第62卷第1期 数学学报中文版 Vol.62, No.1
2019年1月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Jan., 2019

文章编号: 0583-1431(2019)01-0025-16 **文献标识码: A**

一类非自治分数阶随机波动方程的随机吸引子

文慧霞 舒 级 李林芳

四川师范大学数学与软件科学学院 成都 610066

E-mail: 470978706@qq.com; shuji2008@hotmail.com; 515503842@qq.com

摘 要 本文考虑带加性噪声的非自治分数阶随机波动方程在无界区域 $\mathbb{R}^n$ 上的渐近行为. 首先将随机偏微分方程转化为随机方程, 其解产生一个随机动力系统, 然后运用分解技术建立该系统的渐近紧性, 最后证明随机吸引子的存在性.

关键词 非自治分数阶随机波动方程; 随机动力系统; 随机吸引子; 分解技术; 加性噪声

MR(2010) 主题分类 35B40, 35B41, 60H15

中图分类 O175.29

The Random Attractors for a Class of Nonautonomous Fractional Stochastic Wave Equations

Hui Xia WEN Ji SHU Lin Fang LI

College of Mathematics and Software Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, *P. R. China*

E-mail: 470978706*@qq.com*; *shuji*2008*@hotmail.com*; 515503842*@qq.com*

Abstract We consider the asymptotic behavior of non-autonomous stochastic fractional wave equations on an unbounded domain $\mathbb{R}^n$. We firstly transform the equation into a random equation whose solutions generate a random one system. Then we establish the asymptotical compactness of the system by the splitting technique. Finally the existence of random attractors is proved.

Keywords non-autonomous stochastic fractional wave equation; random dynamical system; random attractor; the splitting technique; additive noise

MR(2010) Subject Classification 35B40, 35B41, 60H15

Chinese Library Classification O175.29

1 引言

分数阶微分方程是包含有分数阶导数和分数阶积分的一类方程. 目前, 分数阶微分方程涉及

收稿日期: 2017-11-14; 接受日期: 2018-01-13

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11371267, 11571245); 四川省科技厅应用基础计划项目 (2016JY0204)

通讯作者: 舒级

流体力学、材料力学、生物学、化学、等离子体物理学、电磁学、统计学、金融数学等许多领域,并得到了快速的发展 [7–10, 15]. 近年来, 数学物理中的一些经典方程已被广泛研究, 包括分数阶 Schrödinger 方程 [5, 11, 13]、分数阶 Ginzburg-Landau 方程 [18, 19, 21, 22, 25, 26]、分数阶 Landau–Lifshitz 方程 [12]、分数阶 Landau-Lifshitz-Maxwell 方程 [23]、分数阶随机反应扩散方程 [28] 及分数阶耗散方程 [20].

随机波动方程是一类非常重要的随机偏微分方程, 在物理学、流体力学、声学、电动力学等众多领域应用广泛. 随机吸引子是研究随机动力系统长时间渐近行为的有效工具, 其实质是紧的不变集, 该不变集依概率并随着时间变化. 随机吸引子是对确定性动力系统中吸引子的推广, 文 [1, 3, 4, 6, 14, 16, 17, 27, 29–40] 给出了随机动力系统中随机吸引子的概念及详细阐述. 很多作者已经将在有界区域 [16, 29, 30, 39, 40] 和无界区域 [14, 17, 33, 35–38] 上对随机波动方程的动力学行为进行了深入研究. 特别地, 文 [29, 30] 给出了自治的随机波动方程随机吸引子存在性的证明, 文 [31] 对有界区域上带非自治项的情况进行了考虑. 文 [36, 37] 讨论了带有白噪声的非自治随机波动方程的渐近行为.

本文研究在无界区域 $\mathbb{R}^n$ 上的非自治分数阶随机波动方程随机吸引子的存在性:

$$u_{tt}+\alpha u_t+(-\Delta)^s u+\lambda u+f(x,u)=g(x,t)+h(x)\frac{dw}{dt},\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad t\geq\tau,\quad \tau\in\mathbb{R}, \tag{1.1}$$

初边值条件为

$$u(x,\tau)=u_\tau(x),\quad u_t(x,\tau)=u_{1\tau}(x),\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad t\geq\tau, \tag{1.2}$$

其中 $s\in(\frac{1}{2},1)$, α,λ 是正常数, τ 表示初始时刻, $g(x,t)\in L^2_{\rm loc}(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^n))$ 是时间依赖的外力项, $h(x)\in H^s(\mathbb{R}^n)$, w 是一维双边标准 Wiener 过程, 非线性项 f 为 $\mathbb{R}$ 上光滑的具有某种增长率的函数.

本文第 2 节介绍非自治随机动力系统、随机吸引子、分数阶导数以及分数阶 Sobolev 空间的准备知识. 第 3 节建立带加性噪声的非自治分数阶随机波动方程对应的具有两个参数的随机动力系统. 第 4 节对解进行一致估计, 然后利用分解技术证明渐近紧性. 第 5 节给出随机吸引子的存在唯一性.

本文采用 $\|\cdot\|$ 和 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 分别表示 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 空间的范数与内积. Hilbert 空间 X 的范数记为 $\|\cdot\|_X$. $1\leq p\leq\infty$ 时, $L^p(\mathbb{R}^n)$ 空间的范数记为 $\|\cdot\|_p$. 字母 c 和 c_i $(i=1,2,\dots)$ 分别表示不同的正常数, 随着式子的变化而改变.

2 预备知识

本节给出非自治随机动力系统, 随机吸引子的有关知识 [1, 2, 31].

假设 $(X,\|\cdot\|_X)$ 是一个可分 Hilbert 空间, $B(X)$ 为 X 的 Borel σ- 代数, $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是度量空间且 $(\Omega,\mathscr{F},P,\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ 为一个度量动力系统.

定义 2.1 设 Ω_1 是一个非空集合. 如果一个映射 $\theta_{1,t}:\mathbb{R}\times\Omega_1\to\Omega_1$, 满足

(i) $\theta_{1,0}$ 为在 Ω_1 上的恒同映射;

(ii) $\theta_{1,t+s}=\theta_{1,t}\circ\theta_{1,s},\ \forall s,t\in\mathbb{R}$,

则称 $(\Omega_1,\{\theta_{1,t}\}_{t\in\mathbb{R}})$ 是一个参数动力系统.

定义 2.2 令 $\theta_t:\Omega_2\to\Omega_2$ 是 $(\mathscr{B}(\mathbb{R})\times\mathscr{F}_2,\mathscr{F}_2)$- 可测映射, 并满足

(i) $\theta(0,\cdot)$ 为在 Ω_2 上的恒同映射;

(ii) $\theta(s+t,\cdot)=\theta(t,\cdot)\circ\theta(s,\cdot),\ \forall s,t\in\mathbb{R}$;

(iii) $P\theta(t,\cdot)=P,\ \forall t\in\mathbb{R}$,

则称 $(\Omega_2,\mathscr{F}_2,P,\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ 是一个参数动力系统.

定义 2.3 设 $(\Omega_1,\{\theta_{1,t}\}_{t\in\mathbb{R}})$, $(\Omega_2,\mathscr{F}_2,P,\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ 是两个参数动力系统. 如果映射 $\Phi:\ \mathbb{R}^+\times\Omega_1\times\Omega_2\times X\to X$, 满足对 $\forall\omega_i\in\Omega_i\ (i=1,2)$, $t,\tau\in\mathbb{R}^+$:

(i) $\Phi(\cdot,\omega_1,\cdot,\cdot):\mathbb{R}^+\times\Omega_2\times X\to X$ 是 $(\mathscr{B}(\mathbb{R}^+)\times\mathscr{F}_2\times\mathscr{B}(X),\mathscr{B}(X))$- 可测的;

(ii) $\Phi(0,\omega_1,\omega_2,\cdot)$ 是 X 上的恒同映射;

(iii) $\Phi(t+s,\omega_1,\omega_2,\cdot)=\Phi(t,\theta_{1,\tau}\omega_1,\theta_\tau\omega_2)\circ\Phi(\tau,\omega_1,\omega_2,\cdot)$;

(iv) $\Phi(t,\omega_1,\omega_2,\cdot):X\to X$ 是连续的,

则称 Φ 是 X 上关于参数动力系统 $(\Omega_1,\{\theta_{1,t}\}_{t\in\mathbb{R}})$ 和 $(\Omega_2,\mathscr{F}_2,P,\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ 的连续 cocycle.

设 $\mathscr{D}$ 是 X 上一些非空参数子集 $D_{\omega_i\in\Omega_i(i=1,2)}$ 的集合构成的集族:

$$\mathscr{D}=\{D=\{D(\omega_1,\omega_2)\subseteq X:D(\omega_1,\omega_2)\neq\emptyset,\ \omega_1\in\Omega_1,\ \omega_2\in\Omega_2\}\}.$$

注意到, 若 D_1 和 D_2 满足 $D_1(\omega_1,\omega_2)=D_2(\omega_1,\omega_2),\ \forall\omega_i\in\Omega_i\ (i=1,2)$, 则称 D_1 和 D_2 是相同的.

定义 2.4 设 $\mathscr{D}$ 为 X 上的一些非空随机子集构成的集族. 如果对任意 $D=\{D(\omega_1,\omega_2):\omega_1\in\Omega_1,\ \omega_2\in\Omega_2\}\in\mathscr{D}$, 都存在一个关于 D 的正实数 ϵ 满足集合 $\{B(\omega_1,\omega_2):B(\omega_1,\omega_2)$ 是 $\mathscr{N}_\epsilon(D(\omega_1,\omega_2))$ 的一个非空子集, $\forall\omega_1\in\Omega_1,\ \omega_2\in\Omega_2\}$ 也属于 $\mathscr{D}$, 则称 $\mathscr{D}$ 是一个闭邻域.

