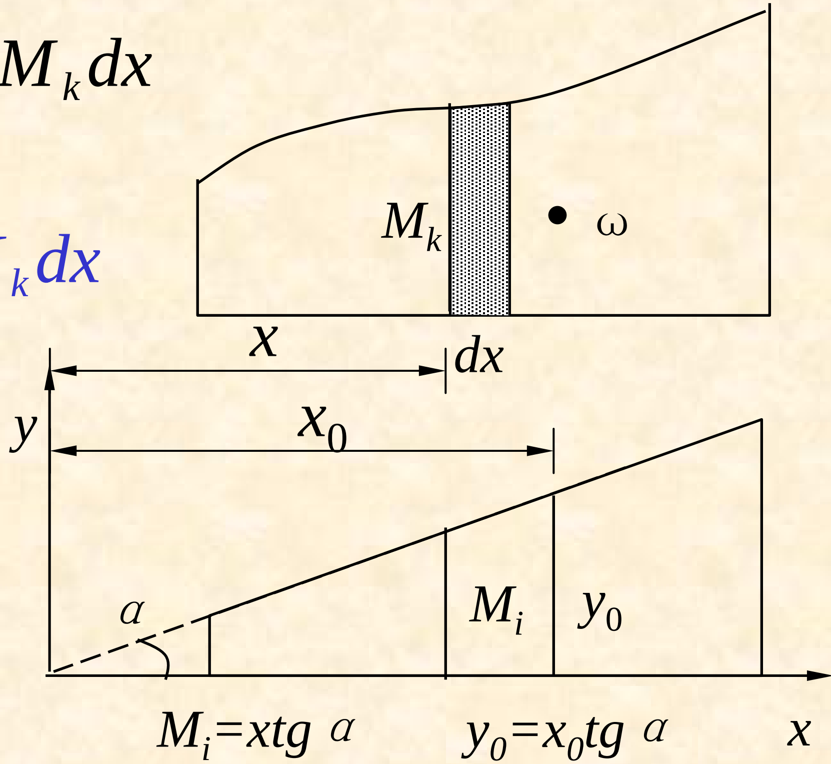
§9-5 图乘法　位移计算举例

$$\int \frac{M_i M_k}{EI} ds \overset{\text{直杆}}{\Rightarrow} \int \frac{M_i M_k}{EI} dx \overset{EI=C}{\Rightarrow} \frac{1}{EI} \int M_i M_k dx$$

$$\overset{M_i\text{是直线}}{\Rightarrow} \frac{1}{EI} \int_A^B M_k x tg\alpha dx = \frac{1}{EI} tg\alpha \int_A^B x M_k dx$$

$$= \frac{1}{EI} tg\alpha \times \omega x_0 = \frac{1}{EI} \omega y_0$$

$$\Delta = \sum \int \frac{\overline{M} M_P}{EI} dx = \sum \frac{\omega y_0}{EI}$$



