课程总论

- 《工程力学》既是自然科学又是诸多工程科学的基础，是人类认识自然界和从事科学技术工作必须具备的基本理论。
- 《工程力学》包含《理论力学》的静力分析和《材料力学》的大部分教学内容。
  - 物体受力分析方法、力系的简化和物体在力系作用下的平衡规律；
  - 杆件在静荷载作用下的强度、刚度和稳定性计算；
  - 杆件在动荷载作用下的强度计算。
- 刚体与变形固体模型

第一章 静力分析基础

第一章 静力分析基础

- **平衡**是机械运动的特殊情形。
- **力系：** 作用在物体上的两个或两个以上的力组成的系统。
- 静力分析研究物体在力系作用下的平衡规律：

  （1）物体受力的分析方法；

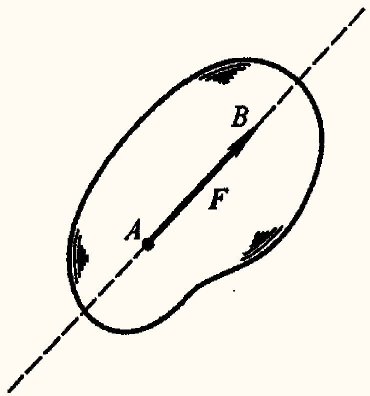
  （2）力系的简化；

  （3）力系的平衡条件及其工程应用。
- 静力分析中采用的物体模型是刚体。

§1-1　力及其性质

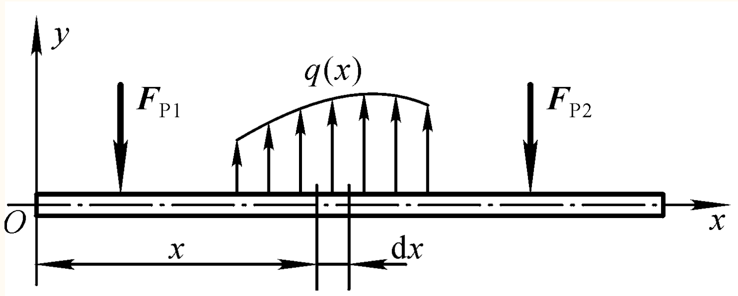
1-1-1　力的概念

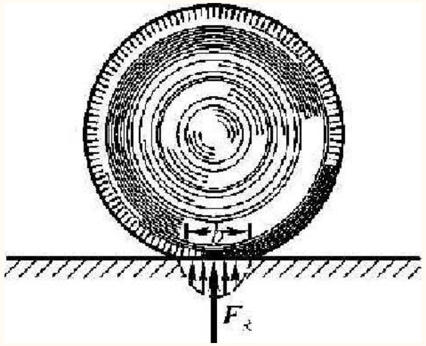
- 力是物体之间的机械作用。
- 力对物体的效应：**运动效应**，**变形效应**。
  - **运动效应**使物体的运动状态发生改变；
  - **变形效应**使物体的几何形状发生变化。
- 可以用一个矢量表示力的三要素（大小、方向和作用点）



1-1-1 力的概念

- 集中力与分布力





- 作用与反作用定律：

  —— 两物体间相互作用的力，总是大小相等、方向相反、沿同一直线分别作用在相互作用的两个物体上。

- 力的单位：

  “N”— 牛顿

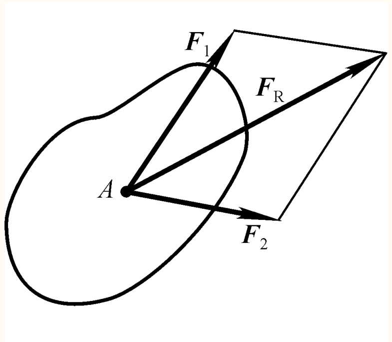
  “kN” —千牛［顿］

1-1-2 静力分析的基本定律

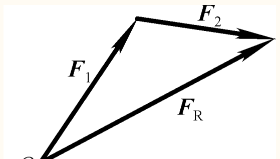
1. **力的平行四边形规则：**

——作用在物体上同一点的两个力，可以合成为一个合力，合力作用于该点，其大小和方向由这两个力为边构成的平行四边形的对角线。

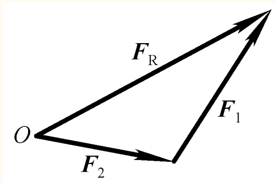
- **力的三角形规则：**



(a)



(b)



(c)

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_R$$

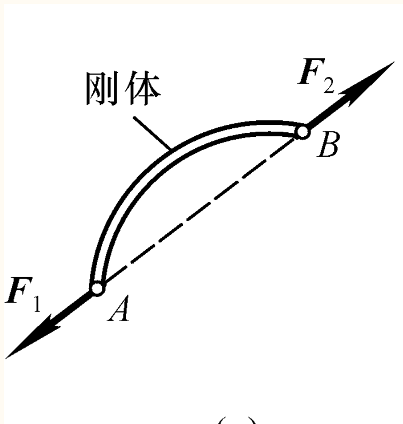
1-1-2 静力分析的基本定律（续）

2. 二力平衡条件：

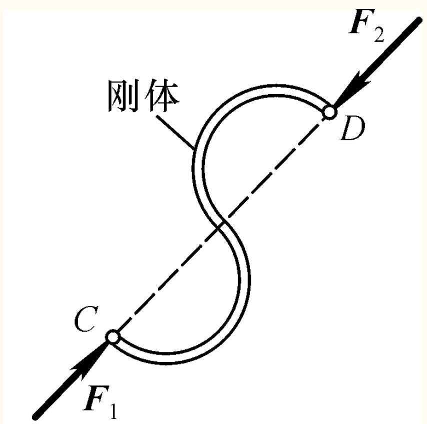
刚体在两个力作用下处于平衡的必要与充分条件是这两个力的大小相等，方向相反，且其作用线在同一直线上。

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \qquad (1\text{-}2)$$

- **二力构件**：只受两个力作用而处于平衡的构件。



(a)



(b)

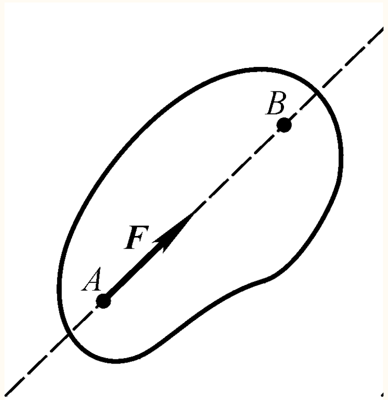
1-1-2 静力分析的基本定律（续）

3. **加减平衡力系原理**：在作用于刚体的力系中，增加或减去任意的平衡力系，不改变原力系对刚体的作用效应。

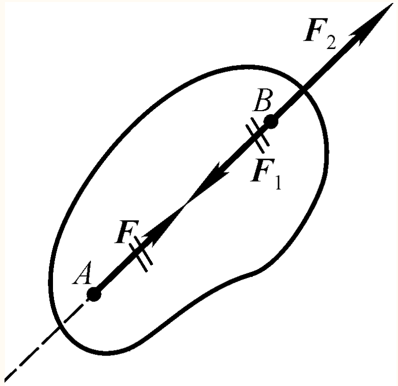
4. **刚化原理**：变形体在某一力系作用下处于平衡，当变形很小时，可以将此变形体刚化为刚体，其平衡状态保持不变。

1-1-2 静力分析的基本定律（续）

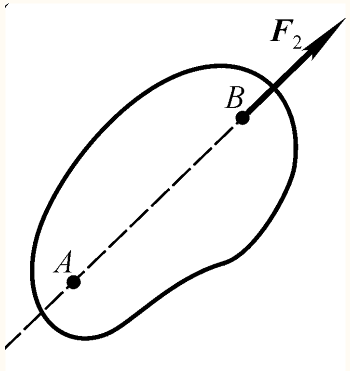
- **推论1** 作用于**刚体**某点的力，可以沿着它的作用线移到刚体内任意一点，而不改变该力对刚体的作用。（**力的可传性**）



(a)



(b)

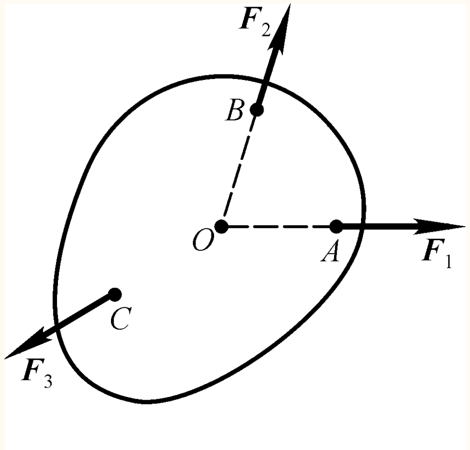


(c)

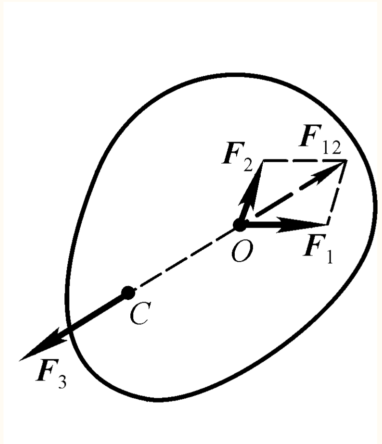
$$\vec{F}_2 = \vec{F} = -\vec{F}_1$$

1-1-2 静力分析的基本定律（续）

- **推论2　刚体**受到互不平行的三个力作用而处于平衡时，此三个力必共面且汇交于一点。**(三力平衡汇交定理)**



(a)



(b)

1-1-2 静力分析的基本定律（续）

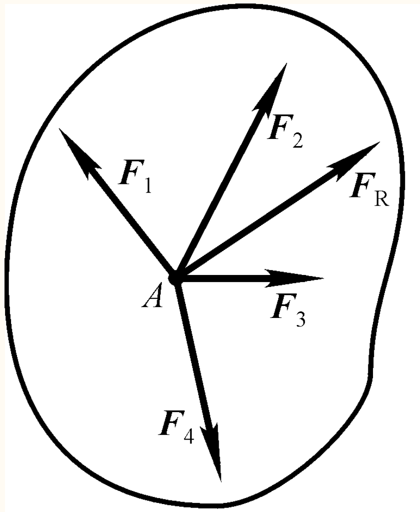
- **推论3** 汇交力系（所有各力的作用线汇交于一点的力系）合成的结果为一个力，这个力等于诸力的矢量和且通过汇交点。

$$\vec{F}_{\mathrm{R}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_{\mathrm{n}} = \sum \vec{F} \qquad \textbf{(1-3)}$$

- **等效力系和合力**
  - 若作用在刚体上的某一力系可用另一力系来代替而不改变对刚体的运动效应，则称这两个力系为**等效力系**。
  - 如果一个力与某一力系等效，则称此力为该力系的**合力**。

1-1-2 静力分析的基本定律（续）

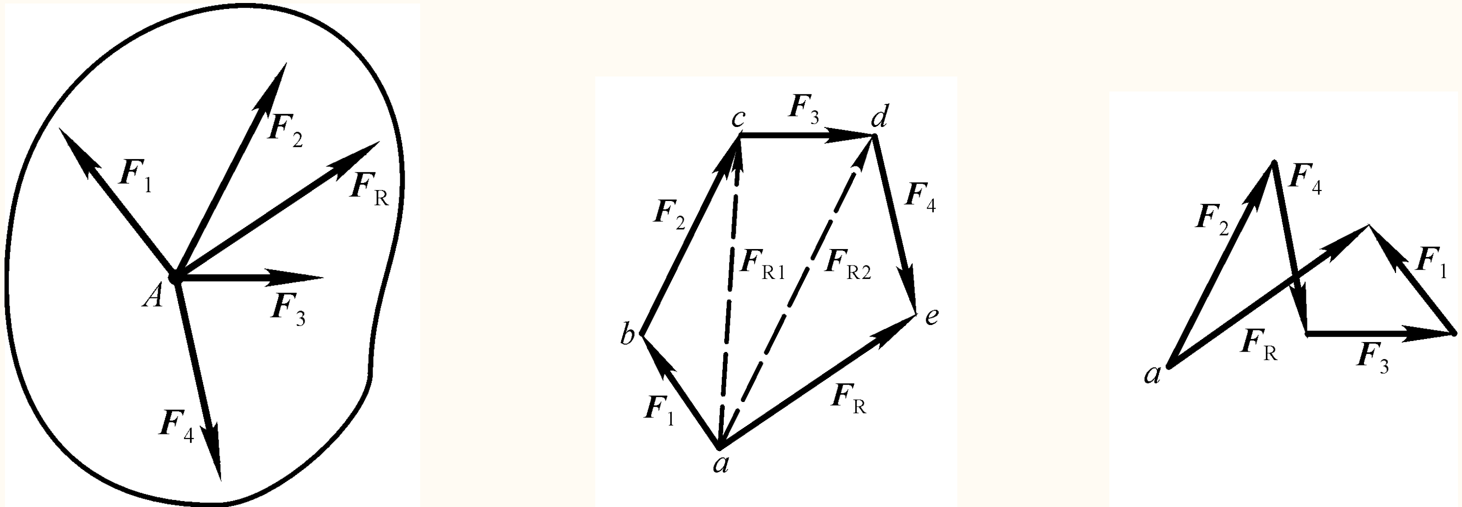
- 结论：汇交力系合成的结果为一合力，合力等于各各分力的矢量和且通过汇交点。



$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = \sum \vec{F}$$

1-1-2 静力分析的基本定律（续）

- 平面汇交力系合成的几何法



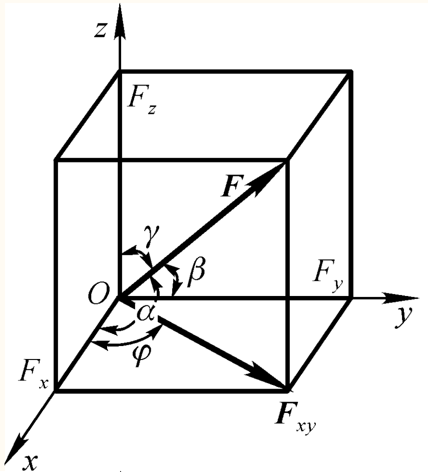
(a) (b) (c)