定义 2.5 设 $D=\{D(\omega_1,\omega_2):\omega_1\in\Omega_1,\ \omega_2\in\Omega_2\}$ 为 X 上一些非空子集的集合. 如果存在 $x_0\in X$ 满足 P-a.e. $\omega_i\in\Omega_i\ (i=1,2)$,

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-\beta t}d(x_0,D(\theta_{1,t}\omega_1,\theta_t\omega_2))=0,\quad\forall\beta>0,$$

则称 $\mathscr{D}$ 在 X 上关于参数动力系统 $(\Omega_1,\{\theta_{1,t}\}_{t\in\mathbb{R}})$ 和 $(\Omega_2,\mathscr{F}_2,P,\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ 是缓增的.

定义 2.6 设 $\mathscr{D}$ 为 X 上的一些非空随机子集构成的集族. 如果映射 $\Phi:\ \mathbb{R}\times\Omega_1\times\Omega_2\to X$, 满足对所有 $\tau\in\mathbb{R},\ t\geq0$, P-a.e. $\omega_i\in\Omega_i\ (i=1,2)$, 有

$$\Phi(t,\theta_{1,t}\omega_1,\theta_t\omega_2,\varphi(\tau,\omega_1,\omega_2))=\varphi(t+\tau,\omega_1,\omega_2),$$

则称 Φ 是完备轨道. 另外, 如果存在 $D=\{D(\omega_1,\omega_2):\omega_1\in\Omega_1,\ \omega_2\in\Omega_2\}\in\mathscr{D}$, 满足对 $\forall t\in\mathbb{R}$, P-a.e. $\omega_i\in\Omega_i\ (i=1,2)$, $\varphi(t,\omega_1,\omega_2)$ 都属于 $D(\theta_{1,t}\omega_1,\theta_t\omega_2)$, 则称 φ 是 Φ 的一个 $\mathscr{D}$- 完备轨道.

定义 2.7 设 $B=\{B(\omega_1,\omega_2):\omega_1\in\Omega_1,\ \omega_2\in\Omega_2\}$ 是 X 的一些非空子集的集合. 令

$$\Omega(B,\omega_1,\omega_2)=\bigcap_{\tau\geq0}\overline{\bigcup_{t\geq\tau}\Phi(t,\theta_{1,-t}\omega_1,\theta_{-t}\omega_2,B(\theta_{1,-t}\omega_1,\theta_{-t}\omega_2))},\quad\omega_i\in\Omega_i\quad(i=1,2),$$

则称集合 $\{\Omega(B,\omega_1,\omega_2):\omega_1\in\Omega_1,\ \omega_2\in\Omega_2\}$ 为 B 的 Ω- 有限集, 记作 $\Omega(B)$.

定义 2.8 设 $\mathscr{D}$ 为 X 上的一些非空随机子集构成的集族, $K=\{K(\omega_1,\omega_2):\omega_1\in\Omega_1,\ \omega_2\in\Omega_2\}\in\mathscr{D}$. 如果 $\forall B\in\mathscr{D}$, P-a.e. $\omega_1\in\Omega_1,\ \omega_2\in\Omega_2$, 都存在 $T=T(B,\omega_1,\omega_2)>0$, 使得

$$\Phi(t,\theta_{1,-t}\omega_1,\theta_{-t}\omega_2,B(\theta_{1,-t}\omega_1,\theta_{-t}\omega_2))\subseteq K(\omega_1,\omega_2),\quad\forall t\geq T,$$

则称 K 为 Φ 的一个 $\mathscr{D}$- 拉回吸收集.

定义 2.9 设 $\mathscr{D}$ 为 X 上的一些非空随机子集构成的集族. 如果对 $\{B(\omega_1,\omega_2):\omega_1\in\Omega_1$, $\omega_2\in\Omega_2\}\in\mathscr{D}$, 当 $t_n\to\infty$ 时, 有 $x_n\in B(\theta_{1,-t_n}\omega_1,\theta_{-t_n}\omega_2)$, 且对 P-a.e. $\omega_1\in\Omega_1,\ \omega_2\in\Omega_2$, $\{\Phi(t_n,\theta_{1,-t_n}\omega_1,\theta_{-t_n}\omega_2,X_n)\}_{n=1}^\infty$ 在 X 中存在收敛的子序列, 则称 Φ 在 X 上是 $\mathscr{D}$- 拉回渐近紧的.

定义 2.10 设 $\mathscr{D}$ 为 X 上的一些非空随机子集构成的集族, $\mathscr{A}=\{\mathscr{A}(\omega_1,\omega_2):\omega_1\in\Omega_1,\ \omega_2\in\Omega_2\}\in\mathscr{D}$. 如果对 P-a.e. $\omega_1\in\Omega_1,\ \omega_2\in\Omega_2$, 满足

(i) 对所有 $\omega_1\in\Omega_1,\ \omega_2\in\Omega_2$, $\{\mathscr{A}(\omega_1,\omega_2)\}$ 是紧的;

(ii) $\mathscr{A}$ 对 Φ 是不变的, 即对 a.e. $\omega_1\in\Omega_1$, $\omega_2\in\Omega_2$ 和所有 $t\geq 0$, 有 $\Phi(t,\omega_1,\omega_2,\mathscr{A}(\omega_1,\omega_2))=\mathscr{A}(\theta_{1,t}\omega_1,\theta_t\omega_2)$;

(iii) $\mathscr{A}$ 吸引 $\mathscr{D}$ 的一切随机子集, 即 $\forall B=\{B(\omega_1,\omega_2):\omega_1\in\Omega_1,\ \omega_2\in\Omega_2\}\in\mathscr{D}$, a.e. $\omega_1\in\Omega_1,\ \omega_2\in\Omega_2$, 都有

$$\lim_{t\to\infty}d(\Phi(t,\theta_{1,t}\omega_1,\theta_t\omega_2,B(\theta_{1,-t}\omega_1,\theta_{-t}\omega_2)),\mathscr{A}(\omega_1,\omega_2))=0,$$

其中 d 为 X 的 Hausdorff 半度量, $d(Y,Z)=\sup_{y\in Y}\inf_{z\in Z}\|y-z\|_X$, $\forall Y,Z\subseteq X$,
则称 $\mathscr{A}$ 为 Φ 的 $\mathscr{D}$- 随机吸引子 (或 $\mathscr{D}$- 拉回吸引子).

命题 2.11 [39] 设 $\mathscr{D}$ 为 X 的闭随机集构成的集族, Φ 是 X 上参数动力系统 $(\Omega_1,\{\theta_{1,t}\}_{t\in\mathbb{R}})$ 和 $(\Omega_2,\mathscr{F}_2,P,\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ 的连续 cocycle. 假设 Φ 存在闭 $\mathscr{D}$- 拉回吸收集 K, 且 Φ 在 X 中是 $\mathscr{D}$- 拉回渐近紧的. 那么 Φ 存在唯一的 $\mathscr{D}$- 拉回吸引子 $\mathscr{A}$:

$$\mathscr{A}(\omega_1,\omega_2)=\Omega(K,\omega_1,\omega_2)=\bigcup_{B\in\mathscr{D}}\Omega(K,\omega_1,\omega_2)=\{\varphi(K,\omega_1,\omega_2):\varphi\ \text{是}\ \Phi\ \text{的一条}\ \mathscr{D}\text{- 完备轨道}\}.$$

下面介绍一些分数阶导数与分数阶 Sobolev 空间的定义 [24]. 设 $\mathscr{S}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上由 C^∞ 速降函数构成的 Schwartz 空间, 那么对 $\frac{1}{2}<s<1$, $u\in\mathscr{S}$, 分数阶 Laplace 算子 $(-\Delta)^s$ 可以定义为

$$(-\Delta)^s u=\mathscr{F}^{-1}(|\xi|^{2s}(\mathscr{F}u)),\quad \xi\in\mathbb{R}^n,$$

其中 $\mathscr{F}$ 是 Fourier 变换.

$$(\mathscr{F}u)(\xi)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}u(x)dx,\quad u\in\mathscr{S},$$

其中 $\mathscr{F}^{-1}$ 是 Fourier 逆变换.

记 H^s 为完备 s 阶 Sobolev 空间, 其范数表示为

$$\|u\|_{H^s}=(\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)})^{\frac{1}{2}}.$$

由 $(-\Delta)^s$ 的定义, 得到以下分部积分公式 [21].

引理 2.12 假设 $f,g\in H^{2s}(\mathbb{R}^n)$, 则下式成立

$$\int_{\mathbb{R}^n}(-\Delta)^s f\cdot g dx=\int_{\mathbb{R}^n}(-\Delta)^{s_1}f\cdot(-\Delta)^{s_2}g dx,$$

其中 s_1 和 s_2 是非负常数并满足 $s_1+s_2=s$.

3 非自治分数阶随机波动方程的 cocycle

由于 w 为完备概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 中的一个独立双边实值 Wiener 过程, 其轨道 $w(\cdot)$ 属于 $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, 且 $w(0)=0$ 在 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 中的保测转移算子定义为

$$\theta_t w(\cdot)=w(\cdot+t)-w(t),\quad w\in\Omega,\quad t\in\mathbb{R}.$$

那么 $(\Omega,\mathscr{F},P,(\theta_t)_{t\in\mathbb{R}})$ 为一个度量动力系统.