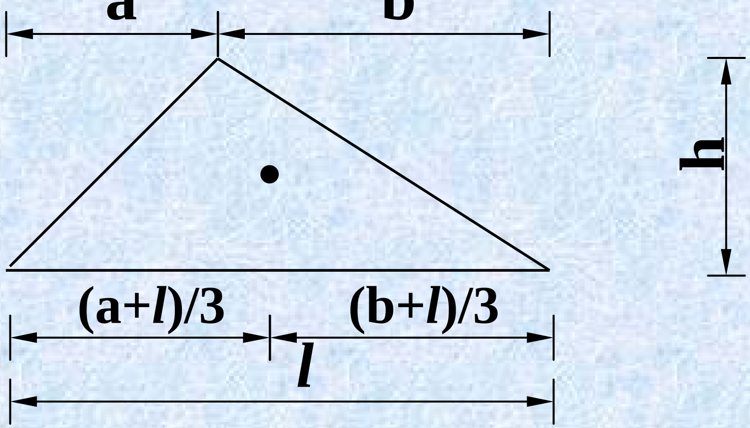
注：①Σ表示对各杆和各杆段分别图乘再相加。

②图乘法的应用条件：a）**EI**=常数；b）直杆；c）两个弯矩图至少有一个是直线。

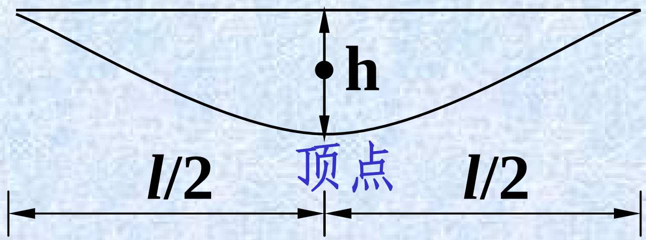
③竖标y_0取在直线图形中，对应另一图形的形心处。

④面积ω与竖标y_0在杆的同侧，ωy_0取正号，否则取负号。

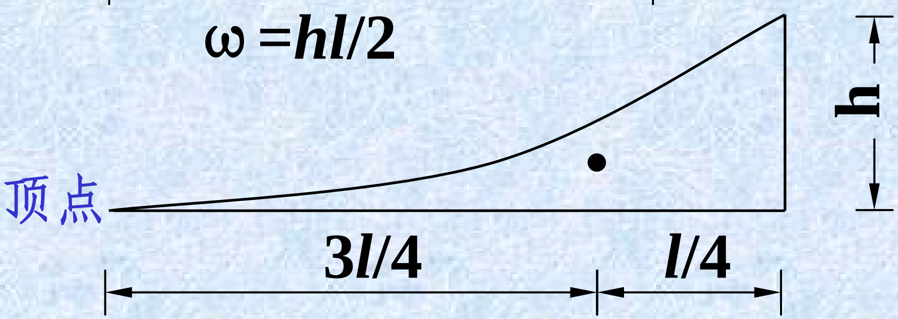
⑤几种常见图形的面积和形心的位置:



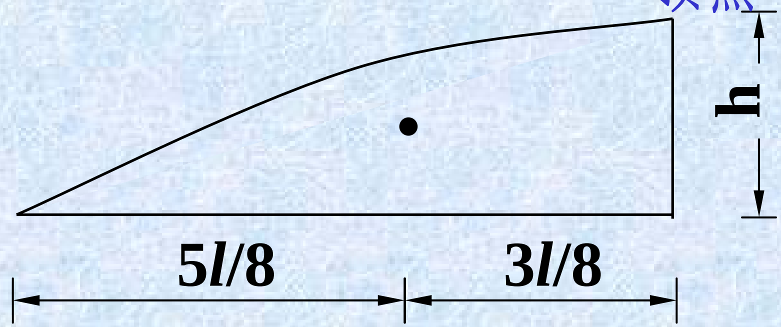
$\omega = hl/2$



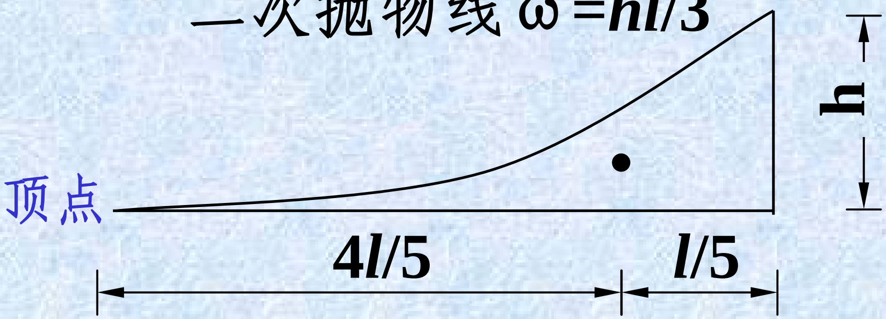
二次抛物线 $\omega = 2hl/3$



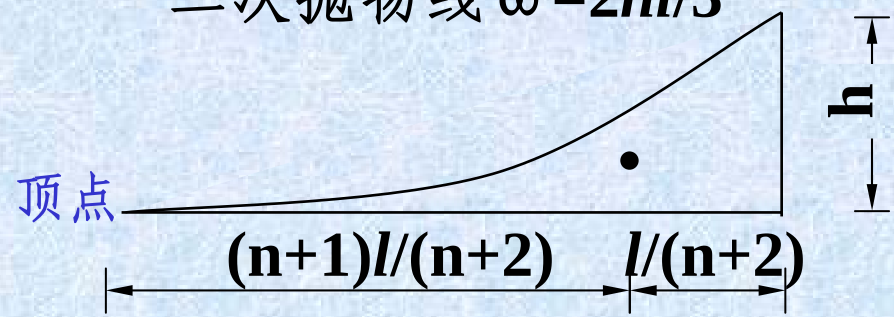
二次抛物线 $\omega = hl/3$



二次抛物线 $\omega = 2hl/3$

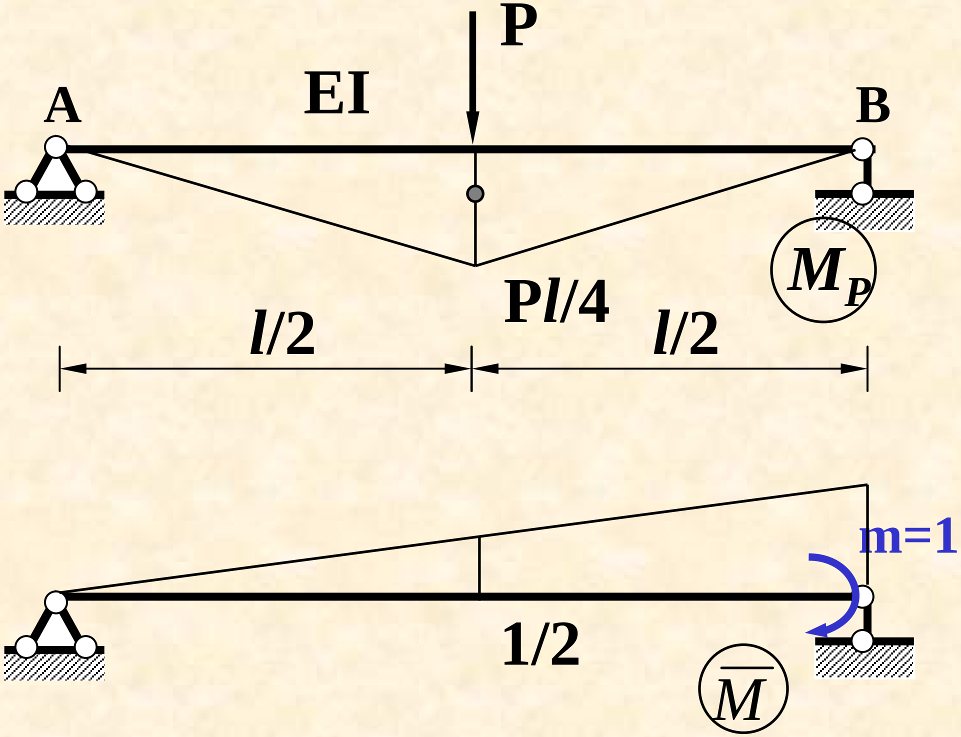


三次抛物线 $\omega = hl/4$



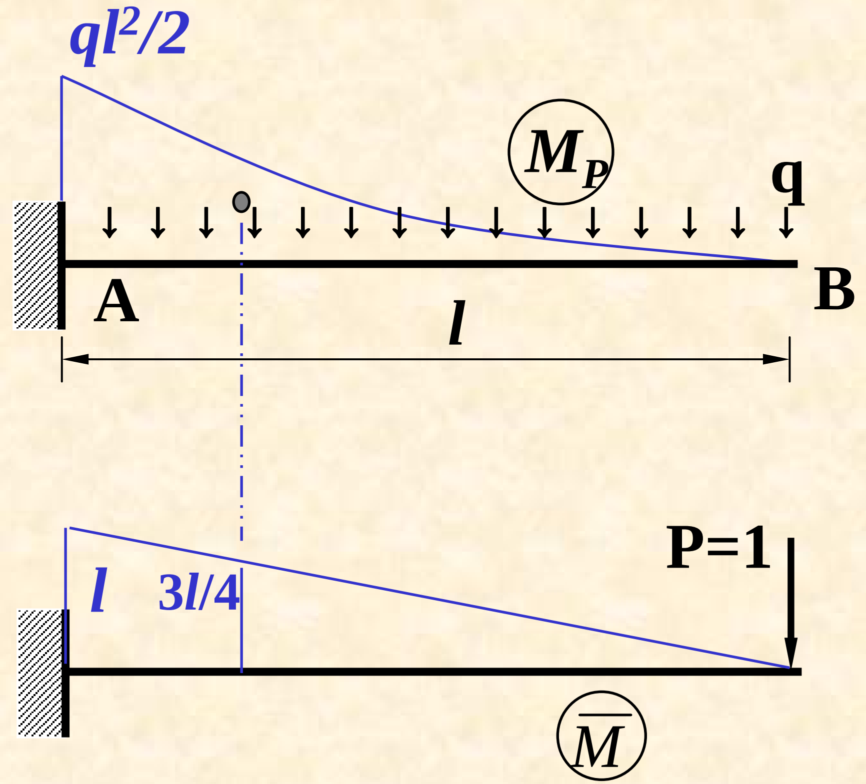
n次抛物线 $\omega = hl/(n+1)$

例：求梁B点转角位移。



$$\varphi_B=-\frac{1}{EI}\frac{1}{2}\frac{Pl}{4}l\bullet\frac{1}{2}=-\frac{Pl^2}{16EI}$$

例：求梁B点竖向线位移。



$$\Delta_B=\frac{1}{EI}\frac{1}{3}\frac{ql^2}{2}l\bullet\frac{3}{4}l=\frac{ql^4}{8EI}$$