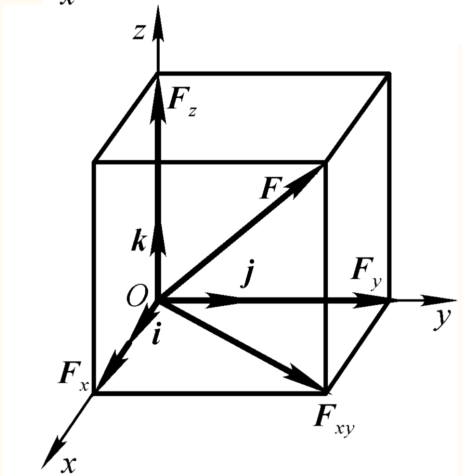
- ***平面汇交力系合成的几何法小结：***

将各力矢按任意选定的顺序***首尾相接***地相继画出，则连接第一个力矢始端与最后一个力矢末端的矢量就是合力矢量 $\vec{F}_R$。

1-1-3 力在坐标轴上的投影

1. 力在空间直角坐标轴上的投影





(b)

- **定义：**

$$F_x = F\cos\alpha = \vec{F}\cdot\vec{i}$$

$$F_y = F\cos\beta = \vec{F}\cdot\vec{j} \qquad (1\text{-}4)$$

$$F_z = F\cos\gamma = \vec{F}\cdot\vec{k}$$

- **二次投影法：**

$$F_x = F_{xy}\cos\varphi = F\sin\gamma\cos\varphi$$

$$F_y = F_{xy}\sin\varphi = F\sin\gamma\sin\varphi \qquad (1\text{-}9)$$

$$F_z = F\cos\gamma$$

1-1-3 力在坐标轴上的投影（续）

- 力在坐标轴上的投影为代数量，而力沿坐标轴的分量为矢量。

$$\vec{F}_x = F_x \vec{i} \quad \vec{F}_y = F_y \vec{j} \quad \vec{F}_z = F_z \vec{k} \qquad (1\text{-}5)$$

- 力的解析表达式为

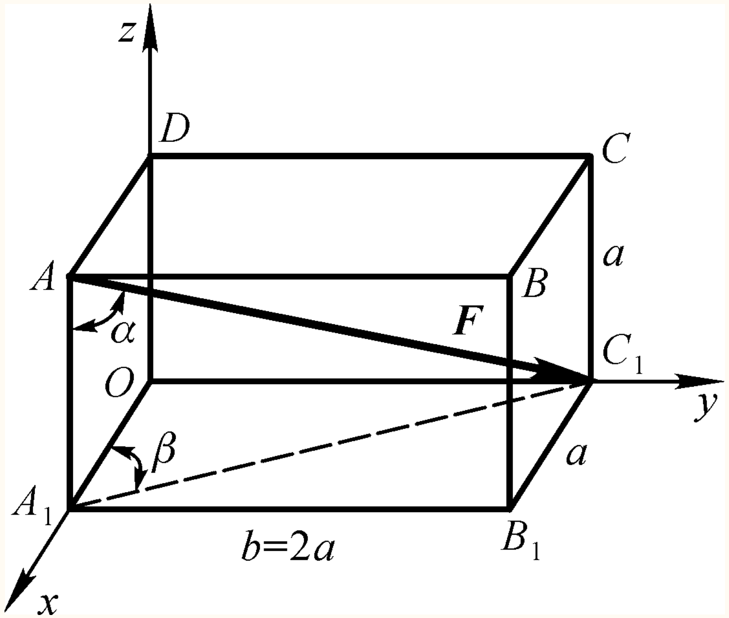
$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} \qquad (1\text{-}6)$$

- 由力的投影求力的大小和方向余弦：

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \qquad (1\text{-}7)$$

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F} \quad \cos\beta = \frac{F_y}{F} \quad \cos\gamma = \frac{F_z}{F} \qquad (1\text{-}8)$$

例1-1　如图所示，长方体边长$\boldsymbol{b = 2a}$，沿对角线 $\boldsymbol{AC_1}$ 作用一力 $\vec{F}$,求该力在三个坐标轴上的投影。

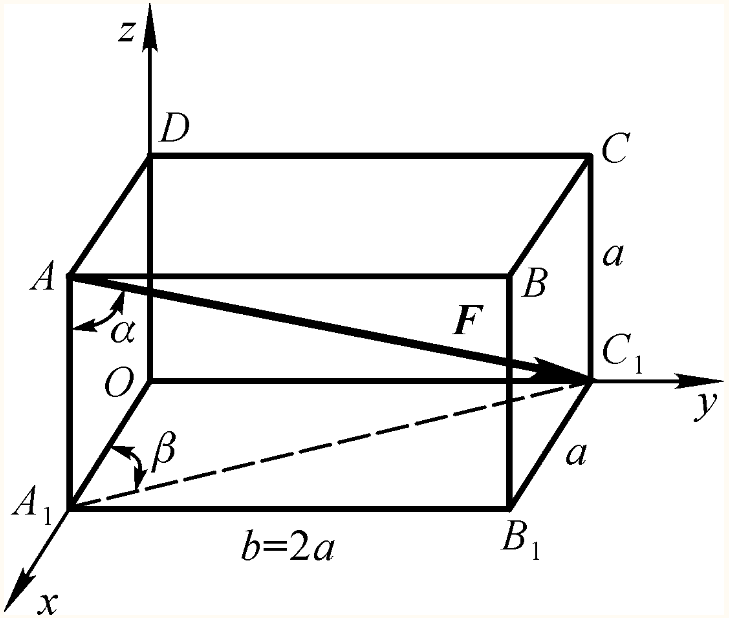


解：　采用二次投影法，有

$$F_x = -F\sin\alpha\cos\beta$$

$$F_y = F\sin\alpha\sin\beta$$

$$F_z = -F\cos\alpha$$



代入　$A_1C_1 = \sqrt{b^2 + a^2} = \sqrt{5}a$

$$AC_1 = \sqrt{(\sqrt{5}a)^2 + a^2} = \sqrt{6}a$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}},\quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}},\quad \sin\beta = \frac{2}{\sqrt{5}},\quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

得

$$F_x = -\frac{\sqrt{6}F}{6},\quad F_y = \frac{\sqrt{6}F}{3},\quad F_z = -\frac{\sqrt{6}F}{6}$$

1-1-3 力在坐标轴上的投影

2. 合力投影定理：汇交力系的合力在某轴上的投影等于力系中诸力在同一轴上投影的代数和。

设汇交力系 $(\vec{F}_1,\vec{F}_2,\cdots,\vec{F}_\mathrm{n})$ 的合力 $\vec{F}_\mathrm{R}$ 和各分力的解析表达式分别为

$$\vec{F}_\mathrm{R} = F_{\mathrm{R}x}\vec{i} + F_{\mathrm{R}y}\vec{j} + F_{\mathrm{R}z}\vec{k}$$

$$\vec{F}_i = F_{ix}\vec{i} + F_{iy}\vec{j} + F_{iz}\vec{k} \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$$

代入式（**1-3**）

$$\vec{F}_\mathrm{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_\mathrm{n} = \sum \vec{F}$$

1-1-3 力在坐标轴上的投影（续）

比较系数可得

$$\left.\begin{aligned} F_{\mathrm{R}x} &= \sum_{i=1}^{n} F_{ix} \rightarrow F_{\mathrm{R}x} = \sum F_x \\ F_{\mathrm{R}y} &= \sum_{i=1}^{n} F_{iy} \rightarrow F_{\mathrm{R}y} = \sum F_y \\ F_{\mathrm{R}z} &= \sum_{i=1}^{n} F_{iz} \rightarrow F_{\mathrm{R}z} = \sum F_z \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}10)$$

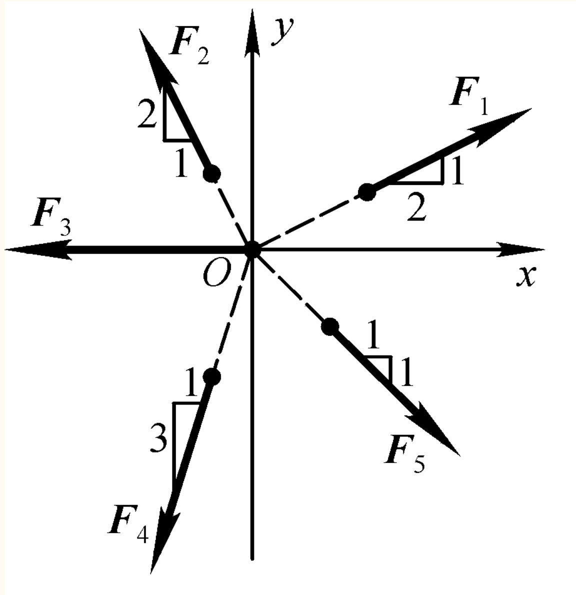
1-1-3 力在坐标轴上的投影（续）

而合力的大小和方向余弦分别为

$$F_{\mathrm{R}} = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2 + (\sum F_z)^2} \qquad \textbf{（1-11）}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos(\vec{F}_{\mathrm{R}}, \vec{i}) &= \sum F_x / F_{\mathrm{R}} \\ \cos(\vec{F}_{\mathrm{R}}, \vec{j}) &= \sum F_y / F_{\mathrm{R}} \\ \cos(\vec{F}_{\mathrm{R}}, \vec{k}) &= \sum F_z / F_{\mathrm{R}} \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{（1-12）}$$

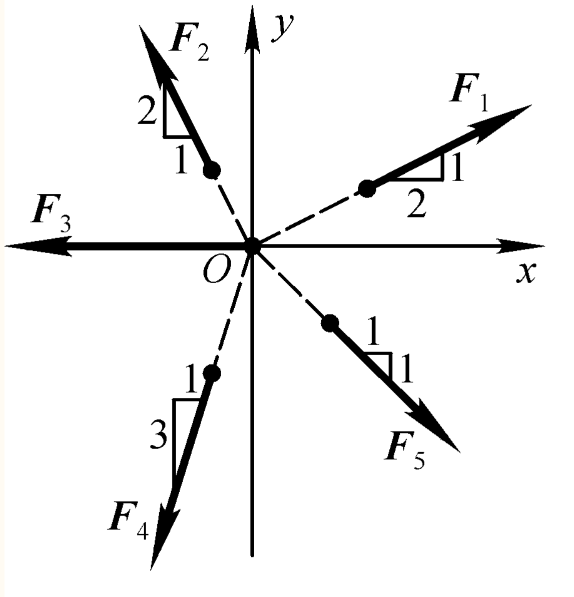
例**1-2** 如图所示的五个力共面且汇交于点$\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{F_1}$**=100kN,** $\boldsymbol{F_2}$**=50kN,** $\boldsymbol{F_3}$**=45kN,** $\boldsymbol{F_4}$**=75kN,** $\boldsymbol{F_5}$**=80kN,**求该力系的合力。



(a)