对一较小的正数 δ, 引进新的变量 $z = u_t + \delta u$, 那么方程 (1.1), (1.2) 等价于

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + \delta u = z; \\ \dfrac{dz}{dt} = (\alpha\delta - \lambda - \delta^2)u - (-\Delta)^s u + (\delta - \alpha)z + g(x,t) - f(x,u) + h(x)\dfrac{w(t)}{dt}; \\ u(x,\tau) = u_\tau(x), \quad z(x,\tau) = z_\tau(x), \end{cases} \tag{3.1}$$

其中 $z_\tau = u_1 + \delta u_\tau$, $s \in (\frac{1}{2}, 1)$, α, λ 为正常数, $g \in L^2_{\rm loc}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^n))$, $h(x) \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$. 为了得到方程弱解的存在性和拉回吸引子的存在性, 假设非线性项 $f(x,u)$ 满足如下条件: 存在正常数 c_1, c_2, c_3, $c_4 > 0$, 对 $\forall u \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, 满足

$$|f(x,u)| \leq c_1|u|^r + \phi_1(x), \quad \phi_1 \in L^2(\mathbb{R}^n), \tag{3.2}$$

$$uf(x,u) - c_2F(x,u) \geq \phi_2(x), \quad \phi_2 \in L^1(\mathbb{R}^n), \tag{3.3}$$

$$F(x,u) \geq c_3|u|^{r+1} - \phi_3, \quad \phi_3 \in L^1(\mathbb{R}^n), \tag{3.4}$$

$$|f_u(x,u)| \leq c_4|u|^{r-1} + \phi_4, \quad \phi_4 \in H^s(\mathbb{R}^n), \tag{3.5}$$

当 $n = 1, 2$ 时, $1 \leq r < \infty$. 当 $n = 3$ 时, $1 \leq r < 3$, 其中 $F(x,u) = \int_0^u f(x,s)ds$. 由方程 (3.2) 和 (3.3) 可得

$$F(x,u) \leq c(|u|^2 + |u|^{r+1} + \phi_1^2 + \phi_2). \tag{3.6}$$

为了研究方程 (3.1) 的渐近行为, 需要将随机系统转化为只带有随机参数的确定系统. 因此, 令 $v(t,\tau,w) = z(t,\tau,w) - hw(t)$, 方程 (3.1) 可化为

$$\frac{du}{dt} - v + \delta u = hw(t), \tag{3.7}$$

$$\frac{dv}{dt} = (\alpha\delta - \lambda - \delta^2)u - (-\Delta)^s u + (\delta - \alpha)v + g(x,t) - f(x,u) + (\delta - \alpha)hw(t), \tag{3.8}$$

初值条件

$$u(x,\tau) = u_\tau(x), \quad v(x,\tau) = v_\tau(x), \tag{3.9}$$

其中 $v_\tau(x) = u_\tau(x) - hw(\tau)$.

由文 [2] 中的 Galerkin 方法可以证明: 若假设条件 (3.2)–(3.5) 成立, 则方程 (3.7)–(3.9) 在相空间 $X := H^s(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ 中是适定的, 即任意 $\tau \in \mathbb{R}$, 对 P-a.e. $w \in \Omega$, $(u_\tau, v_\tau) \in X$, 方程 (3.7)–(3.9) 存在唯一的弱解

$$(u(t,\tau,w,u_\tau), v(t,\tau,w,v_\tau)) \in C([\tau,\infty), X), \quad 且 \quad (u(\tau,\tau,w,u_\tau), v(\tau,\tau,w,v_\tau)) = (u_\tau, v_\tau).$$

进一步, 该解关于初值在 X 中是连续且 $(\mathscr{F}, \mathscr{B}(H^s(\mathbb{R}^n) \times \mathscr{B}(L^2(\mathbb{R}^n)))$ 可测的. 于是, 可以定义一个 cocycle $\Phi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \Omega \times X \to X$,

$$\Phi(t,\tau,w,(u_\tau,v_\tau)) = (u(t+\tau,\tau,\theta_{-\tau}w,u_\tau), v(t+\tau,\tau,\theta_{-\tau}w,v_\tau) + hw(t)), \tag{3.10}$$

其中 $(t,\tau,w,(u_\tau,v_\tau)) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \Omega \times X$, 则 Φ 关于 $(\mathbb{R}, \{\theta_{1,t}\}_{t\in\mathbb{R}})$ 和 $(\Omega, \mathscr{F}, P, \{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ 在 X 上是一个连续 cocycle. 注意到, 对 P-a.e. $w \in \Omega$ 和 $t, s \geq 0$, $\tau \in \mathbb{R}$:

$$\Phi(t+s,\tau,w,(u_\tau,v_\tau)) = \Phi(t, s+\tau, w, \Phi(s,\tau,w,(u_\tau,v_\tau))). \tag{3.11}$$

这里把相空间的范数定义为:

$$\|(u,v)\|_X = (\|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} + \|v\|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

设 B 是 X 的一个有界非空子集, 且 $\|B\|=\sup_{\Phi\in\mathbb{R}}\|\Phi\|_X$. 假设 $D=\{D(\tau,w):\tau\in\mathbb{R},w\in\Omega\}$ 是 X 的一族有界非空子集, 并满足对任意 $\tau\in\mathbb{R}$, $w\in\Omega$,

$$\lim_{\xi\to\infty}\mathrm{e}^{-\sigma\xi}\|D(\tau-\xi,\theta_{-\xi}w)\|^r=0, \tag{3.12}$$

其中 r 已在 (3.2) 中给出定义.

记 $\mathscr{D}_r$ 为上述子集族 D 的集合, 即 $\mathscr{D}_r=\{D=\{D(\tau,w):\tau\in\mathbb{R},w\in\Omega\}:D$ 满足 (3.12)$\}$.

在本文中, 当推导解的一致估计时需要 g 满足如下条件

$$\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{\sigma\xi}\|g(\cdot,\xi)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}d\xi\le\infty,\quad\forall t\in\mathbb{R}, \tag{3.13}$$

以及

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\infty}^{t}\int_{|x|\ge k}\mathrm{e}^{\sigma\xi}\|g(\cdot,\xi)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}d\xi\le\infty,\quad\forall t\in\mathbb{R}. \tag{3.14}$$

4 解的一致估计

为了证明随机吸引子的存在性, 首先给出解的一致估计, 以证明 X 中的 $\mathscr{D}_r$- 拉回吸收集的存在性和 Φ 的 $\mathscr{D}_r$- 拉回渐近紧性, 使 $\delta>0$ 足够小且满足 $\alpha-\delta>0$, $\lambda+\delta^2-\alpha\delta>0$. 令

$$2\sigma=\min\{\alpha-\delta,\delta,c_2\delta\}, \tag{4.1}$$

其中 c_2 是 (3.3) 中的正常数, 记 $\Lambda=(-\Delta)^{\frac{s}{2}}$.

引理 4.1 设 $h(x)\in H^s(\mathbb{R}^n)$, (3.2)–(3.5) 成立且 $B=\{B(t,w):t\in\mathbb{R},\ w\in\Omega\}\in\mathscr{D}_r$. 对 P-a.e. $w\in\Omega$, $t\in\mathbb{R}$, 存在一个时间 $T=T(t,w,B)>0$, 当初值 $(u_{t-\tau},v_{t-\tau})\in B(t-\tau,\theta_{-t}w)$ 时, 对所有 $t\ge T$, 方程的解 $(u(\tau,\tau,w,u_{t-\tau}),v(\tau,\tau,w,v_{t-\tau}))=(u_{t-\tau},v_{t-\tau})$ 满足

$$\|u(\tau,t-\tau,\theta_{-t}w,u_{t-\tau})\|^2_{H^s(\mathbb{R})}+\|v(\tau,t-\tau,\theta_{-t}w,v_{t-\tau})\|^2\le r_1(t,w)$$

和

$$\mathrm{e}^{-\sigma t}\int_{t-\tau}^{t}\mathrm{e}^{\sigma\xi}(\|v(\xi,t-\tau,\theta_{-t}w,v_{t-\tau})\|^2+\|u(\xi,t-\tau,\theta_{-t}w,u_{t-\tau})\|_{H^s})d\xi\le r_1(t,w),$$

其中

$$\begin{aligned}r(t,w)&=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\sigma\xi}(|w(\xi)|^2+|w(\xi)|^{r+1})d\xi,\\ r_1(t,w)&=c(1+r(t,w))+c\mathrm{e}^{-\sigma t}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{\sigma\xi}\|g(\cdot,\xi)\|^2d\xi.\end{aligned}$$

证明 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中, 将方程 (3.1) 两边与 v 作内积, 得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2&=(\alpha\delta-\lambda-\delta^2)\langle u,v\rangle-\langle(-\Delta)^s u,v\rangle+(\delta-\alpha)\langle v,v\rangle\\&\quad+\langle g,v\rangle-\langle f(x,u),v\rangle+(\delta-\alpha)\langle h,v\rangle w(t).\end{aligned} \tag{4.2}$$

由 $v=\frac{du}{dt}+\delta u-hw(t)$, 可得

$$-\langle(-\Delta)^s u,v\rangle=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Lambda u\|^2-\delta\|\Lambda u\|^2+\langle\Lambda h,\Lambda u\rangle w(t), \tag{4.3}$$

同理, 方程可变为

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\bigg(\|v\|^2+(\lambda+\delta^2-\alpha\delta)\|u\|^2+\|\Lambda u\|^2+2\int_{\mathbb{R}^n}F(x,u)dx\bigg)\\
&\quad+2(\alpha-\delta)\|v\|^2+2\delta(\lambda+\delta^2-\alpha\delta)\|u\|^2+2\delta\|\Lambda u\|^2+2\delta\left\langle f(x,u),u\right\rangle\\
&=2(\lambda+\delta^2-\alpha\delta)\left\langle h,u\right\rangle w(t)+2\left\langle \Lambda u,\Lambda h\right\rangle w(t)+2\left\langle f(x,u),h\right\rangle w(t)\\
&\quad+2\left\langle g,v\right\rangle+2(\delta-\alpha)\left\langle h,v\right\rangle w(t). \qquad (4.4)
\end{aligned}
$$

现在将对 (4.4) 式右边的每一项进行估计.