⑥当图乘法的适用条件不满足时的处理方法：

a）曲杆或 ***EI=EI*（*x*）**时，只能用积分法求位移；

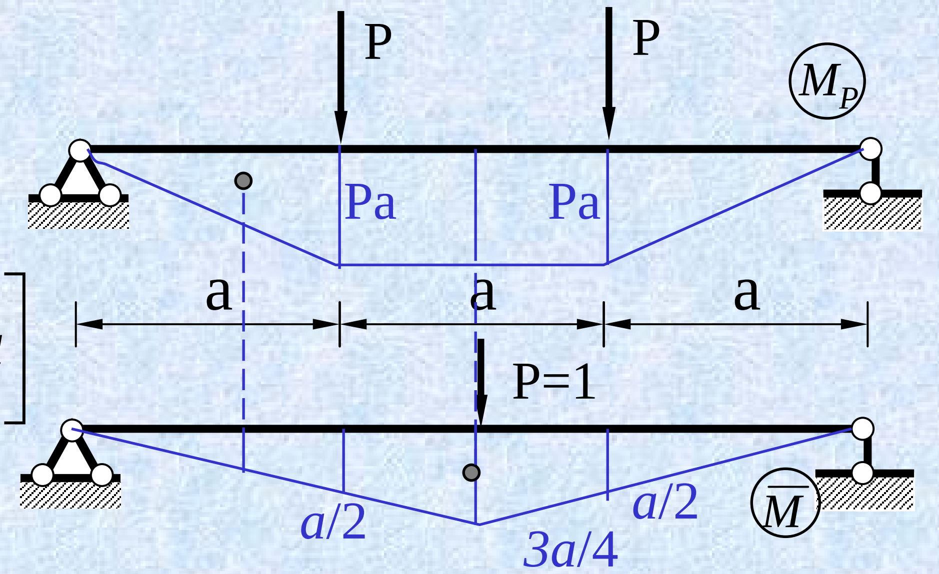
b）当 ***EI*** 分段为常数或 $\overline{M}$、M_P 均非直线时，应分段图乘再叠加。

例：求图示梁中点的挠度。

$$\Delta=\frac{1}{EI}\frac{1}{2}\frac{3a}{4}\cdot 3a\times Pa$$?

$$\Delta=\frac{1}{EI}\left[\frac{Pa\times a}{2}\times\frac{2}{3}\frac{a}{2}\times 2+\frac{{}^{a}/_{2}+{}^{3a}/_{4}}{2}\times\frac{a}{2}\times 2\times Pa\right]$$

$$=\frac{23Pa^{3}}{24EI}$$

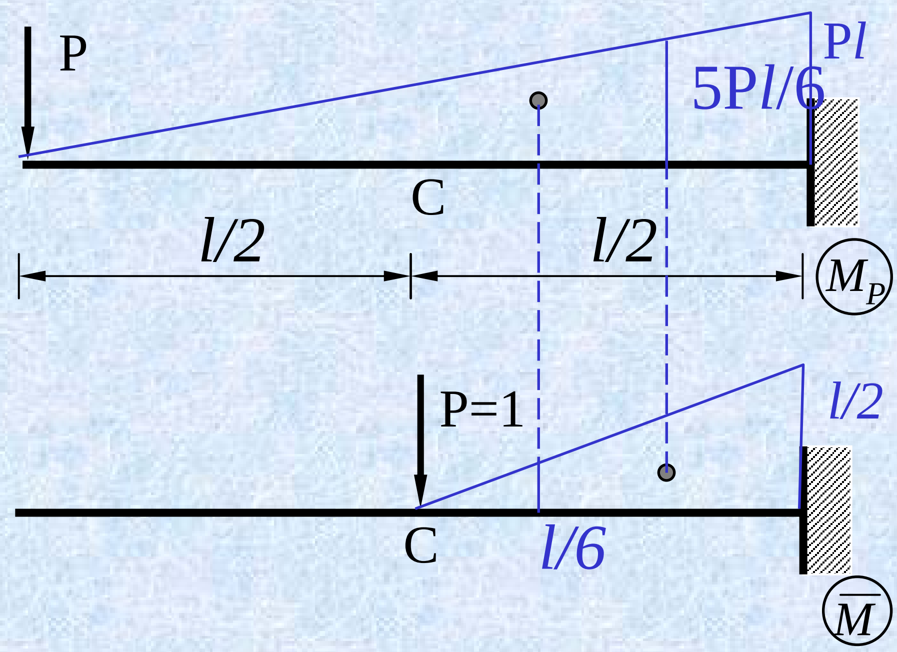


例：求图示梁C点的挠度。

$$D_C=\frac{1}{EI}\frac{Pl^{2}}{2}\frac{l}{6}=\frac{Pl^{3}}{12EI}$$?

$$\Delta_C=\frac{\omega y_0}{EI}=\left(\frac{1}{2}\times\frac{l}{2}\times\frac{l}{2}\right)\times\frac{5Pl}{6}$$