解：解析法求解如下：

由合力投影定理（**1-10**）



(a)

$$F_{Rx}=\sum F_x$$

$$=\frac{2}{\sqrt{5}}F_1-\frac{1}{\sqrt{5}}F_2-F_3-\frac{1}{\sqrt{10}}F_4+\frac{1}{\sqrt{2}}F_5$$

$$=54.93\text{kN}$$

$$F_{Ry}=\sum F_y$$

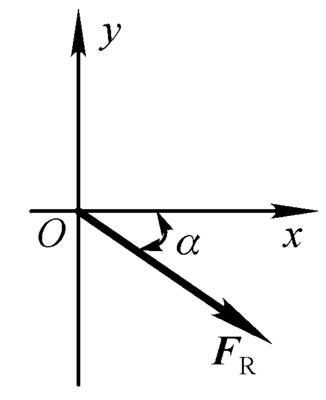
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}F_1+\frac{2}{\sqrt{5}}F_2-\frac{3}{\sqrt{10}}F_4-\frac{1}{\sqrt{2}}F_5$$

$$=-38.28\text{kN}$$

由式（**1-11**）得合力的大小为

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2}$$

$$= \sqrt{54.93^2 + (-38.28)^2} = 66.95\text{kN}$$

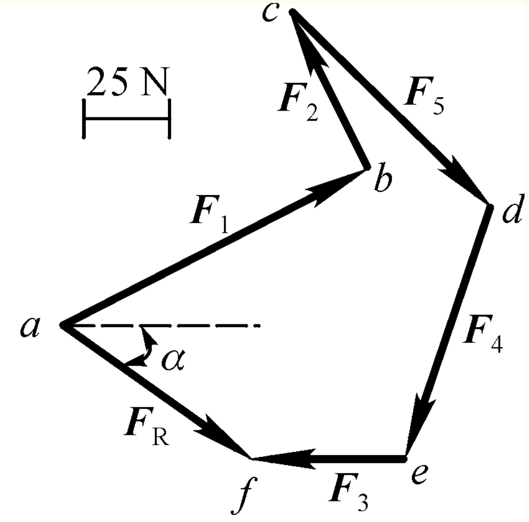


(b)

由式（**1-12**）得合力与***x***轴的夹角为

$$\alpha = \cos^{-1}\frac{F_{Rx}}{F_R} = 34°52'$$

几何法求解如图**c** 所示。



(c)

§1-2 力矩

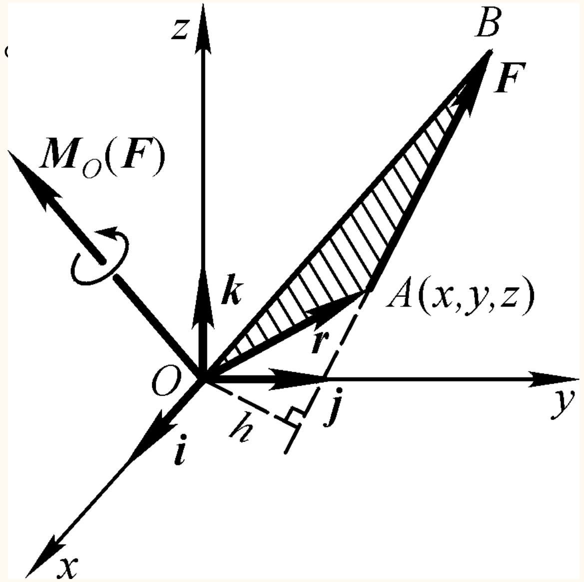
- 力对物体的运动效应，包含**平移**和**转动**。

- **力矩**是力对物体转动效应的度量。

1-2-1 力对点之矩

- 空间力系中，***力对点之矩***用矢量表示。

  例如，力 $\vec{F}$ 对点O之矩用 $\vec{M}_O(\vec{F})$ 表示。



- ***力矩矢*** $\vec{M}_O(\vec{F})$ 的大小为

$$\left|\vec{M}_O(\vec{F})\right| = Fh = 2A_{\Delta OAB} = \left|\vec{r}\times\vec{F}\right| \qquad \textbf{(1-13)}$$

  $\vec{M}_O(\vec{F})$的指向与 $\vec{r}\times\vec{F}$ 的方向一致。

- 力对点之矩矢等于矩心到力作用点的矢径与该力的矢量积。

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r}\times\vec{F} \qquad \textbf{(1-14)}$$

- 力对点之矩矢是***定位矢量***，其始端必须放在矩心上。
- 力矩的单位为“N · m”或“kN · m”。

1-2-1 力对点之矩（续）

- 在式（**1-14**）中代入

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

有

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

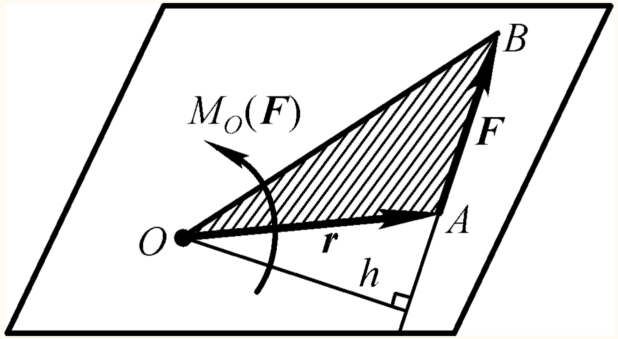
$$= (yF_z - zF_y)\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k} \qquad \textbf{(1-15)}$$

及

$$\left.\begin{aligned} [\vec{M}_O(\vec{F})]_x &= yF_z - zF_y \\ [\vec{M}_O(\vec{F})]_y &= zF_x - xF_z \\ [\vec{M}_O(\vec{F})]_z &= xF_y - yF_x \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(1-16)}$$

1-2-1 力对点之矩（续）

- 对于平面力系的问题，力对点之矩可以用代数量表示。

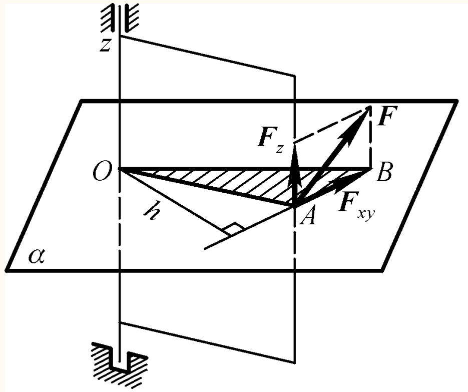


$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \pm Fh = \pm 2A_{\Delta OAB} \qquad \textbf{(1-17)}$$

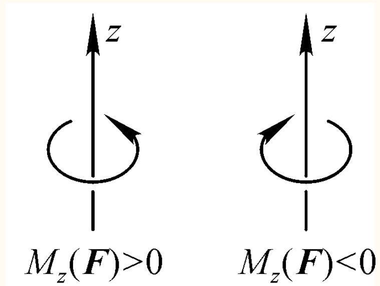
- 力臂$\boldsymbol{h}$ — 矩心至力作用线的垂直距离。
- 一般约定：使物体绕矩心逆时针转动的力矩为正，反之为负。

1-2-2 力对轴之矩（续）

- 力对轴之矩是力使刚体绕该轴转动效应的度量。



(a)



(b)

- 力对轴之矩等于力在垂直于该轴平面上的投影对轴与平面交点之矩：

$$M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_{xy}) = \pm F_{xy}h = \pm 2A_{\Delta OAB} \qquad \textbf{(1-18)}$$

- 力对轴之矩为代数量，其正负号按右手螺旋规则确定。
- 力与轴共面(力与轴平行或力与轴相交)时，力对轴之矩等于零。

1-2-3 合力矩定理

定理：若力系（$\vec{F}_1,\vec{F}_2,\cdots\vec{F}_n$）有合力 $\vec{F}_R$，则合力对某点O之矩等于诸分力对同一点之矩的矢量和；合力对某轴z之矩等于诸分力对同一轴之矩的代数和。

$$\vec{M}_O(\vec{F}_R)=\sum\vec{M}_O(\vec{F}_i) \qquad \textbf{(1-19)}$$

$$M_z(\vec{F}_R)=\sum M_Z(\vec{F}_i) \qquad \textbf{(1-20)}$$

- 对于平面问题，式（**1-19**）可改写为

$$M_O(\vec{F}_R)=\sum M_O(\vec{F}_i) \qquad \textbf{(1-21)}$$

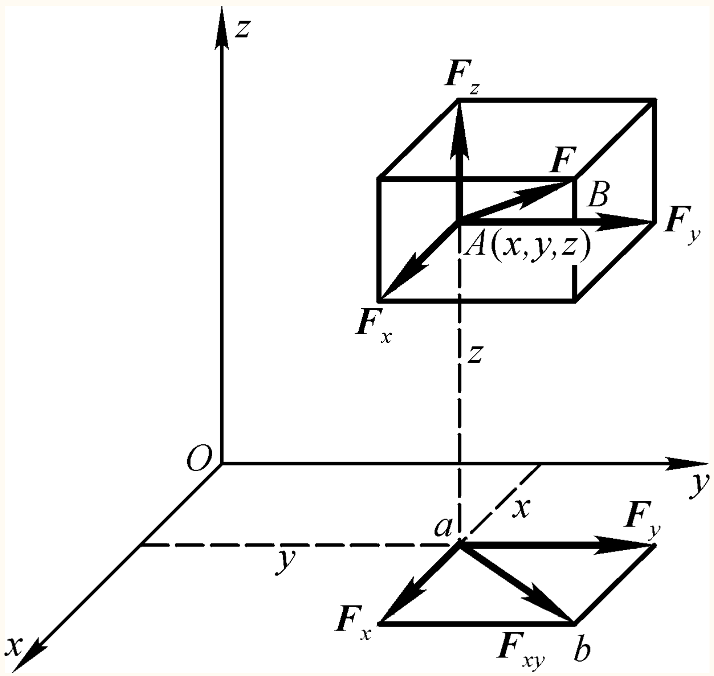
即：平面力系的合力对平面上任一点之矩，等于诸分力对同一点之矩的代数和。

1-2-4 力对点之矩与力对轴之矩的关系

$$M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_{xy})$$

$$= M_O(\vec{F}_x) + M_O(\vec{F}_y)$$

$$= -yF_x + xF_y$$



- 力对坐标轴之矩的解析表达式

$$\left.\begin{aligned}
M_x(\vec{F}) &= yF_z - zF_y \\
M_y(\overleftarrow{F}) &= zF_x - xF_z \\
M_z(\vec{F}) &= xF_y - yF_x
\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(1-22)}$$

1-2-4 力对点之矩与力对轴之矩的关系（续）

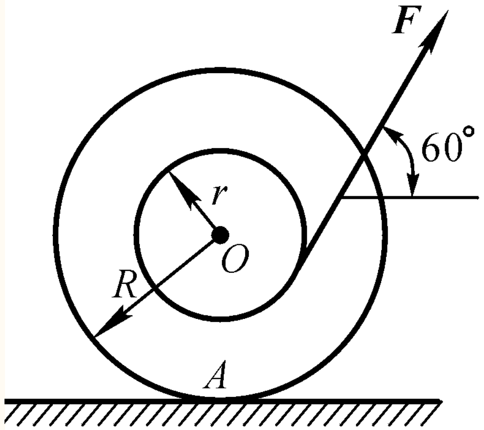
- 比较式（**1-16**）与式（**1-22**），得：

$$\left.\begin{aligned}[\vec{M}_O(\vec{F})]_x &= M_x(\vec{F}) \\ [\vec{M}_O(\vec{F})]_y &= M_y(\vec{F}) \\ [\vec{M}_O(\vec{F})]_z &= M_z(\vec{F})\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(1-23)}$$

即：力对点之矩矢在通过该点的任一轴上的投影等于力对该轴之矩。

$$\vec{M}_O(\vec{F})=M_x(\vec{F})\vec{i}+M_y(\vec{F})\vec{j}+M_z(\vec{F})\vec{k} \qquad \textbf{(1-24)}$$

例1-3　图示为一绕线轮，半径R=2r，受牵引力***F***作用，求力***F***对点 ***A*** 之矩。



(a)

解：由合力矩定理，有

$$M_A(\vec{F})=M_A(\vec{F}_x)+M_A(\vec{F}_y)=-F_x h_1+F_y h_2$$

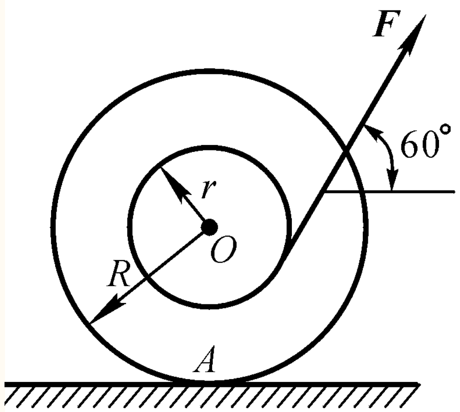
代入以下数据

$$F_x=F\cos60^0=\frac{F}{2}\quad,\quad F_y=F\sin60^0=\frac{\sqrt{3}}{2}F$$

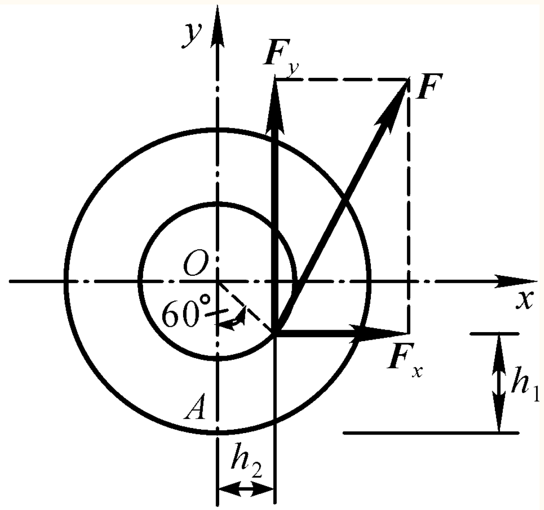
$$h_1=R-r\cos60^0=\frac{3}{2}r\quad,\quad h_2=r\sin60^0=\frac{\sqrt{3}}{2}r$$