由 Cauchy–Schwarz 不等式可得

$$
2(\lambda+\delta^2-\alpha\delta)\left\langle h,u\right\rangle w(t)\le(\lambda+\delta^2-\alpha\delta)\|u\|^2+c\|h\|^2|w(t)|^2, \qquad (4.5)
$$

$$
2\left\langle \Lambda u,\Lambda h\right\rangle w(t)\le\delta\|\Lambda u\|^2+c\|\Lambda h\|^2|w(t)|^2. \qquad (4.6)
$$

由 (3.2), (3.4) 可得

$$
\begin{aligned}
2\left\langle f(x,u),h\right\rangle w(t)&\le 2\|\phi_1\|\,\|h\||w(t)|+c\bigg(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{r+1}\bigg)^{\frac{r}{r+1}}\|h\|_{r+1}|w(t)|\\
&\le 2\|\phi_1\|\,\|h\||w(t)|+c\bigg(\int_{\mathbb{R}^n}(F(x,u)+\phi_3)\bigg)^{\frac{r}{r+1}}\|h\|_{r+1}|w(t)|\\
&\le 2\|\phi_1\|\,\|h\||w(t)|+\delta c_2\int_{\mathbb{R}^n}F(x,u)dx+\delta c_2\int_{\mathbb{R}^n}\phi_3(x)dx\\
&\quad+c\|h\|_{H^s}^{r+1}|w(t)|^{r+1}. \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

同理, 利用 Young 不等式和 Hölder 不等式对 (4.4) 式右边的最后两项进行估计, 可得

$$
2\left\langle g,v\right\rangle+2(\delta-\alpha)\left\langle h,v\right\rangle w(t)\le(\alpha-\delta)\|v\|^2+\frac{1}{2(\alpha-\delta)}\|h\|^2|w(t)|^2+\frac{1}{2(\alpha-\delta)}\|g\|^2. \qquad (4.8)
$$

由 (3.3) 有

$$
2\delta\left\langle f(x,u),u\right\rangle\ge 2\delta\bigg(c_2\int_{\mathbb{R}^n}F(x,u)dx+\int_{\mathbb{R}^n}\phi_2(x)dx\bigg). \qquad (4.9)
$$

由 (4.5)–(4.9), 可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\|v\|^2+\bigg(\lambda+\delta^2-\alpha\delta)\|u\|^2+\|\Lambda u\|^2+2\int_{\mathbb{R}^n}F(x,u)dx\bigg)+(\alpha-\delta)\|v\|^2\\
&\quad+\delta(\lambda+\delta^2-\alpha\delta)\|u\|^2+\delta\|\Lambda u\|^2+\delta c_2\int_{\mathbb{R}^n}F(x,u)dx\\
&\le c(1+|w(t)|^2+|w(t)|^{r+1})+\frac{1}{2(\alpha-\delta)}\|g\|^2. \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

由 (4.1) 知

$$
\delta c_2\int_{\mathbb{R}^n}F(x,u)dx\ge 2\sigma\int_{\mathbb{R}^n}F(x,u)dx+(2\sigma-\delta c_2)\int_{\mathbb{R}^n}\phi_3(x)dx. \qquad (4.11)
$$

因此, 由 (4.11) 有

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\bigg(\|v\|^2+(\lambda+\delta^2-\alpha\delta)\|u\|^2+\|\Lambda u\|^2+2\int_{\mathbb{R}^n}F(x,u)dx\bigg)\\
&\quad+\sigma\bigg(\|v\|^2+(\lambda+\delta^2-\alpha\delta)\|u\|^2+\|\Lambda u\|^2+2\int_{\mathbb{R}^n}F(x,u)dx\bigg)\\
&\le c(1+|w(t)|^2+|w(t)|^{r+1})+\frac{1}{2(\alpha-\delta)}\|g\|^2. \qquad (4.12)
\end{aligned}
$$

利用 Gronwall 不等式在 $[t-\tau,t]$ 上积分, 并用 $\theta_{-t}w$ 来替换 w, 可得

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{\sigma t}\left(\|v\|^2+(\lambda+\delta^2-\alpha\delta)\|u\|^2+\|\Lambda u\|^2+2\int_{\mathbb{R}^n}F(x,u)dx\right)\\
&\quad+\sigma\int_{t-\tau}^{t}\mathrm{e}^{\sigma\xi}(\|v\|^2+(\lambda+\delta^2-\alpha\delta)\|u\|^2+\|\Lambda u\|^2)d\xi\\
&\quad\le \mathrm{e}^{\sigma(t-\tau)}\left(\|v_{t-\tau}\|^2+(\lambda+\delta^2-\alpha\delta)\|u_{t-\tau}\|^2+\|\Lambda u_{t-\tau}\|^2+2\int_{\mathbb{R}^n}F(x,u_{t-\tau})dx\right)\\
&\quad+\frac{1}{2(\alpha-\delta)}\int_{t-\tau}^{t}\mathrm{e}^{\sigma\xi}\|g(\cdot,\xi)\|^2d\xi+c\int_{t-\tau}^{t}\mathrm{e}^{\sigma\xi}(1+|w(\xi)|^2+|w(\xi)|^{r+1})d\xi,
\end{aligned}\tag{4.13}$$

且

$$\begin{aligned}
&\|v(\tau,t-\tau,\theta_{-t}w,v_{t-\tau})\|^2+(\lambda+\delta^2-\alpha\delta)\|u(\tau,t-\tau,\theta_{-t}w,u_{t-\tau})\|^2+\|\Lambda u(\tau,t-\tau,\theta_{-t}w,v_{t-\tau})\|^2\\
&\quad+2\int_{\mathbb{R}^n}F(x,u)dx+\sigma\int_{t-\tau}^{t}\mathrm{e}^{\sigma(\xi-t)}(\|v(\xi,t-\tau,\theta_{-t}w,v_{t-\tau})\|^2\\
&\quad+(\lambda+\delta^2-\alpha\delta)\|u(\xi,t-\tau,\theta_{-t}w,u_{t-\tau})\|^2+\|\Lambda u(\xi,t-\tau,\theta_{-t}w,u_{t-\tau})\|^2)d\xi\\
&\le c\mathrm{e}^{-\sigma\tau}\left(\|v_{t-\tau}\|^2+(\lambda+\delta^2-\alpha\delta)\|u_{t-\tau}\|^2+\|\Lambda u_{t-\tau}\|^2+2\int_{\mathbb{R}^n}F(x,u_{t-\tau})dx\right)\\
&\quad+\frac{1}{2(\alpha-\delta)}\mathrm{e}^{-\sigma t}\int_{t-\tau}^{t}\mathrm{e}^{\sigma\xi}\|g(\cdot,\xi)\|^2d\xi\\
&\quad+\mathrm{e}^{-\sigma t}\int_{t-\tau}^{t}[c\mathrm{e}^{\sigma\xi}(1+|\theta_{-t}w(\xi)|^2+|\theta_{-t}w(\xi)|^{r+1})]d\xi.
\end{aligned}\tag{4.14}$$

由 (3.6) 可知

$$\int_{\mathbb{R}^n}F(x,u_{t-\tau})dx\le c(1+\|u_{t-\tau}\|^2+\|u_{t-\tau}\|^{r+1}).$$

因为 $(u_{t-\tau},v_{t-\tau})\in B(t-\tau,\theta_{-t}w)$, 可知当 $\tau\to\infty$ 时,

$$\begin{aligned}
&c\mathrm{e}^{-\sigma\tau}\left(\|v_{t-\tau}\|^2+\|u_{t-\tau}\|^2+\|\Lambda u_{t-\tau}\|^2+2\int_{\mathbb{R}^n}F(x,u_{t-\tau})dx\right)\\
&\quad\le c\mathrm{e}^{-\sigma\tau}(1+\|v_{t-\tau}\|^2+\|u_{t-\tau}\|_{H^s}^2+\|u_{t-\tau}\|_{H^s}^{r+1})\to 0.
\end{aligned}\tag{4.15}$$

因此, 存在时间 $T=T(t,w,B)>0$ 满足对任意 $t\ge T$,

$$c\mathrm{e}^{-\sigma\xi}(1+\|v_{t-\tau}\|^2+\|u_{t-\tau}\|_{H^s}^2+\|u_{t-\tau}\|_{H^s}^{r+1})\le 1,\tag{4.16}$$

且易知

$$c\mathrm{e}^{-\sigma t}\int_{t-\tau}^{t}\mathrm{e}^{\sigma\xi}(1+|\theta_{-t}w(\xi)|^2+|\theta_{-t}w(\xi)|^{r+1})d\xi\le\frac{c}{\sigma}\mathrm{e}^{-\sigma\tau}+r(t,w)\to 0\quad(\tau\to\infty).\tag{4.17}$$

由 (3.4) 可知对任意 $t\ge 0$,

$$-2\int_{\mathbb{R}^n}F(x,u)dx\le 2\int_{\mathbb{R}^n}\phi_3(x)dx.\tag{4.18}$$

注意到, 当 $|\xi|\to\infty$ 时, $w(\xi)$ 至多多项式增长, 则 $r(t,w)$ 有界. 又由 (4.14), (4.16), 可得到

$$\begin{aligned}
&\|v(\tau,t-\tau,\theta_{-t}w,v_{t-\tau})\|^2+\|u(\tau,t-\tau,\theta_{-t}w,u_{t-\tau})\|^2+\|\Lambda u(\tau,t-\tau,\theta_{-t}w,v_{t-\tau})\|^2\\
&\quad+\mathrm{e}^{-\sigma t}\int_{t-\tau}^{t}\mathrm{e}^{\sigma\xi}(\|v(\xi,t-\tau,\theta_{-t}w,v_{t-\tau})\|^2+\|u(\xi,t-\tau,\theta_{-t}w,u_{t-\tau})\|^2\\
&\quad+\|\Lambda u(\xi,t-\tau,\theta_{-t}w,u_{t-\tau})\|^2)d\xi\\
&\le r_1(t,w),
\end{aligned}\tag{4.19}$$

则由 (4.14)–(4.19), 可以立刻得到引理 4.1 的结论, 证毕.