$$=\frac{5Pl^{3}}{48EI}$$



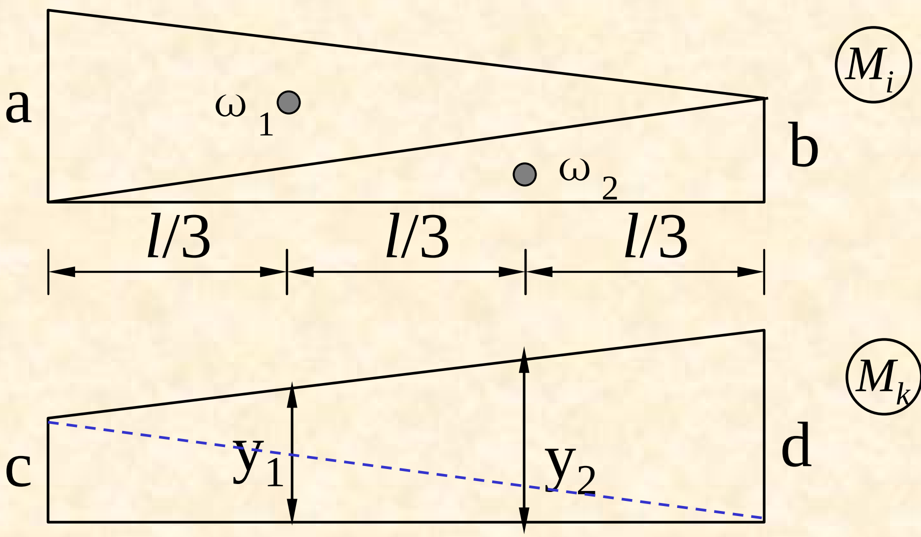
⑦非标准图形乘直线形

a）直线形乘直线形

$$\int M_i M_k dx = \omega_1 y_1 + \omega_2 y_2$$

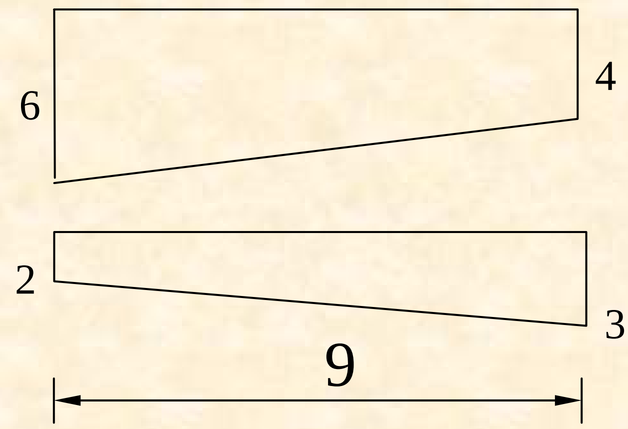
$$= \frac{al}{2}\left(\frac{2c}{3}+\frac{d}{3}\right)+\frac{bl}{2}\left(\frac{c}{3}+\frac{2d}{3}\right)$$

$$= \frac{l}{6}(2ac+2bd+ad+bc)$$



各种直线形乘直线形，都可以用该公式处理。如竖标在基线同侧乘积取正，否则取负。

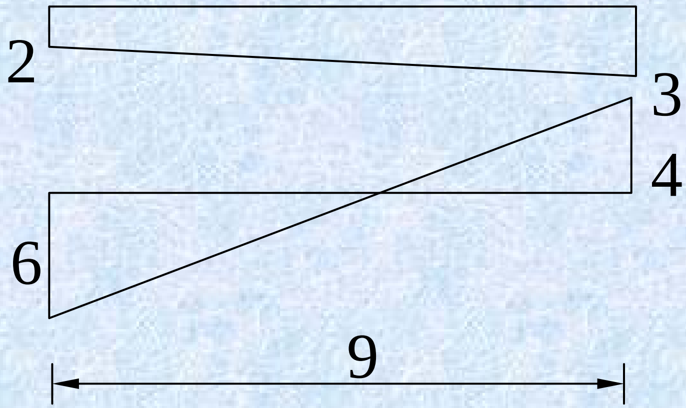
（1）



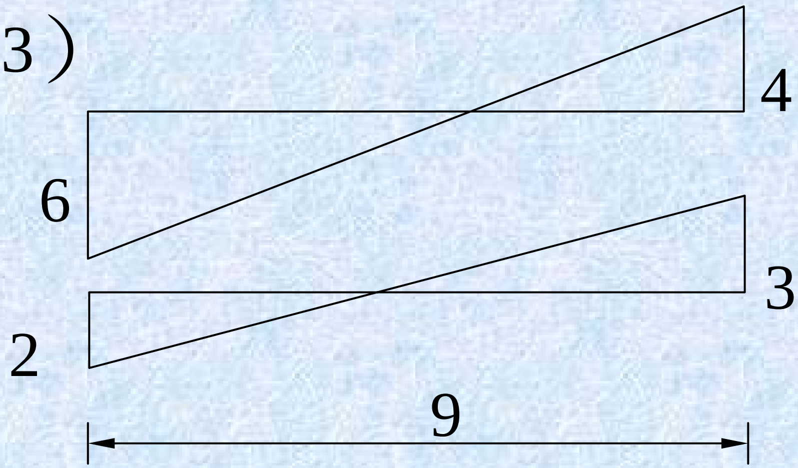
$S = 9/6 \times（2\times6\times2 + 2\times4\times3 + 6\times3 + 4\times2）= 111$

$$S=9/6\times(2\times6\times2-2\times4\times3+6\times3-4\times2)=15$$

(2)