得

$$M_A(\vec{F})=-\frac{F}{2}\frac{3}{2}r+\frac{\sqrt{3}}{2}F\frac{\sqrt{3}}{2}r=0$$

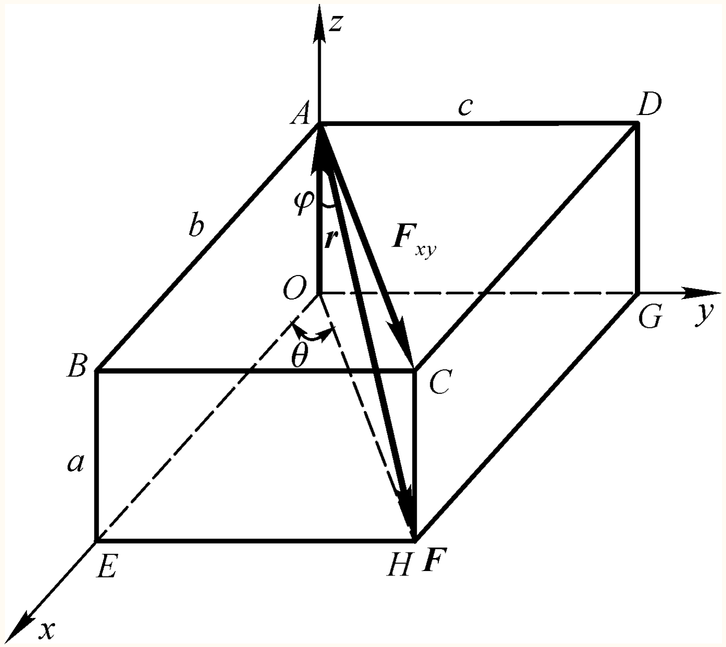


(a)



(b)

例**1-4** 如图所示的长方体，边长$\boldsymbol{b}$**=2**$\boldsymbol{a}$**=**$\boldsymbol{c}$，力**F**沿对角线AH，求力$\boldsymbol{F}$对点O之矩矢。

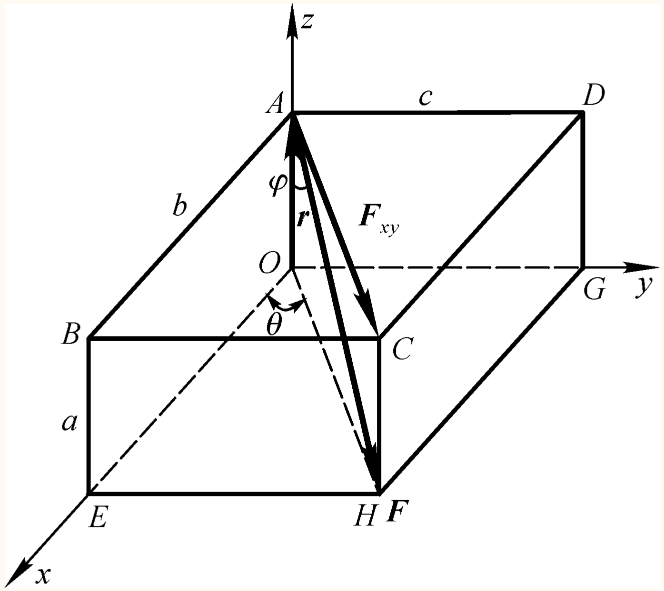


解： $x=0,\quad y=0,\quad z=a,$

$$F_x=F\sin\varphi\cos\theta=F\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{2}{3}F$$

$$F_y=F\sin\varphi\sin\theta=F\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{2}{3}F$$

$$F_z=-F\cos\varphi=-\frac{1}{3}F$$

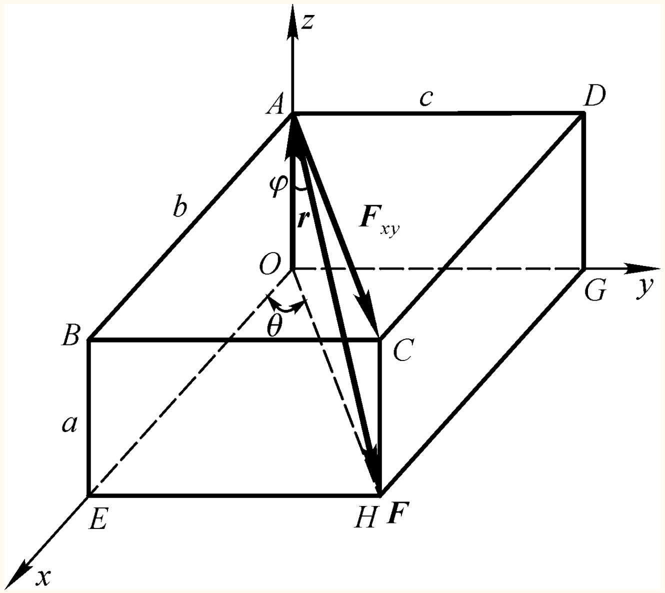


应用式（**1-15**），

$$\vec{M}_O(\vec{F})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & a\\ \frac{2}{3}F & \frac{2}{3}F & -\frac{F}{3}\end{vmatrix}=-\frac{2}{3}Fa\vec{i}+\frac{2}{3}Fa\vec{j}$$

力矩矢的模为

$$\left|\vec{M}_O(\vec{F})\right|=\sqrt{(\frac{2}{3}Fa)^2+(\frac{2}{3}Fa)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}Fa$$



力矩矢的方向余弦为

$$\cos(\vec{M}_O,\vec{i})=[\vec{M}_O(\vec{F})]_x/\left|\vec{M}_O(\vec{F})\right|=-\sqrt{2}/2$$

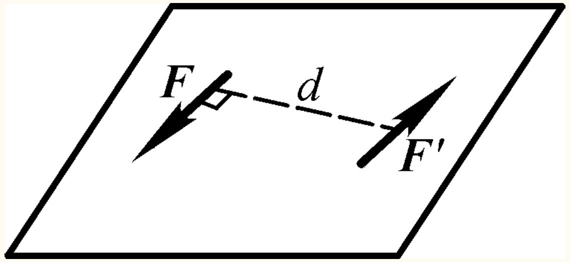
$$\cos(\vec{M}_O,\vec{j})=[\vec{M}_O(\vec{F})]_y/\left|\vec{M}_O(\vec{F})\right|=\sqrt{2}/2$$

$$\cos(\vec{M}_O,\vec{k})=[\vec{M}_O(\vec{F})]_z/\left|\vec{M}_O(\vec{F})\right|=0$$

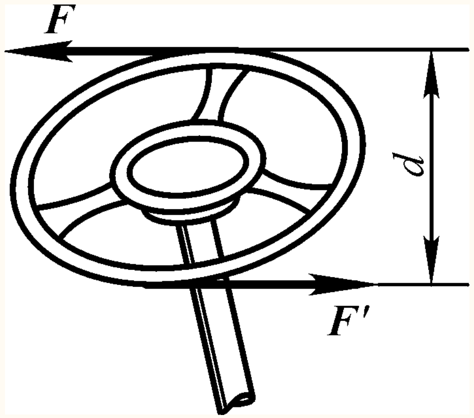
由此可得：力矩矢 $\vec{M}_O(\vec{F})$与 x 轴正向的夹角为 $\frac{3}{4}\pi$ ；与 y 轴的正向的夹角为 $\frac{1}{4}\pi$ ；与 z 轴垂直。

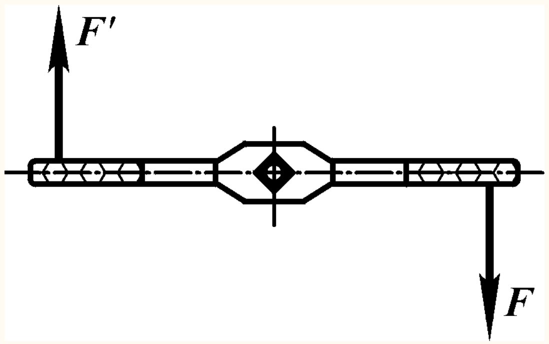
§1-3 力偶及其性质

- **力偶**：由大小相等，作用线不重合的两个反向平行力组成的力系。
- **力偶作用面**：力偶的两个力所在的平面。
- **力偶臂**：力偶的两个力作用线之间的距离。



- 力偶作用于刚体只产生**转动效应**。

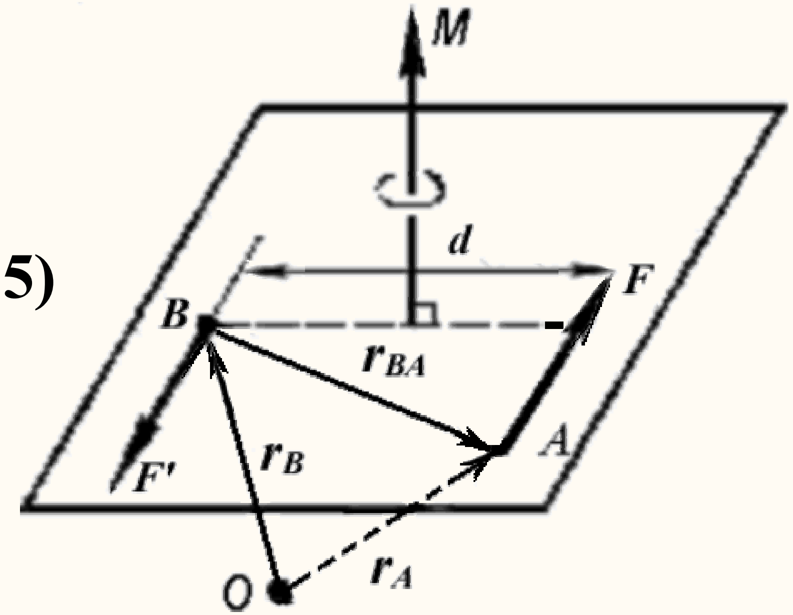




1-3-1 力偶矩矢

- **力偶矩矢** 是空间力偶对刚体产生的绕任一点转动效应的度量。

$$\vec{M} = \vec{M}_O(\vec{F}) + \vec{M}_O(\vec{F}')$$
$$= \vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{r}_B \times \vec{F}'$$
$$= (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F} \qquad (1\text{-}25)$$
$$= \vec{r}_{BA} \times \vec{F}$$



- 力偶矩矢是**自由矢量**。

1-3-1 力偶矩矢（续）

- 力偶矩矢表示了空间力偶的三要素：

  力偶矩矢的模表示力偶矩的大小；

$$M = \left| \vec{r}_{BA} \times \vec{F} \right| = Fd \tag{1-26}$$

  力偶矩矢的方位沿力偶作用面的法线，表示力偶作用面的方位；

  力偶矩矢的指向按右手螺旋规则确定，表示力偶的转向。

1-3-1 力偶矩矢（续）

- 分别用M_x, M_y, M_z 表示力偶矩矢在三个坐标轴上的投影，力偶矩矢的解析表达式为

$$\vec{M}=M_x\vec{i}+M_y\vec{j}+M_z\vec{k} \qquad \textbf{（1-27）}$$

- 在平面问题中，力偶的作用效应可用力偶矩***M***代数量）来度量：

$$M=\pm Fd \qquad \textbf{（1-28）}$$

当力偶使刚体在作用面内作逆时针向转动时，力偶矩取正值， 反之取负值。

1-3-2 力偶的性质及等效条件

- **力偶的性质：**

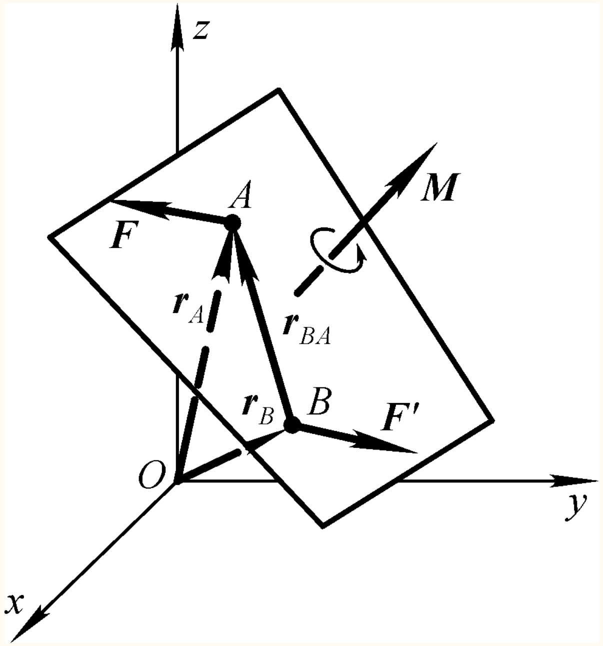
性质1　力偶不能与一个力等效（即力偶无合力），也不能与一个力平衡。

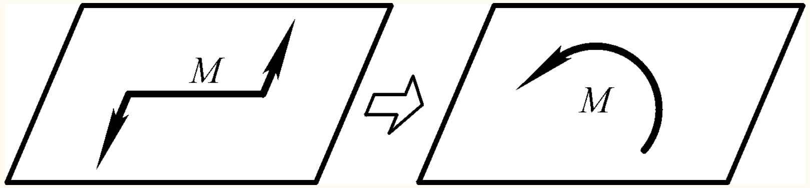
性质2　力偶中的两个力对任一点之矩的矢量和恒等于该力偶的力偶矩矢。

性质3　只要保持力偶矩矢不变，力偶可以在其作用面内任意转移；或移到另一平行平面；或同时改变力偶中的力和力偶臂的大小，都不改变对刚体的作用效应。

1-3-2 力偶的性质及等效条件（续）

- 作用于刚体上的两力偶等效的条件是它们的力偶矩矢相等。





1-3-3 力偶系的合成

- 空间力偶系一般合成为一个力偶，称为原力偶系的**合力偶**。合力偶矩矢 $\vec{M}$ 等于诸分力偶矩矢的矢量和。

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \cdots + \vec{M}_{\mathrm{n}} = \sum \vec{M}_i \qquad \textbf{（1-29）}$$