接下来, 将对当 x 和 t 趋近于无穷时方程的解进行一致估计. 令 $k \geq 1$, 记 $Q_k = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq k\}$, 且 $\mathbb{R}^n \setminus Q_k$ 是 Q_k 的补集.

引理 4.2 设 $h(x) \in H^s(\mathbb{R}^n)$, (3.2)–(3.5) 成立且 $B = \{B(t,w) : t \in \mathbb{R}, w \in \Omega\} \in \mathscr{D}_r$, 则对任意 $\epsilon > 0$, P-a.e. $w \in \Omega$, 存在时间 $T = T(t,w,B) > 0$ 且 $k_0 = k_0(w,\epsilon)$, 当初值 $(u_{t-\tau}, v_{t-\tau}) \in B(t-\tau, \theta_{-t}w)$ 时, 对所有 $\tau \geq T$, 方程的解 $(u(t,\tau,w,u_{t-\tau}), v(t,\tau,w,v_{t-\tau}))$ 满足

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_k} (|u(\xi,t-\tau,\theta_{-t}w,u_{t-\tau})|^2 + |\Lambda u(\xi,t-\tau,\theta_{-t}w,u_{t-\tau})|^2 + |v(\xi,t-\tau,\theta_{-t}w,v_{t-\tau})|^2)dx$$
$$< r_1(t,w).$$

证明 首先定义一个光滑函数 $\rho : \mathbb{R} \to [0,1]$, 使得

$$\rho(s) = \begin{cases} 1, & \text{若} \ |s| \leq 1, \\ 0, & \text{若} \ |s| \geq 2, \end{cases} \tag{4.20}$$

并假设存在一个正常数 c, 使得对 $\forall\, s \in \mathbb{R}$ 有 $|\rho'(s)| \leq c$.

在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中, 将方程 (3.8) 与 $\rho(\frac{|x|^2}{k^2})v$ 作内积, 可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} \rho\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)|v|^2dx = {}& (\alpha\delta - \lambda - \delta^2)\int_{\mathbb{R}^n} \rho\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)uvdx - \int_{\mathbb{R}^n} \rho\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)v(-\Delta)^s udx \\ & + (\delta - \alpha)\int_{\mathbb{R}^n} \rho\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)|v|^2dx - \int_{\mathbb{R}^n} \rho\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)f(x,u)vdx \\ & + \int_{\mathbb{R}^n} \rho\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)(gv + (\delta-\alpha)hvw(t))dx. \end{aligned}\tag{4.21}$$

由 (3.7) 可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \rho\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)uvdx = {}& \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} \rho\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)|u|^2dx + \delta\int_{\mathbb{R}^n} \rho\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)|u|^2dx \\ & - \int_{\mathbb{R}^n} \rho\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)uhw(t)dx. \end{aligned}\tag{4.22}$$

因为

$$F(x,u) = \int_0^u f(x,s)ds,$$

结合 (3.7) 可知

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \rho\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)f(x,u)vdx = {}& \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} \rho\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)F(x,u)dx + \delta\int_{\mathbb{R}^n} \rho\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)f(x,u)udx \\ & - \int_{\mathbb{R}^n} \rho\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)f(x,u)hw(t)dx. \end{aligned}\tag{4.23}$$

由格林公式, 结合 (3.7) 可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \rho\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)v(-\Delta)^s udx = {}& \int_{\mathbb{R}^n} \Lambda u\frac{2x}{k^2}\rho'\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)vdx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} \rho\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)|\Lambda u|^2dx \\ & + \delta\int_{\mathbb{R}^n} \rho\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)|\Lambda u|^2dx - \int_{\mathbb{R}^n} \rho\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)\Lambda u\Lambda hw(t)dx. \end{aligned}\tag{4.24}$$

则由 (4.18)–(4.20),

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n}\rho\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)(|v|^2+(\lambda+\delta^2-\alpha\delta)|u|^2+|\Lambda u|^2+2F(x,u))dx\\&\quad+2\int_{\mathbb{R}^n}\rho\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)((\alpha-\delta)|v|^2+\delta(\lambda+\delta^2-\alpha\delta)|u|^2+\delta|\Lambda u|^2+\delta f(x,u)u)dx\\&=2(\lambda+\delta^2-\alpha\delta)\int_{\mathbb{R}^n}\rho\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)huw(t)dx-4\int_{\mathbb{R}^n}\rho'\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)v\Lambda u\frac{x}{k^2}dx\\&\quad+2\int_{\mathbb{R}^n}\rho\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)f(x,u)hw(t)dx+2\int_{\mathbb{R}^n}\rho\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)\Lambda u\Lambda hw(t)dx\\&\quad+2\int_{\mathbb{R}^n}\rho\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)(gv+(\delta-\alpha)vhw(t))dx.\end{aligned}\tag{4.25}$$

由 ρ 的性质, 可得

$$\int_{\mathbb{R}^n}\rho\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)\rho'\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)v\Lambda u\frac{x}{k^2}dx\le\int_{k\le|x|\le\sqrt{2}k}|\rho'|\,|v|\,|\Lambda u|\frac{|x|}{k^2}dx\le\frac{c}{k}(\|\Lambda u\|^2+\|v\|^2).\tag{4.26}$$

由引理 4.1 中类似的估计可知

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n}\rho\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)(|v|^2+(\lambda+\delta^2-\alpha\delta)|u|^2+|\Lambda u|^2+2F(x,u))dx\\&\quad+\int_{\mathbb{R}^n}\rho\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)((\alpha-\delta)|v|^2+\delta(\lambda+\delta^2-\alpha\delta)|u|^2+\delta|\Lambda u|^2+\delta c_2F(x,u))dx\\&\le\frac{c}{k}(\|\Lambda u\|^2+\|v\|^2)+c|w(t)|^2\int_{\mathbb{R}^n}\rho\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)(|h|^2+|\Lambda h|^2)dx\\&\quad+c\int_{\mathbb{R}^n}\rho\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)(|\phi_1|^2+|\phi_2|+|\phi_3|+|g|^2+|w(t)|^{r+1}|h|^{r+1})dx.\end{aligned}\tag{4.27}$$

因为 $\phi_1,\phi_2,\phi_3\in L^1(\mathbb{R}^n)$, $h\in H^s(\mathbb{R}^n)$, $|x|\le k$ 时, $\rho(\frac{|x|^2}{k^2})=0$, 所以存在 $k_1=k_1(\epsilon)\ge1$, 使得对所有 $k\ge k_1$, (4.23) 式右边的最后两项可被 $c\epsilon(1+|w(t)|^2+|w(t)|^{r+1})$ 控制住. 又因为 $g\in L^2_{\rm loc}(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^n))$, 可得

$$c\int_{\mathbb{R}^n}\rho\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)g^2(x,t)dx\le c\int_{|x|\ge k}g^2(x,t)dx.$$

因此, 对所有 $k\ge k_1$,

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n}\rho\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)(|v|^2+(\lambda+\delta^2-\alpha\delta)|u|^2+|\Lambda u|^2+2F(x,u))dx\\&\quad+\sigma\int_{\mathbb{R}^n}\rho\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)(|v|^2+(\lambda+\delta^2-\alpha\delta)|u|^2+|\Lambda u|^2+2F(x,u))dx\\&\le\frac{c}{k}(\|\Lambda u\|^2+\|v\|^2)+c\epsilon(1+|w(t)|^2+|w(t)|^{r+1})+c\int_{|x|\ge k}g^2(x,t)dx.\end{aligned}\tag{4.28}$$

由 Gronwall 不等式, 可得

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n}\rho\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)(|v(t,t-\tau,\theta_{-t}w,v_{t-\tau})|^2+(\lambda+\delta^2-\alpha\delta)|u(t,t-\tau,\theta_{-t}w,u_{t-\tau})|^2\\&\quad+|\Lambda u(t,t-\tau,\theta_{-t}w,u_{t-\tau})|^2+2F(x,u))dx\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \mathrm{e}^{-\sigma\tau}\int_{\mathbb{R}^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)(|v_{t-\tau}|^2+(\lambda+\delta^2-\alpha\delta)|u_{t-\tau}|^2+|\Lambda u_{t-\tau}|^2+2F(x,u_{t-\tau}))dx\\
&\quad+\frac{c}{k}\int_{t-\tau}^{t}\mathrm{e}^{\sigma(\xi-t)}(\|\Lambda u(\xi,t-\tau,\theta_{-t}w,u_{t-\tau})\|^2+\|v(\xi,t-\tau,\theta_{-t}w,u_{t-\tau})\|^2)d\xi\\
&\quad+c\epsilon\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\sigma\xi}(|w(\xi)|^2+|w(\xi)|^{r+1})d\xi+c\mathrm{e}^{-\sigma t}\int_{-\infty}^{t}\int_{|x|\geq k}\mathrm{e}^{\sigma\xi}g^2(x,t)dxd\xi+c\epsilon.
\end{aligned}\tag{4.29}
$$

由 (3.13), (3.14), 存在 $k_2=k_2\ (t,\epsilon\geq k)$, 满足对所有 $k\geq k_2$,

$$
c\mathrm{e}^{-\sigma t}\int_{-\infty}^{t}\int_{|x|\geq k}\mathrm{e}^{\sigma\xi}g^2(x,t)dxd\xi\leq\epsilon.\tag{4.30}
$$

又因为 $(u_{t-\tau},v_{t-\tau})\in B(t-\tau,\theta_{-t},w)$, 当 $\tau\to\infty$ 时, (4.29) 右边第一项 $\to 0$. 且由引理 4.1, (4.29) 右边第二项小于等于 $\frac{c}{k}r_1(t,w)$. 因此, 存在时间 $T_1=T_1(t,w,B)>0$ 满足对任意 $\tau\geq T$ 和 $k\geq k_2$,

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)(|v(t,t-\tau,\theta_{-t}w,v_{t-\tau})|^2+(\lambda+\delta^2-\alpha\delta)|u(t,t-\tau,\theta_{-t}w,u_{t-\tau})|^2\\
&\quad+|\Lambda u(t,t-\tau,\theta_{-t}w,u_{t-\tau})|^2+2F(x,u))dx\leq\epsilon r_1(t,w),
\end{aligned}\tag{4.31}
$$

证毕.