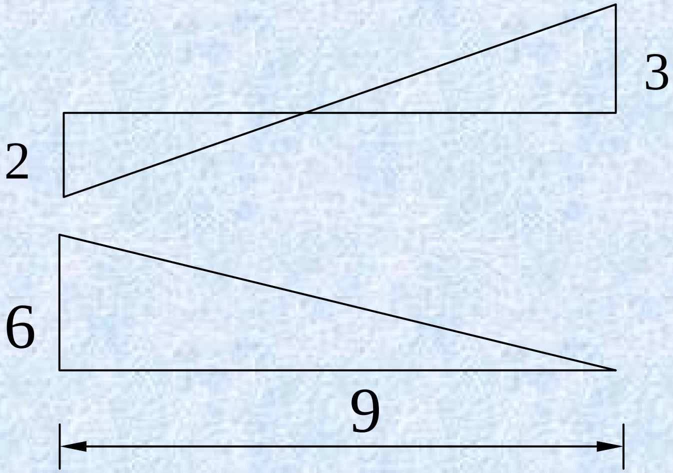


(3)



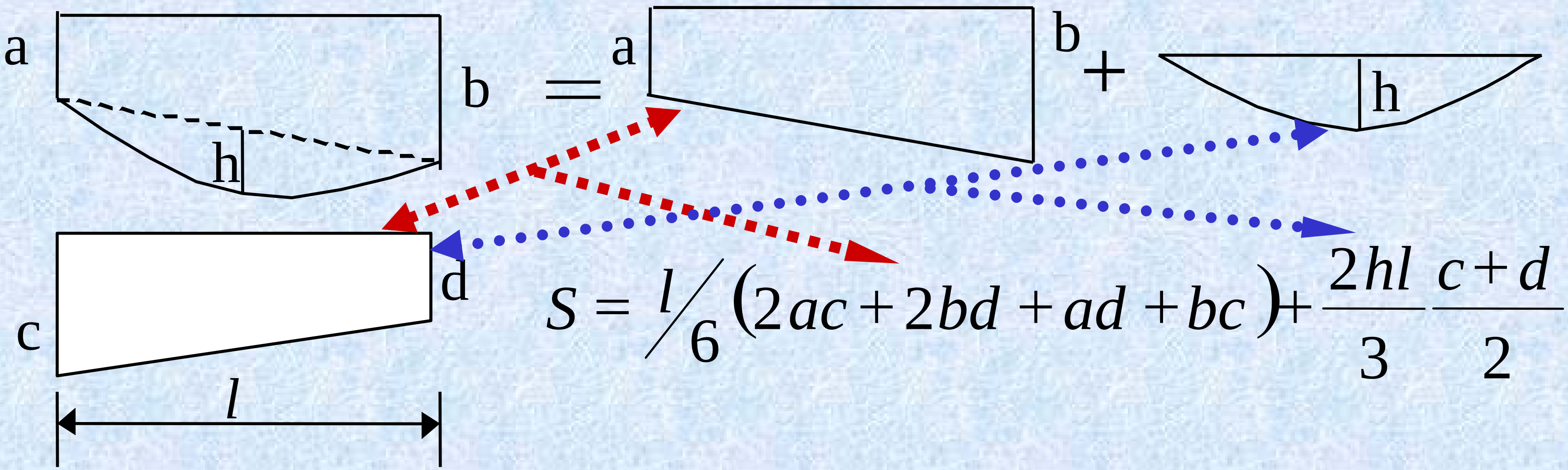
$$S=9/6\times(2\times6\times2+2\times4\times3-6\times3-4\times2)=33$$

(4)



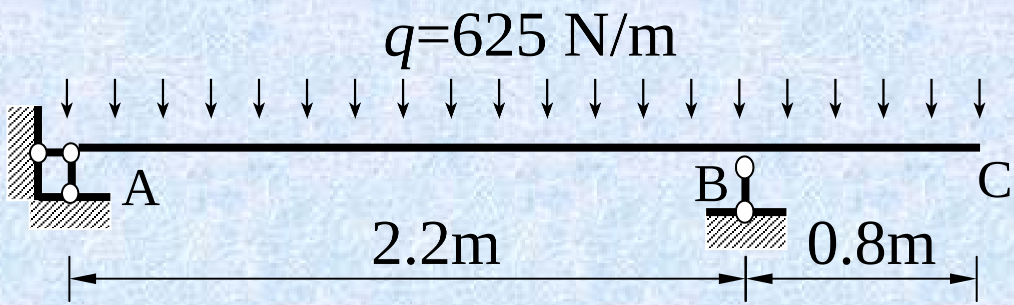
$$S=9/6\times(-2\times6\times2+2\times0\times3+6\times3-0\times2)=-9$$

b)非标准抛物线乘直线形



$$S=\frac{l}{6}\left(2ac+2bd+ad+bc\right)+\frac{2hl}{3}\,\frac{c+d}{2}$$

例： 预应力钢筋混凝土墙板单点起吊过程中的计算简图。



已知：板宽**1m**，厚**2.5cm**，混凝土容重为**25000N/m³**，求**C**点的挠度。解： $q=25000\times1\times0.025=625\ \mathrm{N/m}$