- 选取$Oxyz$坐标系 $\vec{M}_i = M_{ix}\vec{i} + M_{iy}\vec{j} + M_{iz}\vec{k} \quad (i=1,2,\cdots,n)$

$$\vec{M} = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k}$$

有 $M_x = \sum_{i=1}^{n} M_{ix}, \quad M_y = \sum_{i=1}^{n} M_{iy}, \quad M_z = \sum_{i=1}^{n} M_{iz}$

或 $M_x = \sum M_{ix}, \quad M_y = \sum M_{iy}, \quad M_z = \sum M_{iz} \qquad \textbf{（1-30）}$

结论：合力偶矩矢在直角坐标轴上的投影等于各分力偶矩矢在相应坐标轴上投影的代数和。

1-3-3 力偶系的合成（续）

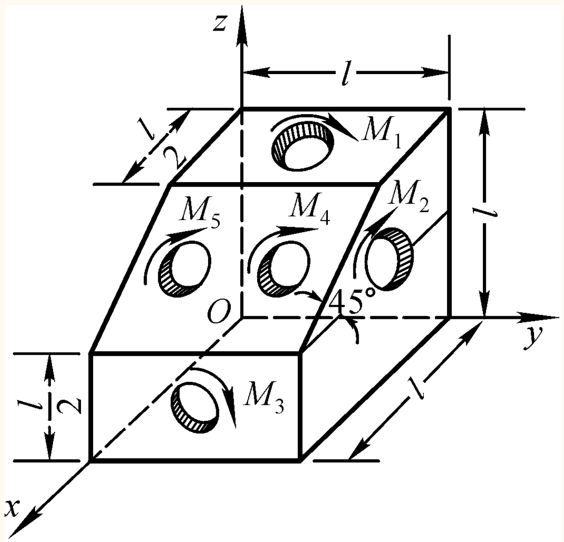
- 合力偶矩矢的模及方向余弦可表示为

$$
\begin{aligned}
&M=\sqrt{(\sum M_x)^2+(\sum M_y)^2+(\sum M_z)^2} \\
&\cos(\vec{M},\vec{i})=\sum M_x/M \\
&\cos(\vec{M},\vec{j})=\sum M_y/M \\
&\cos(\vec{M},\vec{k})=\sum M_z/M
\end{aligned}
\qquad \text{（1-31）}
$$

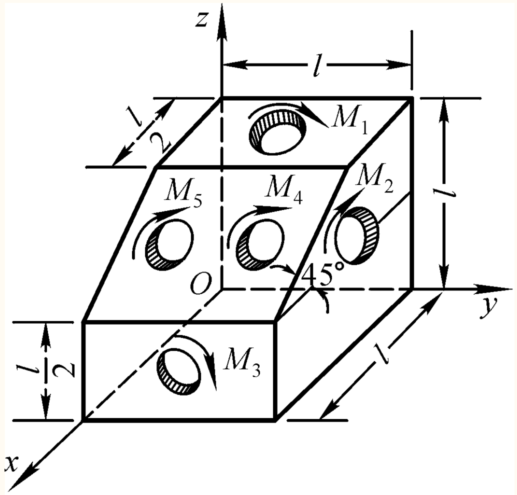
- 平面力偶系合成所得的**合力偶**，其力偶矩等于各分力偶矩的代数和。

$$M=M_1+M_2+\cdots+M_{\mathrm{n}}=\sum M_i \qquad \text{（1-32）}$$

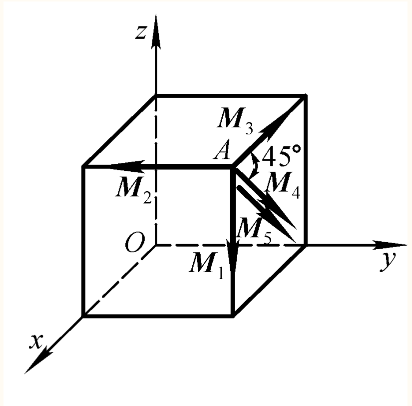
例**1-5** 工件如图所示，同时在它的四个面上钻五个孔，每个孔受的切削力偶矩的大小均为**80N•m**。试求这五个力偶的合成结果。



(a)



(a)



(b)

解：建立坐标系如图所示。由式（**1-30**），有

$$M_x = \sum M_x = -M_3 - M_4 \cos 45^o - M_5 \cos 45^o = -193.1\text{N}\cdot\text{m}$$

$$M_y = \sum M_y = -M_2 = -80\text{N}\cdot\text{m}$$

$$M_z = \sum M_z = -M_1 - M_4 \cos 45^o - M_5 \cos 45^o = -193.1\text{N}\cdot\text{m}$$

由此可得合力偶矩矢为

$$\vec{M} = -193.1\,\vec{i} - 80\,\vec{j} - 193.1\,\vec{k} \quad (\text{N}\cdot\text{m})$$

1-3-4 力偶对轴之矩

- 力偶矩矢在某轴上的投影等于力偶对该轴之矩。

- 当力偶矩矢与某轴垂直时，力偶对该轴之矩等于零。

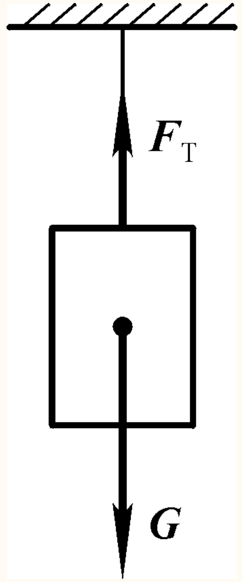
§1-4 约束和约束力

1-4-1 约束的概念

- **自由体**：位移不受限制的物体。
- **非自由体**：某些运动受到限制的物体。
- **约束**：对非自由体的某些运动起限制作用的条件。

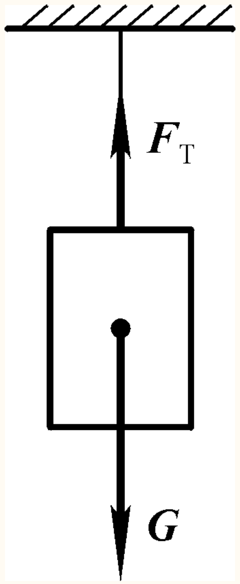
  在静力分析中，常把对物体运动施加限制的周围物体称为约束。
- **约束力**：约束对物体的作用力。

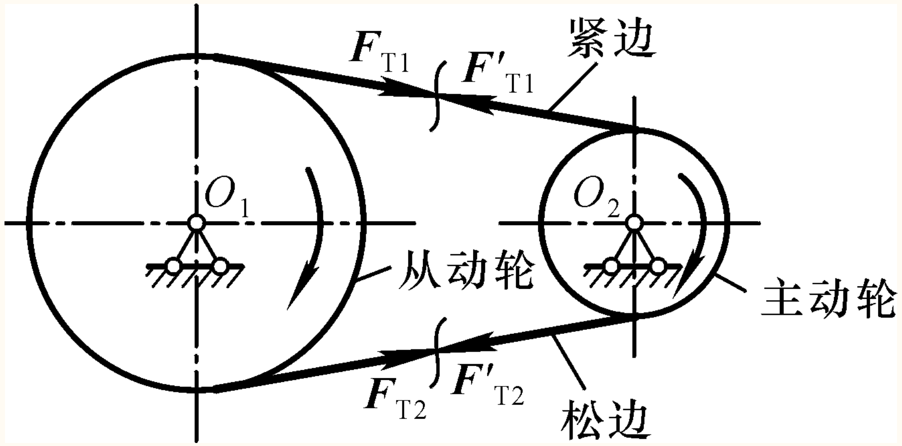
  约束力的方向必然与该约束所能阻碍的 运动方向相反。
- **荷载**：除约束力外 作用于物体上的其它力，统称为**主动力**或**荷载**。



1-4-2 常见的约束类型与对应的约束力

1. **柔索**

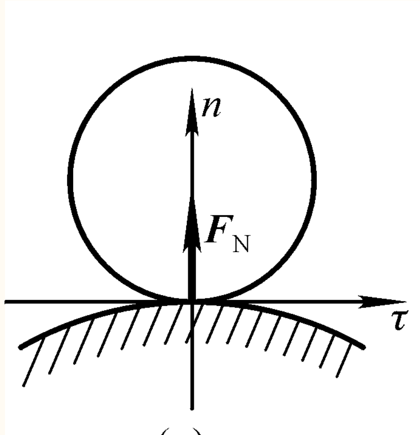




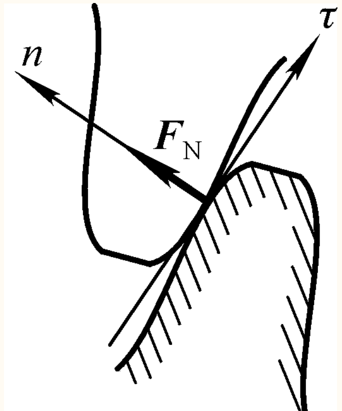
- 理想化的柔索只能承受拉力，不能承受压力和弯曲。它只能限制物体沿柔索伸长方向的运动。
- 柔索的约束力作用在接触点，其作用线沿着柔索，指向则背离被约束物体，即只能是拉力。

1-4-2 常见的约束类型与对应的约束力（续）

2. **光滑接触面**

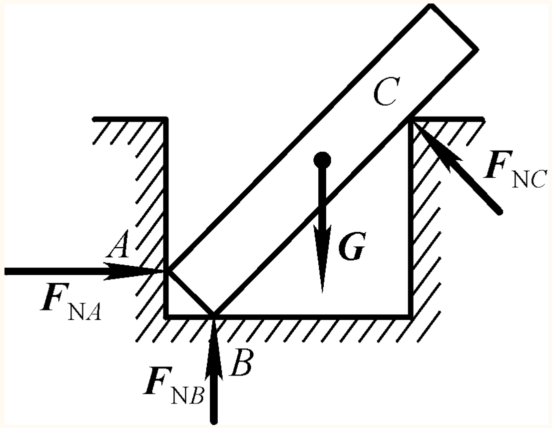


(a)



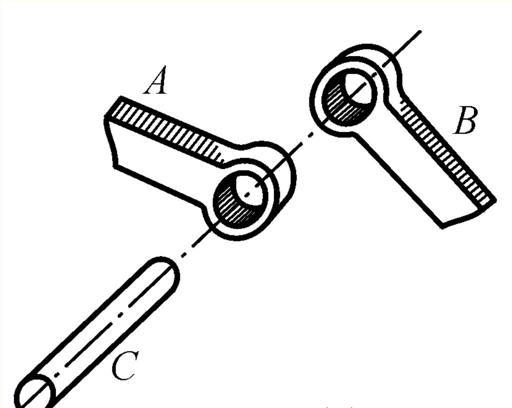
(b)

- 光滑接触面的约束力通过接触点，方向沿着接触面在该点的公法线，指向被约束物体内部，即必为压力。

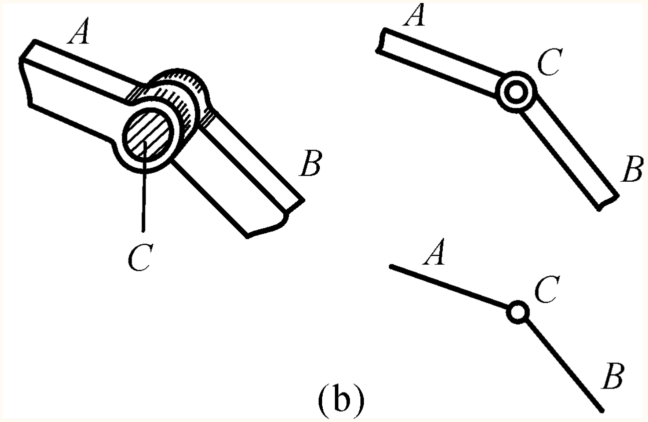


1-4-2 常见的约束类型与对应的约束力（续）

3. **光滑圆柱铰链**（简称铰链）



(a)