令 $\zeta=1-\rho$, 并对给定 $k\geq 1$, 令

$$
\tilde{u}(x,t,\tau,w)=\zeta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)u(x,t,\tau,w),\quad \tilde{v}(x,t,\tau,w)=\zeta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)v(x,t,\tau,w).\tag{4.32}
$$

那么 $(\tilde{u},\tilde{v})\in H_0^s(Q_{2k})\times L^2(Q_{2k})$. (3.7) 和 (3.8) 式同时乘上 ζ, 可得

$$
\tilde{u_t}+\delta\tilde{u}-\tilde{v}=\zeta hw(t).\tag{4.33}
$$

$$
\begin{aligned}
&\tilde{v_t}+(\alpha-\delta)\tilde{v}+(\lambda+\delta^2-\alpha\delta)\tilde{u}+(-\Delta)^s\tilde{u}+\zeta f(x,u)\\
&\quad=\zeta g+(\delta-\alpha)\zeta hw(t)+u(-\Delta)^s\zeta-2\Lambda\zeta\Lambda u.
\end{aligned}\tag{4.34}
$$

考虑 Q_{2k} 中的特征值问题

$$
(-\Delta)^s\tilde{u}=\lambda\tilde{u},\quad \tilde{u}|_{\partial Q_{2k}}=0.
$$

存在一列特征函数 $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ 和相应的特征值 $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$, 使得 $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ 在 $L^2(Q_{2k})$ 中是一组完备标准正交基, 当 $j\to\infty$ 时, $\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots\leq\lambda_j\to\infty$. 对给定的 n, 令 $X_n=\mathrm{span}\{e_1,\ldots,e_n\}$, 且 $P_n: L^2(Q_{2k})\to X_n$ 是正交投影.

引理 4.3 设 $h(x)\in H^s(\mathbb{R}^n)$, (3.2)–(3.5) 成立且 $B=\{B(t,w): t\in\mathbb{R},\ w\in\Omega\}\in\mathscr{D}_r$, 则对任意 $\epsilon>0$, P-a.e. $w\in\Omega$, $t\in\mathbb{R}$, 存在 $K=K(t,w,B)>0$, $T=T(t,w,B)>0$, $N=N(t,w,\epsilon)>0$, 满足当 $k\geq K$, $t\geq T$, $n\geq N$ 时,

$$
\|(I-P_n)\tilde{u}(\cdot,t,t-\tau,\theta_{-t}w)\|_{H_0^s(Q_{2k})}+\|(I-P_n)\tilde{v}(\cdot,t,t-\tau,\theta_{-t}w)\|_{L^2(Q_{2k})}\leq\epsilon.
$$

证明 令 $\tilde{u}_{n,1}=P_n\tilde{u}$, $\tilde{u}_{n,2}=\tilde{u}-\tilde{u}_{n,1}$, $\tilde{v}_{n,1}=P_n\tilde{v}$, $\tilde{v}_{n,2}=\tilde{v}-\tilde{v}_{n,1}$. 对式 (4.34) 两端作用 $I-P_n$, 可得

$$
\tilde{v}_{n,2}=\frac{d}{dt}\tilde{u}_{n,2}+\delta\tilde{u}_{n,2}-(I-P_n)(\zeta hw(t)).\tag{4.35}
$$

同样地, 对式 (4.35) 两端作用 $I-P_n$, 并与 $\tilde{v}_{n,2}$ 在 $L^2(Q_{2k})$ 中作内积, 可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\tilde{v}_{n,2}\|^2=(\alpha\delta-\lambda-\delta^2)\left\langle\tilde{v}_{n,2},\tilde{u}_{n,2}\right\rangle-\left\langle(-\Delta)^s\tilde{u},\tilde{v}_{n,2}\right\rangle+(\delta-\alpha)\|\tilde{v}_{n,2}\|^2 -\left\langle\zeta f(x,u),\tilde{v}_{n,2}\right\rangle+\left\langle\zeta g+(\delta-\alpha)\zeta hw(t)+u(-\Delta)^s\zeta-2\Lambda\zeta\Lambda u,\tilde{v}_{n,2}\right\rangle. \tag{4.36}$$

由 (4.36), (4.37), 可得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(\|\tilde{v}_{n,2}\|^2+(\lambda+\delta^2-\alpha\delta)\|\tilde{u}_{n,2}\|^2+\|\Lambda\tilde{u}_{n,2}\|^2+2\left\langle\zeta f(x,u),\tilde{u}_{n,2}\right\rangle)\\&\quad+2(\alpha-\delta)\|\tilde{v}_{n,2}\|^2+2\delta(\lambda+\delta^2-\alpha\delta)\|\tilde{u}_{n,2}\|^2+2\delta\|\Lambda\tilde{u}_{n,2}\|^2+2\delta\left\langle\zeta f(x,u),\tilde{u}_{n,2}\right\rangle\\&=2\left\langle\zeta f_u(x,u)u_t,\tilde{u}_{n,2}\right\rangle+2\left\langle\zeta f(x,u),(I-P_n)(\zeta hw)\right\rangle+2(\lambda+\delta^2-\alpha\delta)\left\langle\zeta hw,\tilde{u}_{n,2}\right\rangle\\&\quad+2\left\langle\Lambda\tilde{u}_{n,2},\Lambda(\zeta hw)\right\rangle+2\left\langle\zeta g+(\delta-\alpha)\zeta hw+u\Lambda\zeta-2\Lambda\zeta\Lambda u,\tilde{v}_{n,2}\right\rangle.\end{aligned}\tag{4.37}$$

接下来, 对式 (4.38) 右端的每一项进行估计. 对于非线性项由 (3.5) 可得

$$\begin{aligned}|2\left\langle\zeta f_u(x,u)u_t,\tilde{u}_{n,2}\right\rangle|&\le c\|\phi_4\|_6\|u_t\|\,\|\tilde{u}_{n,2}\|_3+c\|u_t\|\,\|u\|_6^{r-1}\|\tilde{u}_{n,2}\|_{\frac{6}{4-r}}\\&\le\frac{1}{4}\delta\|\Lambda\tilde{u}_{n,2}\|^2+c\lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}}\|u_t\|^2+c\lambda_{n+1}^{\frac{r-3}{2}}\|u_t\|^2\|u\|_{H^s}^{2r-2}.\end{aligned}\tag{4.38}$$

由 (3.3) 可知

$$|2\left\langle\zeta f(x,u),(I-P_n)(\zeta hw)\right\rangle|\le c\|(I-P_n)(\zeta hw)\|+c\|u\|_{H^s}^r\|(I-P_n)(\zeta hw)\|.\tag{4.39}$$

利用 Young 不等式和 Hölder 不等式, 可得

$$2(\lambda+\delta^2-\alpha\delta)\left\langle\zeta hw,\tilde{u}_{n,2}\right\rangle\le\frac{\delta(\lambda+\delta^2-\alpha\delta)}{2}\|\tilde{u}_{n,2}\|^2+\frac{2}{\delta}\|h\|^2|w|^2,\tag{4.40}$$

$$2\left\langle\Lambda\tilde{u}_{n,2},\Lambda(\zeta hw)\right\rangle\le\frac{\delta}{4}\|\Lambda\tilde{u}_{n,2}\|^2+\frac{2}{\delta}\|(I-P_n)\zeta\Lambda h\|^2|w(t)|^2,\tag{4.41}$$

$$\begin{aligned}&2\left\langle\zeta g+(\delta-\alpha)\zeta hw+u\Lambda\zeta-2\Lambda\zeta\Lambda u,\tilde{v}_{n,2}\right\rangle\\&\quad\le(\alpha-\delta)\|\tilde{v}_{n,2}\|^2+c\|(I-P_n)(\zeta hw)\|^2|w(t)|^2+\frac{c}{k^2}\|\Lambda u\|^2+\frac{c}{k^4}\|u\|^2,\end{aligned}\tag{4.42}$$

则由 (4.38)–(4.42) 可得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(\|\tilde{v}_{n,2}\|^2+(\lambda+\delta^2-\alpha\delta)\|\tilde{u}_{n,2}\|^2+\|\Lambda\tilde{u}_{n,2}\|^2+2\left\langle\zeta f(x,u),\tilde{u}_{n,2}\right\rangle)\\&\quad+2\sigma(\|\tilde{v}_{n,2}\|^2+(\lambda+\delta^2-\alpha\delta)\|\tilde{u}_{n,2}\|^2+\|\Lambda\tilde{u}_{n,2}\|^2+2\left\langle\zeta f(x,u),\tilde{u}_{n,2}\right\rangle)\\&\le c\|(I-P_n)(\zeta h)\|^2|w(t)|^2+\frac{c}{k^2}\|h\|^2|w|^2+c\|(I-P_n)(\zeta\Lambda h)\|^2|w(t)|^2+c\lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}}\|u_t\|^2\\&\quad+c\lambda_{n+1}^{\frac{r-1}{2}}\|u_t\|^2\|u\|_{H^s}^{2r-2}+c\|(I-P_n)(\zeta h)\||w(t)|+c\|(I-P_n)(\zeta h)\|\,\|u\|_{H^s}^r|w(t)|\\&\quad+c\lambda_{n+1}^{-1}(1+\|u\|_{H^s}^r)+c\|(I-P_n)g\|^2+\frac{c}{k^2}\|\Lambda u\|^2+\frac{c}{k^4}\|u\|^2.\end{aligned}\tag{4.43}$$