$E=3.3\times10^{10}\ \mathrm{N/m^2}$ $\quad I=1/12\times100\times2.5^3\mathrm{cm^4}=1.3\times10^{-6}\ \mathrm{m^4}$

折减抗弯刚度 $0.85EI=0.85\times1.30\times10^{-6}\times3.3\times10^{10}$

$=3.6465\times10^{4}\ \mathrm{N\,m^2}$

折减抗弯刚度

$0.85EI = 3.6465 \times 10^4 \text{Nm}^2$

$$\omega_1 = \frac{1}{2}200 \cdot 2.2 = 220$$

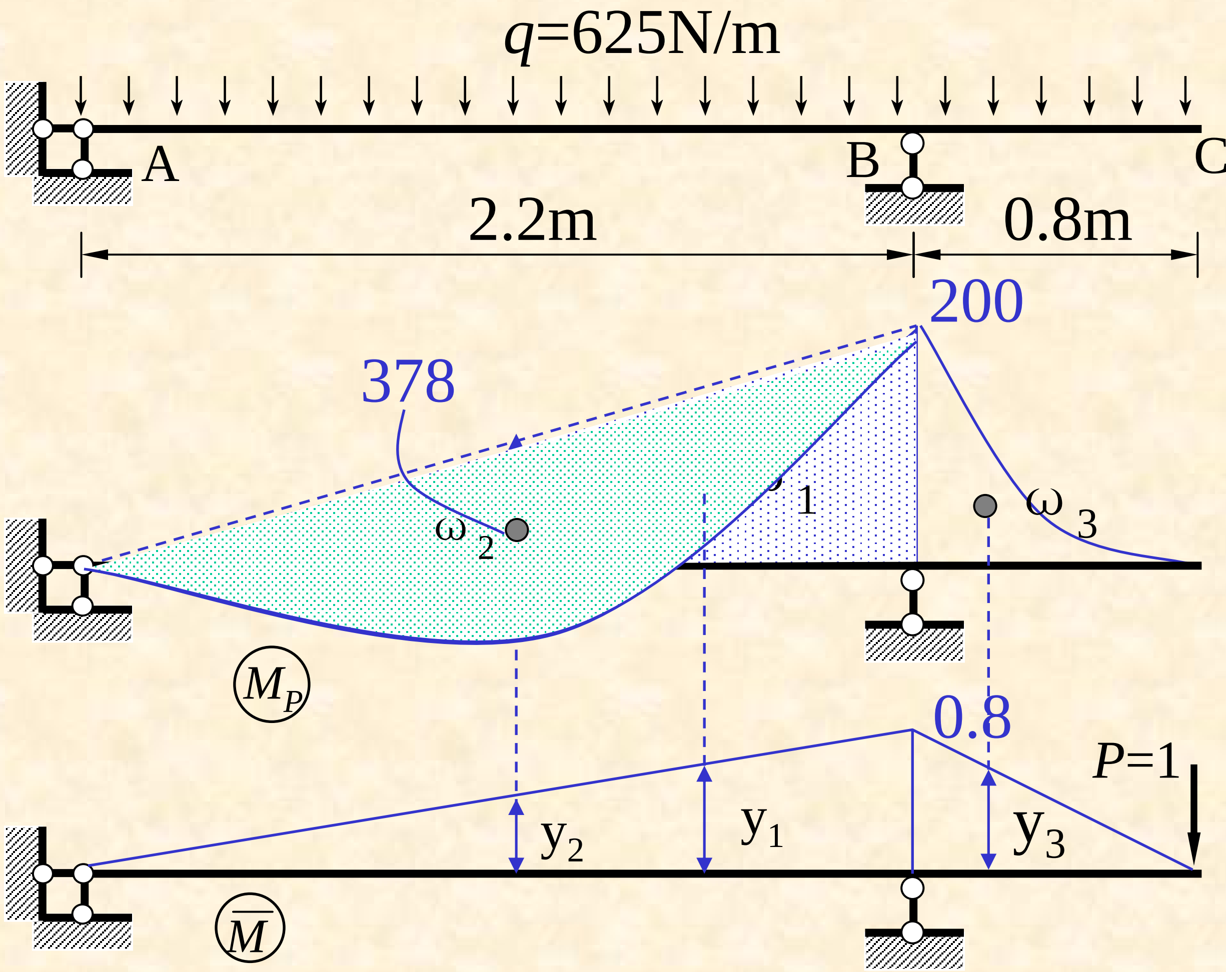
$$y_1 = \frac{2}{3}0.8 = 0.533$$

$$\omega_2 = \frac{2}{3}378 \cdot 2.2 = 555$$

$$y_2 = -\frac{1}{2}0.8 = -0.4$$