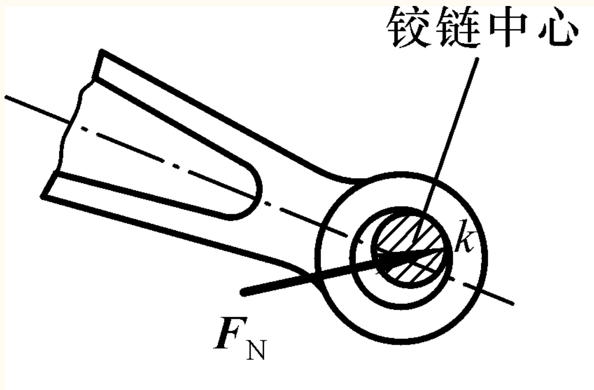


(b)

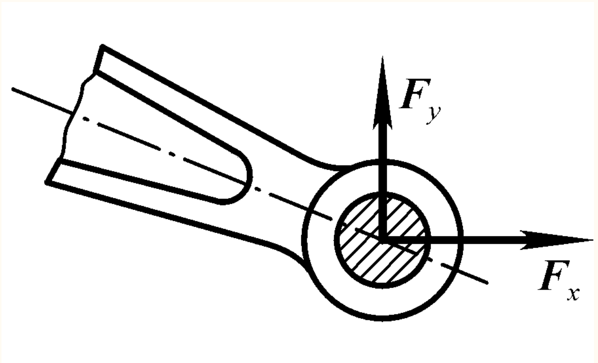
- 光滑圆柱铰链的约束力沿着圆柱面在接触点的公法线，即通过铰链中心。

1-4-2 常见的约束类型与对应的约束力（续）

3. **光滑圆柱铰链**（简称铰链）



(a)

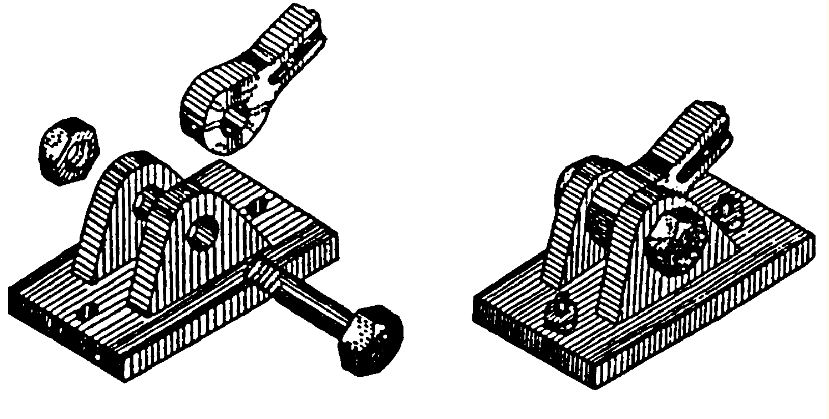


(b)

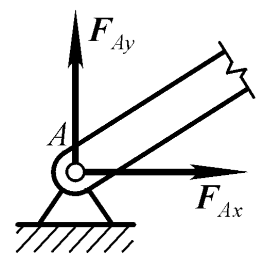
- 当接触点不能事先确定时，光滑圆柱铰链的约束力用一对通过铰链中心的正交分力表示。

1-4-2 常见的约束类型与对应的约束力（续）

4. 固定铰链支座



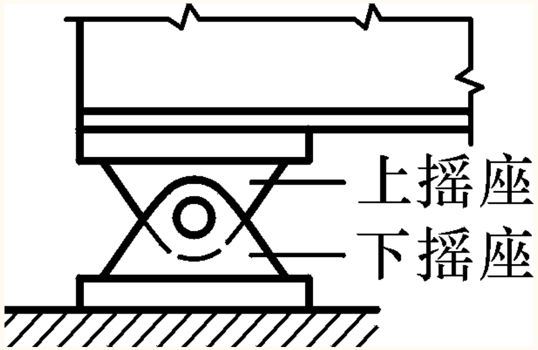
(a) (b)

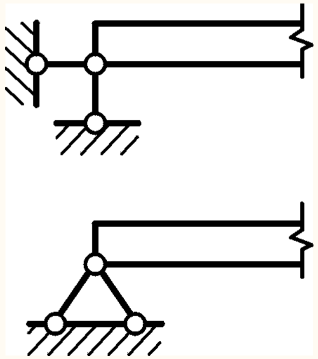


(c)

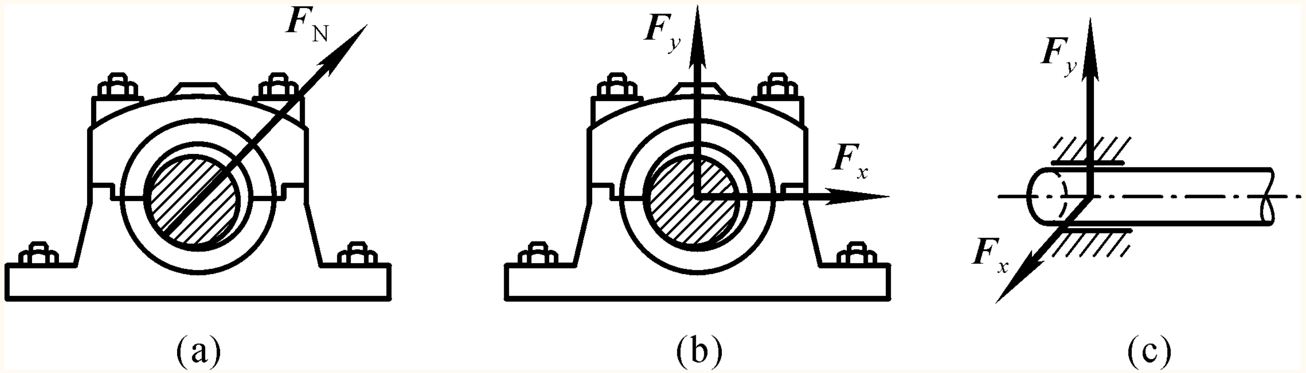
- 当接触点不能事先确定时，固定铰链的约束力用一对通过铰链中心的正交分力表示。

1-4-2 常见的约束类型与对应的约束力（续）



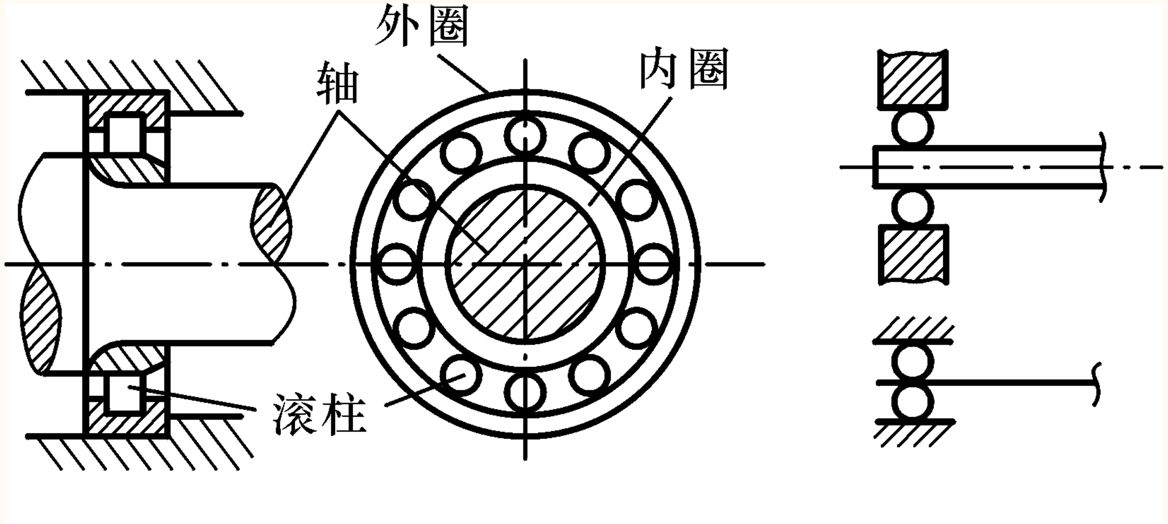


- 滑动轴承



1-4-2 常见的约束类型与对应的约束力（续）

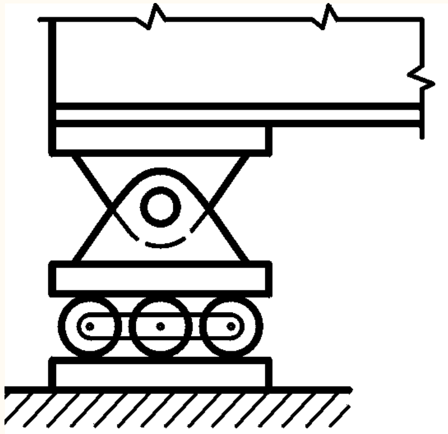
- 向心滑动轴承



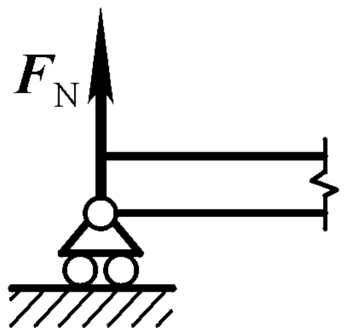
(a)　　　　　　　　　　(b)

1-4-2 常见的约束类型与对应的约束力（续）

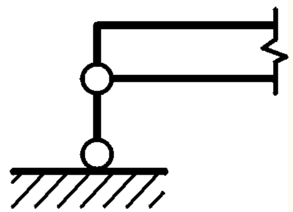
5. **辊轴铰链支座**（活动铰链支座）



(a)



(b)

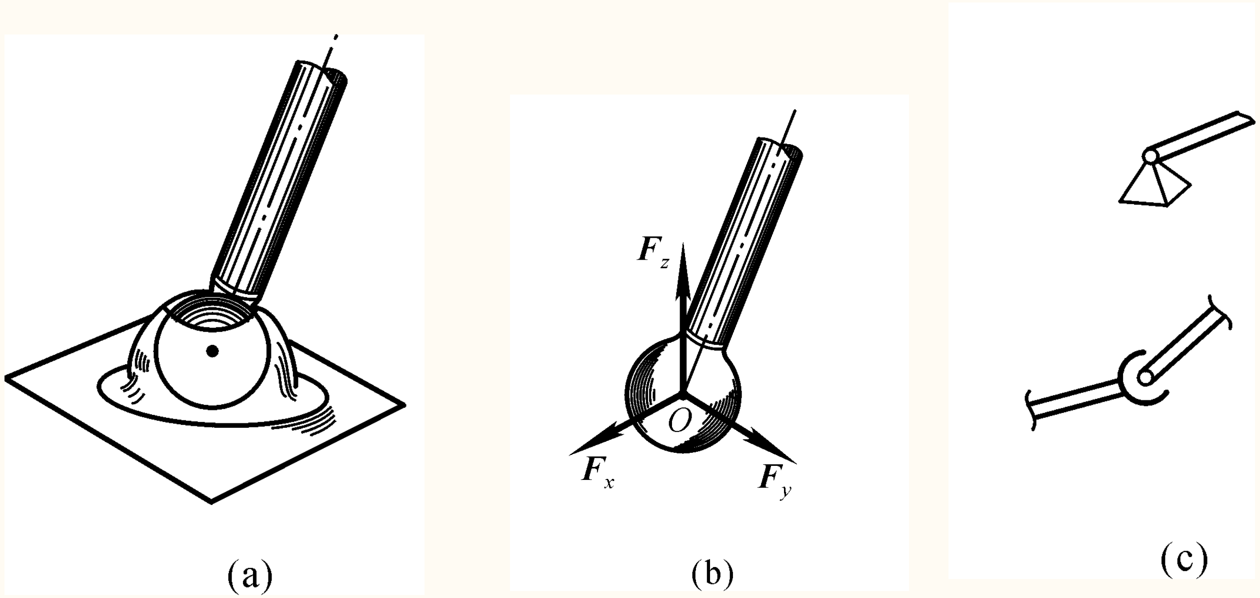


(c)