又因为 $1\le r<3$ 且 $\lambda_n\to\infty$, 所以存在 $N_1=N_1(\epsilon)$, $k_1=k_1(\epsilon)$, 当 $n\ge N_1$, $k\ge k_1$ 时,

$$\begin{aligned}&c\,\|(I-P_n)(\zeta h)\|^2|w(t)|^2+\frac{c}{k^2}\|h\|^2|w|^2+c\|(I-P_n)(\zeta\Lambda h)\|^2|w(t)|^2+c\lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}}\|u_t\|^2\\&\quad+c\lambda_{n+1}^{\frac{r-3}{2}}\|u_t\|^2\|u\|_{H^s}^{2r-2}+c\|(I-P_n)(\zeta h)\||w(t)|+c\|(I-P_n)(\zeta h)\|\,\|u\|_{H^s}^r|w(t)|\\&\quad+c\lambda_{n+1}^{-1}(1+\|u\|_{H^s}^r)+c\|(I-P_n)g\|^2+\frac{c}{k^2}\|\Lambda u\|^2+\frac{c}{k^4}\|u\|^2\\&\le c\epsilon+c\epsilon|w(t)|^2+c\epsilon\|u_t\|^2+c\epsilon\|u_t\|^2\|u\|_{H^s}^{2r-2}+c\epsilon\|u\|_{H^s}^{2r}+c\lambda_{n+1}^{-1}\|g\|^2\\&\le c\epsilon(1+|w(t)|^2+\|u_t\|^6+\|u\|_{H^s}^6)+c\lambda_{n+1}^{-1}\|g\|^2.\end{aligned}\tag{4.44}$$

结合 (4.38) 可得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(\|\tilde{v}_{n,2}\|^2+(\lambda+\delta^2-\alpha\delta)\|\tilde{u}_{n,2}\|^2+\|\Lambda\tilde{u}_{n,2}\|^2+2\langle\zeta f(x,u),\tilde{u}_{n,2}\rangle)\\&\quad+2\sigma(\|\tilde{v}_{n,2}\|^2+(\lambda+\delta^2-\alpha\delta)\|\tilde{u}_{n,2}\|^2+\|\Lambda\tilde{u}_{n,2}\|^2+2\langle\zeta f(x,u),\tilde{u}_{n,2}\rangle)\\&\le c\epsilon(1+|w(t)|^2+\|u_t\|^6+\|u\|_{H^s}^6)+c\|g\|^2.\end{aligned}\tag{4.45}$$

对上式运用 Gronwall 引理, 当 $n\ge N_1$, $k\ge k_1$ 时,

$$\begin{aligned}&\|\tilde{v}_{n,2}(t,t-\tau,\theta_{-t}w)\|^2+(\lambda+\delta^2-\alpha\delta)\|\tilde{u}_{n,2}(t,t-\tau,\theta_{-t}w)\|^2\\&\quad+\|\Lambda\tilde{u}_{n,2}(t,t-\tau,\theta_{-t}w)\|^2+2\langle\zeta f(x,u),\tilde{u}_{n,2}\rangle)\\&\le e^{-2\sigma\tau}(\|\tilde{v}_{n,2}(t-\tau)\|^2+(\lambda+\delta^2-\alpha\delta)\|\tilde{u}_{n,2}(t-\tau)\|^2+\|\Lambda\tilde{u}_{n,2}(t-\tau)\|^2+2\langle\zeta f(x,u),\tilde{u}_{n,2}(t-\tau)\rangle)\\&\quad+c\epsilon\int_{t-\tau}^t e^{2\sigma(\xi-t)}(1+|w(\xi)|^2+\|u_t(\xi,\tau,u_{t-\tau})\|^6+\|u(\xi,\tau,u_{t-\tau})\|_{H^s}^6)d\xi\\&\quad+c\epsilon\int_{t-\tau}^t e^{2\sigma(\xi-t)}|g(\cdot,\xi)|^2d\xi.\end{aligned}\tag{4.46}$$

又由 (3.7), $h\in H^s(\mathbb{R}^n)$ 以及引理 4.1, 可得

$$\begin{aligned}\|u(\xi,t-\tau,\theta_{-t}w,u_{t-\tau})\|^6&=\|v(\xi,t-\tau,\theta_{-t}w,v_{t-\tau})-\delta u(\xi,t-\tau,\theta_{-t}w,u_{t-\tau})+hw(\xi)\|^6\\&\le c(\|u(\xi,t-\tau,\theta_{-t}w,w)\|^6+\|v(\xi,t-\tau,\theta_{-t}w,w)\|^6+|w|^6)\\&\le ce^{-\sigma\xi}r^3(t,w)+c|w|^6,\end{aligned}\tag{4.47}$$

且

$$\|u(\xi,t-\tau,\theta_{-t}w,u_{t-\tau})\|_{H^s}^6\le ce^{-\sigma\xi}r^3(t,w).\tag{4.48}$$

因此有

$$\begin{aligned}&\|\tilde{v}_{n,2}(t,t-\tau,\theta_{-t}w)\|^2+(\lambda+\delta^2-\alpha\delta)\|\tilde{u}_{n,2}(t,t-\tau,\theta_{-t}w)\|^2\\&\quad+\|\Lambda\tilde{u}_{n,2}(t,t-\tau,\theta_{-t}w)\|^2+2\langle\zeta f(x,u),\tilde{u}_{n,2}\rangle\\&\le ce^{-2\sigma\tau}(1+\|v_{t-\tau}\|^2+(\lambda+\delta^2-\alpha\delta)\|u_{t-\tau}\|^2+\|u_{t-\tau}\|_{H^s}^2+\|u_{t-\tau}\|_{H^s}^{r+1})\\&\quad+c\epsilon r^3(w)+c\epsilon\int_{-\infty}^0 e^{2\sigma\xi}(1+|w(\xi)|^2+|w(\xi)|^6)d\xi+c\epsilon e^{-2\sigma t}\int_{-\infty}^0 e^{2\sigma\xi}|g(\cdot,\xi)|^2d\xi.\end{aligned}\tag{4.49}$$

又因为 $(u_{t-\tau},v_{t-\tau})\in B(t-\tau\theta_{-t})$, 则

$$ce^{-2\sigma\tau}(1+\|v_{t-\tau}\|^2+(\lambda+\delta^2-\alpha\delta)\|u_{t-\tau}\|^2+\|u_{t-\tau}\|_{H^s}^2+\|u_{t-\tau}\|_{H^s}^{r+1})\to0,\quad\tau\to\infty.\tag{4.50}$$

综合 (3.2), (4.50) 及引理 4.1, 可得到引理 4.3 结论, 证毕.

5 随机吸引子

由引理 4.1 可知, 对任意给定 $B=\{B(t,w):t\in\mathbb{R},\ w\in\Omega\}\in\mathscr{D}_r$, P-a.e. $w\in\Omega$, $t\in\mathbb{R}$, 存在 $T=T(t,w,B)>0$, 当 $t\ge T$ 时,

$$\begin{aligned}\|\Phi(t,\theta_{-t}w,(u_{t-\tau},z_{t-\tau}))\|_X^2&=\|u(t,t-\tau,\theta_{-t}w,u_{t-\tau})\|_{H^s}^2+\|z(t,t-\tau,\theta_{-t}w,z_{t-\tau})\|^2\\&\le r_1(t,w),\end{aligned}\tag{5.1}$$

这里 $r_1(w)$ 是引理 4.1 中的缓增函数. 注意到

$$z(t,t-\tau,\theta_{-t}w,z_{t-\tau})=v(t,t-\tau,\theta_{-t}w,v_{t-\tau})+hw(t).$$

随机集合

$$E(t,w)=\{(u,z)\in X:\|u\|_{H^s}^2+\|z\|^2\leq r_1(t,w)\}. \tag{5.2}$$

构成的集族 $E=\{E(t,w)\}_{w\in\Omega}$ 是 Φ 在 X 中的一个 $\mathscr{D}$- 拉回吸收集. 下面证明 Φ 在 X 中的拉回渐近紧性.

引理 5.1 设 $h(x)\in H^s(\mathbb{R}^n)$, (3.2)–(3.5) 式成立, cocycle Φ 在 X 中是 $\mathscr{D}$- 拉回渐近紧的, 即对任意 $B=\{B(t,w):t\in\mathbb{R},\ w\in\Omega\}\in\mathscr{D}_r$, P-a.e. $w\in\Omega$, $t_m\to\infty$, $(u_{0,m},z_{0,m})\in B(t_m,\theta_{-t_m}w)$, 随机列 $\{\Phi(t_m,t_m-\tau,\theta_{-t_m}w,(u_{0,m},z_{0,m}))\}$ 在 X 上存在收敛子列.

