar blowup solutions to the 2-component Camassa–Holm equations, *Invent.J. Math. Phys.*, 2011, **52**: 079901.
[46] Yuen M., Self-similar blowup solutions to the 2-component Degasperis–Procesi shallow water system, *Invent.Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 2011, **16**: 3463–3469.
[47] Yuen M., Perturbational blowup solutions to the 2-component Camassa–Holm equations, *Invent. J. Math. Anal. Appl.*, 2012, **390**: 596–602.