- 其约束力垂直于支座平面并通过铰链中心。

1-4-2 常见的约束类型与对应的约束力（续）

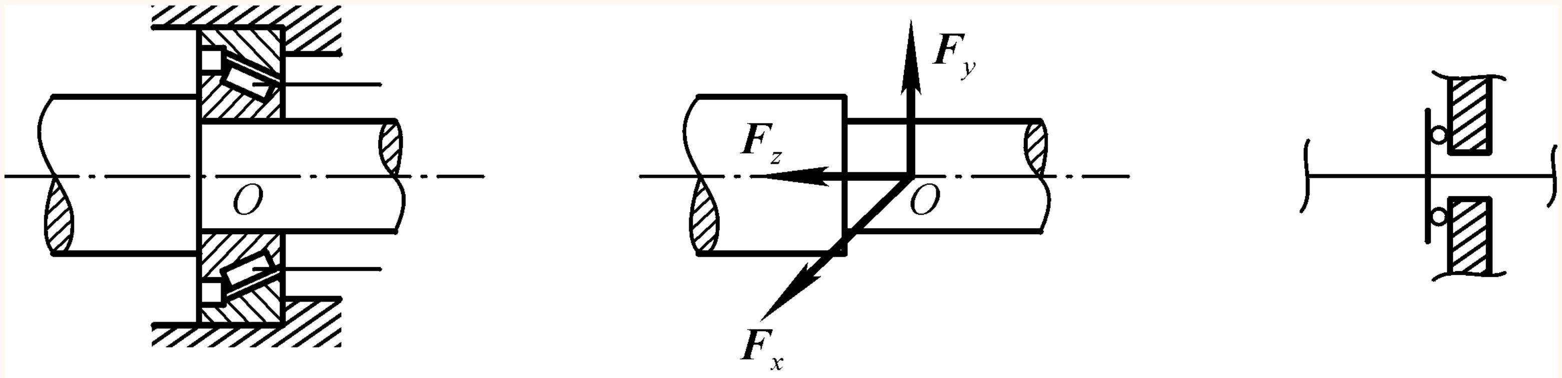
6. **光滑球形铰链**



- 其约束力通过球心。当接触点不能事先确定时，约束力用三个通过铰链中心的正交分力表示。

1-4-2 常见的约束类型与对应的约束力（续）

- 止推轴承

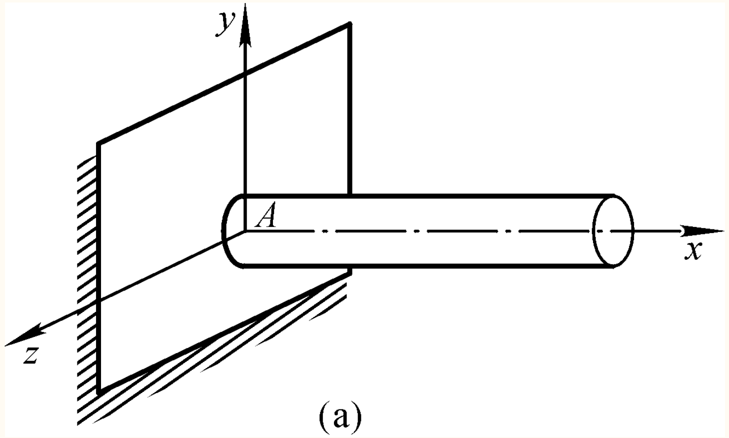


(a) (b) (c)

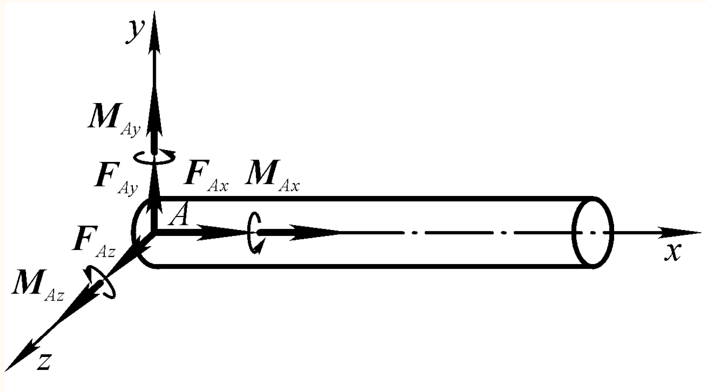
1-4-2 常见的约束类型与对应的约束力（续）

7. 固定端约束

- 空间问题中，其约束力用三个正交分力和三个正交分力偶矩矢表示。



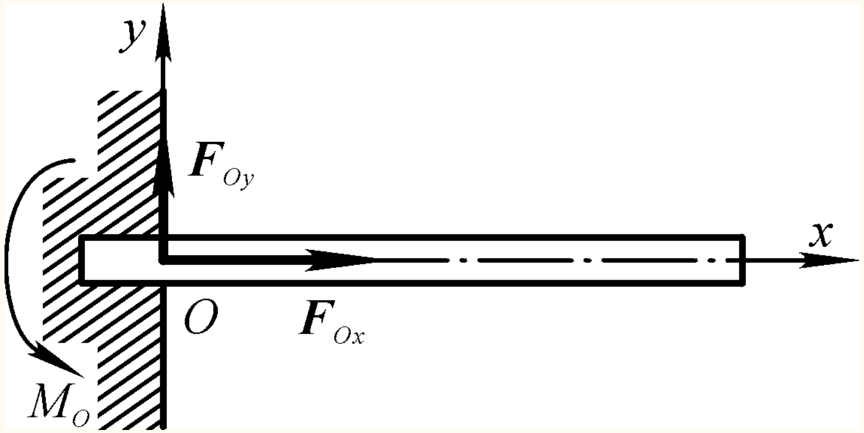
(a)



(b)

1-4-2 常见的约束类型与对应的约束力（续）

- 平面问题中，其约束力用两个正交分力和一个平面力偶表示。



§1-5 研究对象和受力图

- **受力分析：**

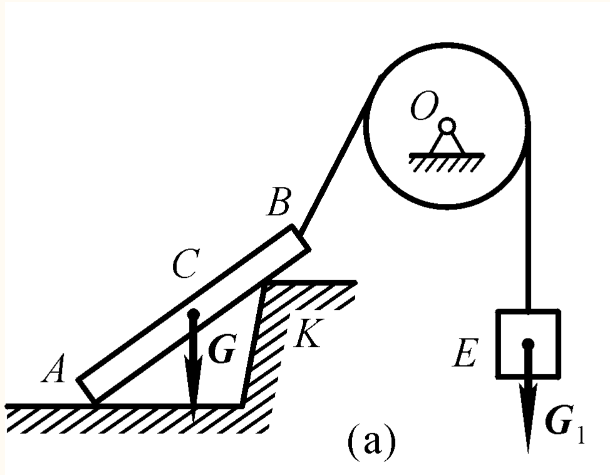
确定物体受有几个力以及每个力的作用位置和力的作用线方位的分析过程。

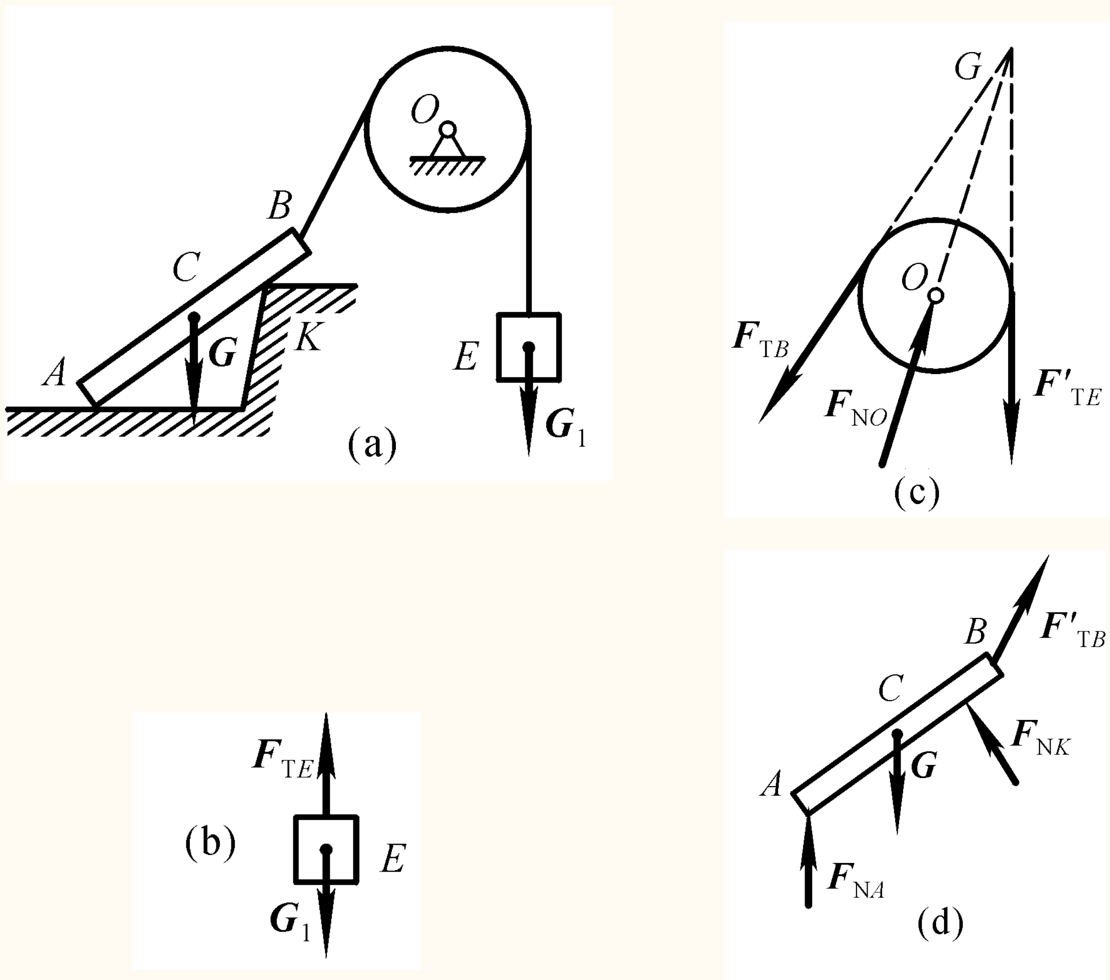
- **受力分析的两个步骤：**

1. 确定研究对象（某个物体或某些物体的组合）并取为隔离体；

2. 作受力图：画出隔离体所受的全部主动力和约束力（在解除约束处代以相应的约束力）。

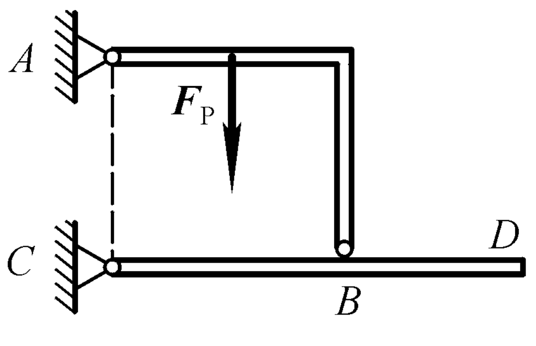
例1-6　如图所示，重为$\boldsymbol{G}$的杆AB在光滑的槽内，B端与绕过定滑轮O悬挂重物E的绳索连接。试作各物体的受力图。