证明 由于 $t_m\to\infty$, 由引理 4.1 可得, 对 P-a.e. $w\in\Omega$, 存在 $M_1=M_1(B,w)>0$, 使得对 $\forall\, m\geq M_1$,

$$\|u(t_m,t_m-\tau,\theta_{-t_m}w,u_{m,0})\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2+\|v(t_m,t_m-\tau,\theta_{-t_m}w,v_{m,0})\|^2\leq r_1(t,w), \tag{5.3}$$

且对 $\forall\,\epsilon>0$, 由引理 4.2 存在

$$M_2=M_2(B,w,\epsilon)>0,\quad k_0=k_0(w,\epsilon)>0,$$

使得对 $\forall\, m\geq M_2$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n\setminus Q_k}&(|u(t_m,t_m-\tau,\theta_{-t_m}w,u_{m,0})|^2+|\Lambda u(t_m,t_m-\tau,\theta_{-t_m}w,u_{m,0})|^2\\&+|v(t_m,t_m-\tau,\theta_{-t_m}w,v_{m,0})|^2)dx<\epsilon.\end{aligned} \tag{5.4}$$

由 (4.32) 和引理 4.3 可知存在

$$k_1=k_1(w,\epsilon)\geq k_0,\quad M_3=M_3(B,w,\epsilon),\quad N=N(w,\epsilon),$$

使得对 $\forall\, m\geq M_3$,

$$\|(I-P_N)\tilde{u}(t_m,t_m-\tau,\theta_{-t_m}w,u_0)\|_{H^s(Q_{2k_1})}+\|(I-P_N)\tilde{v}(t_m,t_m-\tau,\theta_{-t_m}w,v_0)\|_{L^2(Q_{2k_1})}\leq\epsilon. \tag{5.5}$$

由 (5.3) 和 (4.32) 式可知 $\{P_N(\tilde{u}(t_m,t_m-\tau,\theta_{-t_m}w,u_0),\tilde{v}(t_m,t_m-\tau,\theta_{-t_m}w,v_0))\}$ 在有限维空 $P_N(H^s(Q_{2k_1})\times L^2(Q_{2k_1}))$ 上有界, 再由 (5.5) 式可得

$\{\tilde{u}(t_m,t_m-\tau,\theta_{-t_m}w,u_0),\tilde{v}(t_m,t_m-\tau,\theta_{-t_m}w,v_0)\}$ 在 $H^s(Q_{2k_1})\times L^2(Q_{2k_1})$ 上是预紧的.

因为对 $|x|^2\leq k_1$,

$$\zeta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)=1,$$

由 (5.4) 可知 $\{u(t_m,t_m-\tau,\theta_{-t_m}w,u_0),v(t_m,t_m-\tau,\theta_{-t_m}w,v_0)\}$ 在 $H^s(Q_{2k_1})\times L^2(Q_{2k_1})$ 中是预紧的, 结合 (5.3) 式可得随机列 $\{\Phi(t_m,t_m-\tau,\theta_{-t_m}w,(u_{0,m},z_{0,m}))\}$ 在 X 上存在收敛子列. 证毕.

最后给出随机动力系统 $\mathscr{D}$- 拉回吸引子的存在性.

定理 5.2 设 $h(x)\in H^s(\mathbb{R}^n)$, (3.2)–(3.5) 成立. 方程 (3.7)–(3.9) 确定的随机动力系统 Φ 在 X 上存在唯一的 $\mathscr{D}$- 拉回吸引子 $\{\mathscr{A}(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$.

证明 根据 (5.2) 式, 引理 5.1 和命题 2.11 可证.

致谢 衷心感谢审稿专家给出的有益建议.

参 考 文 献

[1] Arnold L., Random Dynamical Systems, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[2] Caraballo T., Kloedem P., Real J., Pullback and forward attractors for a damped wave equation with delays, *Stoch. Dyn.*, 2004, **4**: 405–423.

[3] Crauel H., Flandoli F., Att ractors for random dynamical systems, *Probability Theory and Related Fields*, 1994, **100**: 365–393.

[4] Crauel H., Debussche A., Flandoli F., Random attractors, *J. Dynam. Differential Equations*, 1997, **9**: 307–341.

[5] Dong J., Xu M., Space-time fractional Schrödinger equation with time-indpendent potential, *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, **344**: 1005–1017.

[6] Flandoli F., Schmalfuss B., Random attractors for the 3D stochastic navier-stokes equation with multiplicative white noise, *Stochastics and Stochastics Reports*, 1996, **59**: 21–45.

[7] Garroni A., Muller S., A variational model for dislocations in the line tension limit, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 2006, **181**: 535–578.

[8] Guan Q., Ma Z., Boundary problems for fractional Laplacians, *Stochastics and Dynamics*, 2005, **5**: 385–424.

[9] Guan Q., Integration by parts formula for regional fractional laplacian, *Communications in Mathematical Physics*, 2006, **226**: 289–329.

[10] Guan Q., Ma Z., Reflected symmetric α-stable processes and regional fractional Laplacian, *Probability Theory and Related Fields*, 2006, **134**: 649–694.

[11] Guo B., Han Y., Xin J., Existence of the global smooth solution to the period boundary value problem of fractional nonlinear Schrödinger equation, *Appliled Mathematics and Computation*, 2008, **204**: 468–477.

[12] Guo B., Zeng M., Solutions for the fractional Landau–Lifshitz equation, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2010, **361**: 131–138.

[13] Guo B., Huo Z., Global well-posedness for the fractional nonlinear Schrödinger equation, *Commun. Partial Differential Equations*, 2011, **36**: 247–255.

[14] Han Y., Yu J., Wang H., Pullback attractor for stochastic wave equations with memory term on unbounded domains, *J. Dalian Nationalities University*, 2014, **16**: 49–55.

[15] Jara M., Nonequilibrium scaling limit for a tagged particle in the simple exclusion process with long jumps, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2009, **62**: 198–214.

[16] Kalantarov V., Savostianov A., Zelik S., Attractors for damped quintic wave equations in bounded domains, *Annales Henri Poincaré*, 2016, **17**: 2555–2584.

[17] Li H., You Y., Random attractor for stochastic wave equation with arbitrary exponent and additive noise on $\mathbb{R}^n$, *Dynamics of Partial Differential Equations*, 2015, **12**: 343–378.

[18] Lu H., Lü S. J., Feng Z., Asymptotic dynamics of 2D fractional complex Ginzburg–Landau equation, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2013, **23**: 135–202.

[19] Lu H., Lü S. J., Random attractor for fractional Ginzburg–Landau equation with multiplicative noise, *Taiwanese Journal of Mathematics*, 2014, **18**: 435–450.

[20] Lu H., Bates P. W., Lü S., Zhang M., Asymptotic behavior of stochastic fractional power dissipative equations on $\mathbb{R}^n$, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 2015, **128**: 176–198.

[21] Lu H., Bates P. W., Lü S., et al., Dynamics of the 3D fractional Ginzburg–Landau equation with multiplicative noise on an unbounded domain, *Commun. Math. Sci.*, 2016, **14**: 273–295.

[22] Lü S. J., Lu H., Feng Z., Stochastic dynamics of 2D fractional Ginzburg–Landau equation with multiplicative noise, *Discrete and Continuous Dynamical Systems–Series B*, 2015, **21**: 575–590.

[23] Pu X., Guo B., Global weak solutions of the fractional Landau–Lifshitz–Maxwell equation, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2010, **372**: 86–98.

[24] Samko S. G., Kibas A. A., Marichev O. I., Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications, Gordon and Breach Science, New York, 1987.

[25] Shu J., Li P., Liao O., et al., Random attractors for the stochastic coupled fractional Ginzburg–Landau equation with additive noise, *Journal of Mathematical Physics*, 2015, **56**: 1–11.

[26] Tarasov V. E., Zaslavsky G. M., Fractional Ginzburg-Landau equation for fractal media, *Physica: Section A*, 2005, **354**: 249–261.

[27] Temam R., Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, Springer, New York, 1998.

[28] Wang B., Asymptotic behavior of non-autonomous fractional stochastic reaction-diffusion equations, *Nonlinear Analysis*, 2017, **158**: 60–82.

[29] Wang B., Random attractors for wave equation on unbounded domains, *Discrete and Continuous Dynamical System,* 2009, **4**: 800–809.

[30] Wang B., Asymptotic behavior of stochastic wave equations with critical exponents on $\mathbb{R}^3$, *Transactions of the American Mathematical Society*, 2011, **363**: 3639–3663.

[31] Wang B., Sufficient and necessary criteria for existence of pullback attractors for non-compact random dynamical systems, *Journal of Differential Equations*, 2012, **253**: 1544–1583.

[32] Wang B., Periodic random attractors for stochastic Navier–Stokes equations on unbounded domains, *Electronic Journal of Differential Equations*, 2012, **59**: 18.

[33] Wang B., Random attractors for non-autonomous stochastic wave equations with multiplicative noise, *Discrete and Continuous Dynamical Systems A*, 2014, **34**: 269–300.

[34] Wang Z., Zhou S., Random attractor for stochastic reaction-diffusion equation with multiplicative noise on unbounded domains, *Journal of Mathmaticcal Analysis and Applications*, 2011, **25**: 160–172.

[35] Wang Z., Zhou S., Asymptotic behavior of stochastic strongly wave equation on unbounded domains, *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 2015, **3**: 338–357.

[36] Wang Z., Zhou S., Random attractor for stochastic non-autonomous damped wave equation with critical exponent, *Discrete and Continuous Dynamical System*, 2017, **37**: 545–573.

[37] Yin F., Liu L., D-pullback attractor for a non-autonomous wave equation with additive noise on unbounded domains, *Computers and Mathematics with Applications*, 2014, **68**: 424–438.

[38] Yin J., Li Y., Gu A., Backwards compact attractors and periodic attractors for non-autonomous damped wave equations on an unbounded domain, *Computers and Mathematics with Applications*, 2017, **74**: 744–758.

[39] Zhou S., Zhao M., Random attractors for damped non-autonomous wave equations with memory and white noise, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 2015, **120**: 202–226.

[40] Zhou S., Zhao M., Fractal dimension of random attractor for stochastic non-autonomous damped wave equation with linear multiplicative white noise, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2015, **36**: 2887–2914.