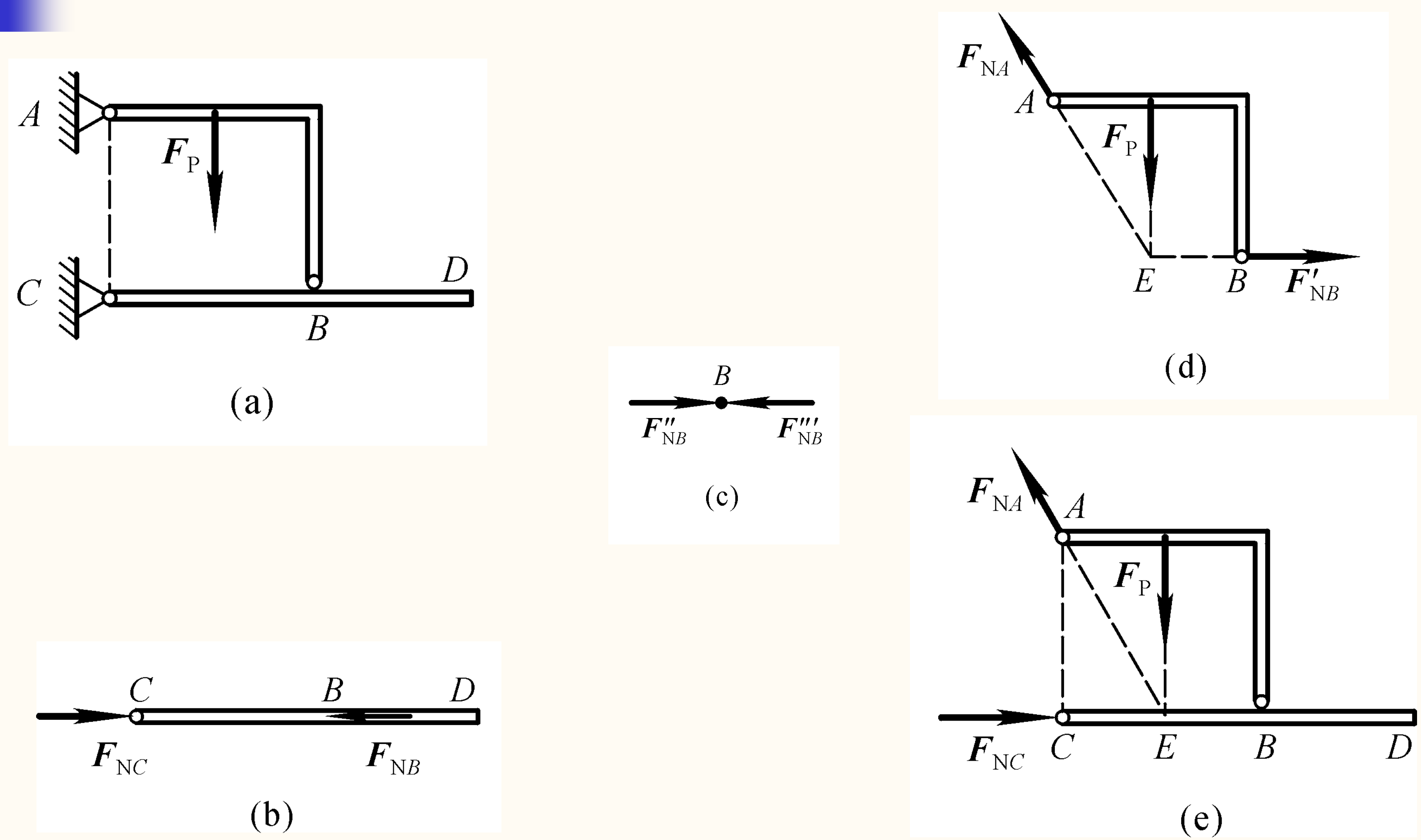


O
B
C
A
G
K
E
G_1
(a)
(b)
F_{TE}
E
G_1
G
O
F_{TB}
F_{NO}
F'_{TE}
(c)
B
F'_{TB}
C
A
G
F_{NK}
F_{NA}
(d)

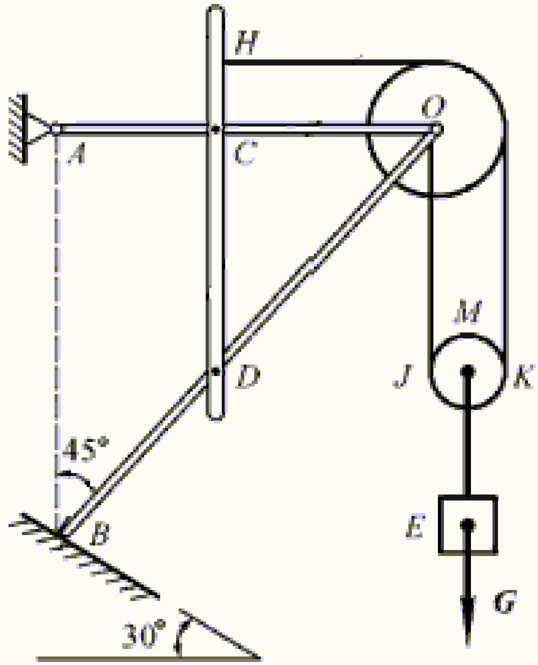
例 **1-7**　图示的结构由曲杆AB和直杆CD铰接而成，AB杆上作用有力$\boldsymbol{F}_P$。不计各杆重，试作出各个物体及结构的整体受力图。



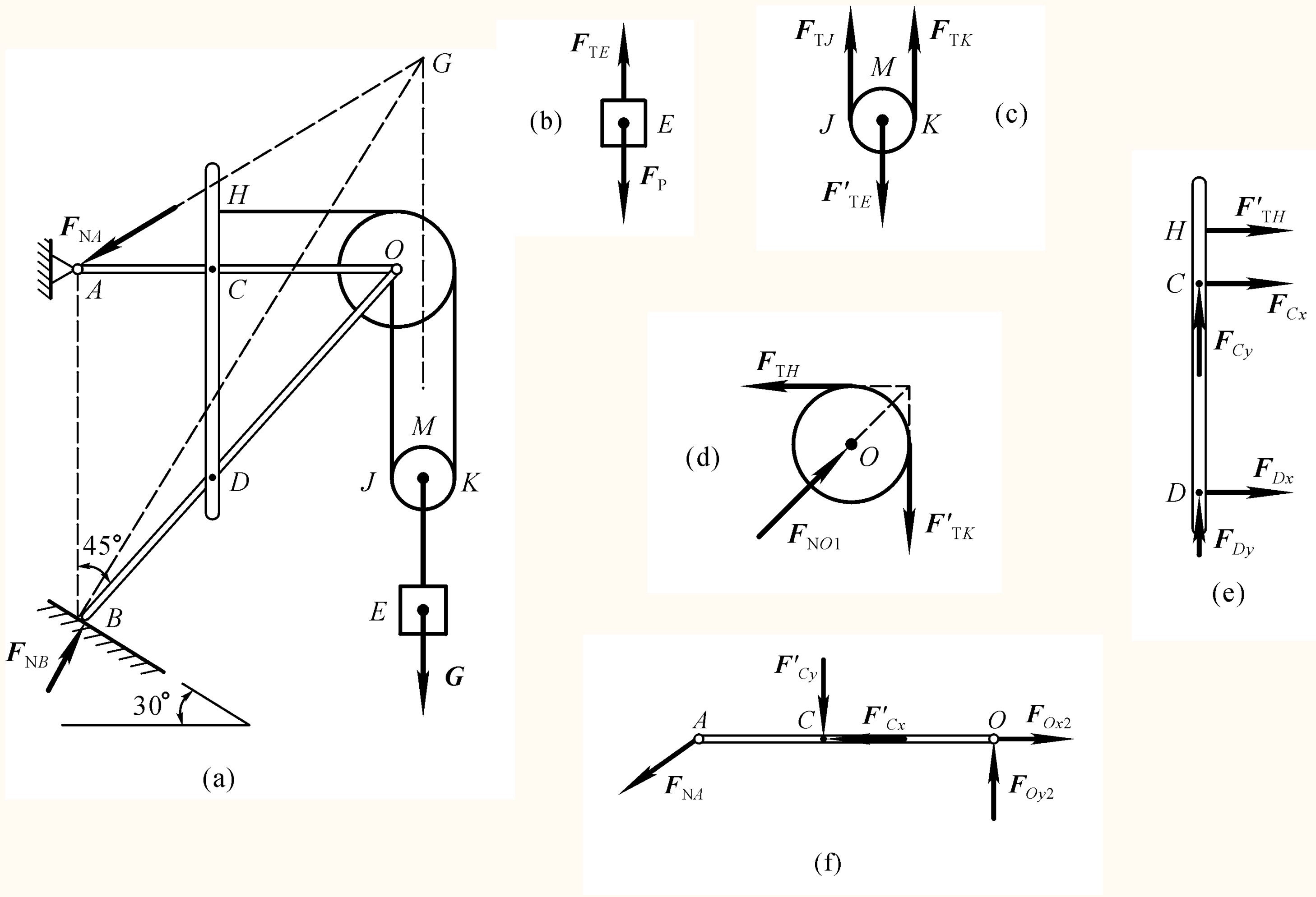
(a)

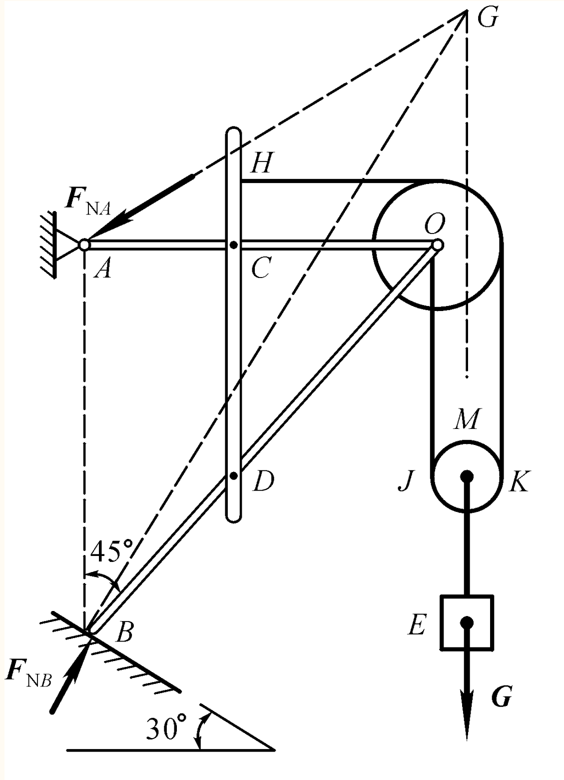

A
C
F_P
D
B
(a)
C
B
D
F_{NC}
F_{NB}
(b)
B
F''_{NB}
F'''_{NB}
(c)
F_{NA}
A
F_P
E
B
F'_{NB}
(d)
F_{NA}
A
F_P
F_{NC}
C
E
B
D
(e)

例 **1-8** 图示的结构由直杆*AO*，*OB*，*CD*和定滑轮*O*，动滑轮 *M*，重为***G*** 的重物*E* 组成。不计杆和滑轮的自重，所有接触处都为光滑，试作出如下物体的受力图:（**1**）结构整体;（**2**） 各个物体;（**3** ） 杆*AO*与杆*BO*的组合部分。

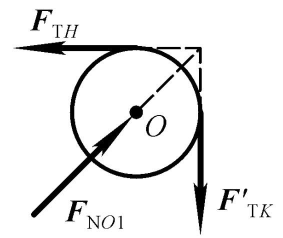


(a)

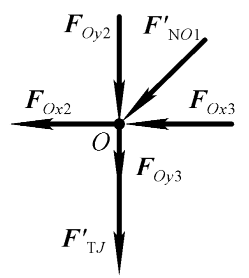

G
H
C
D
O
M
J
K
E
A
B
45°
30°
F_{NA}
F_{NB}
G
(a)
F_{TE}
E
F_P
(b)
F_{TJ}
F_{TK}
M
J
K
F'_{TE}
(c)
F_{TH}
O
F_{NO1}
F'_{TK}
(d)
H
C
D
F'_{TH}
F_{Cx}
F_{Cy}
F_{Dx}
F_{Dy}
(e)
A
C
O
F'_{Cy}
F'_{Cx}
F_{Ox2}
F_{Oy2}
F_{NA}
(f)


G
H
O
F_{NA}
A
C
M
D
J
K
45°
E
B
F_{NB}
G
30°

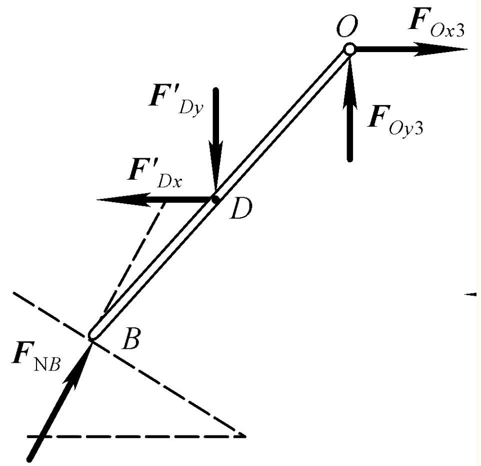
(a)

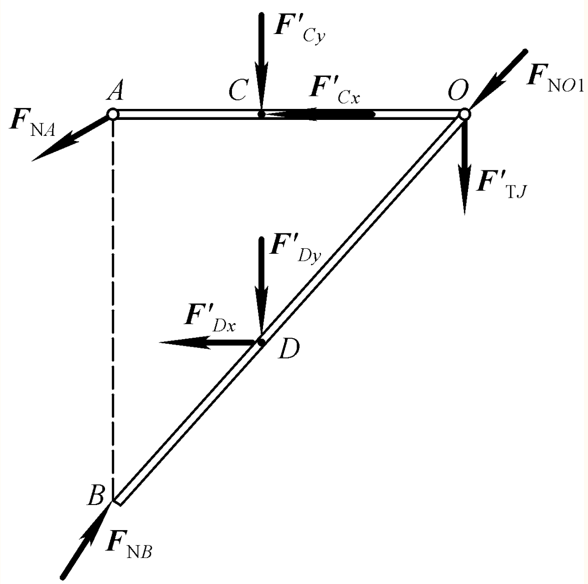

F_{TH}
O
F_{NO1}
F'_{TK}

(d)


F_{Oy2}
F'_{NO1}
F_{Ox2}
F_{Ox3}
O
F_{Oy3}
F'_{TJ}

(h)


O
F_{Ox3}
F'_{Dy}
F_{Oy3}
F'_{Dx}
D
B
F_{NB}


F'_{Cy}
F_{NO1}
A
C
F'_{Cx}
O
F_{NA}
F'_{TJ}
F'_{Dy}
F'_{Dx}
D
B
F_{NB}

(i)