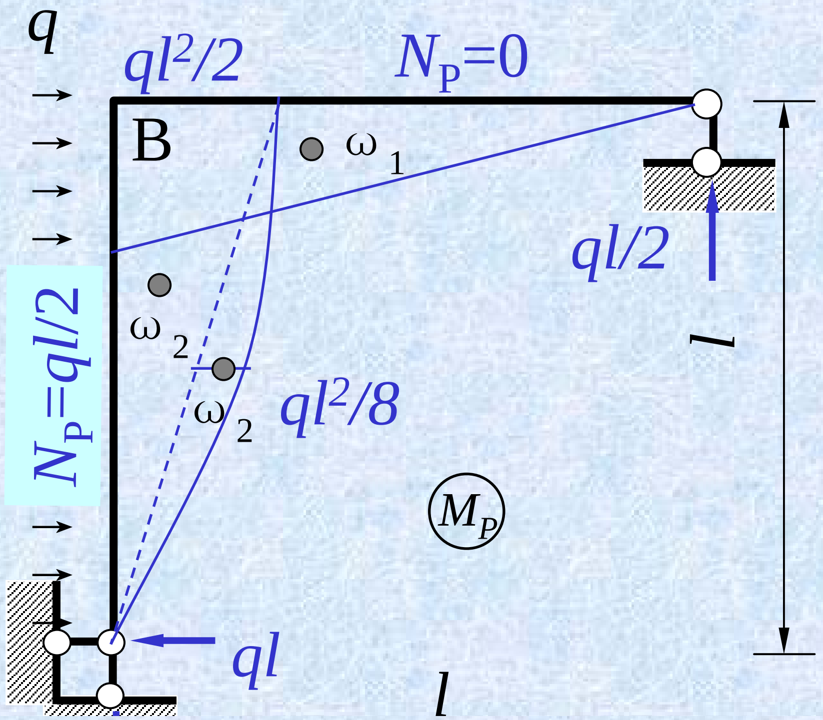
$$\omega_3 = \frac{1}{3}200 \cdot 0.8 = 53.3$$

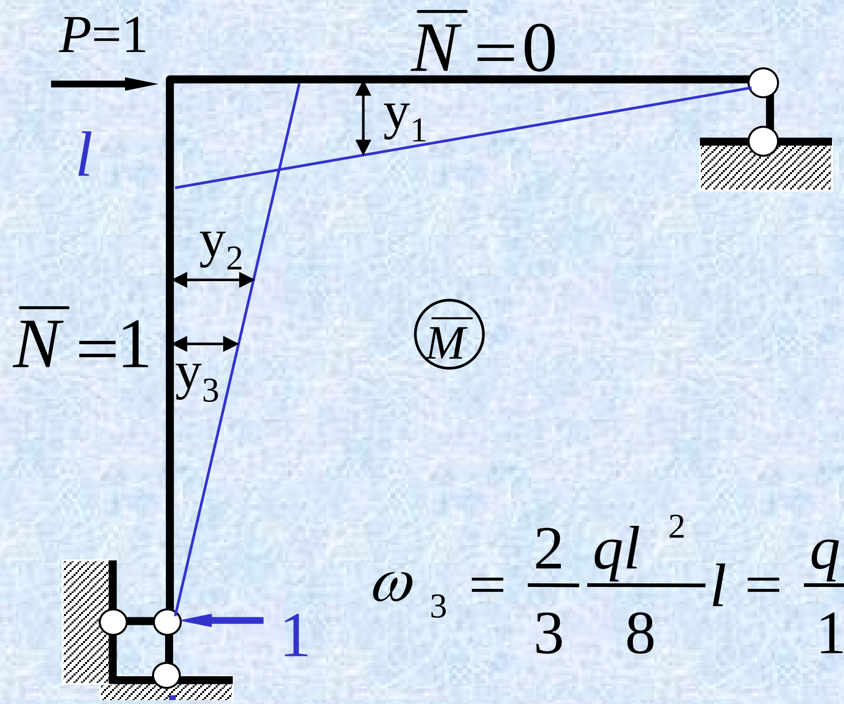
$$y_3 = \frac{3}{4}0.8 = 0.6$$



$$\Delta_C = \frac{1}{0.85EI}(\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 + \omega_3 y_3)$$

$$= \frac{1}{3.6465}\left(220 \cdot 0.533 - 555 \cdot 0.4 + 53.3 \cdot 0.6\right) = -2 \times 10^{-3} m = -0.2cm \uparrow$$





$$\omega_3=\frac{2}{3}\frac{ql^2}{8}l=\frac{ql^3}{12}$$

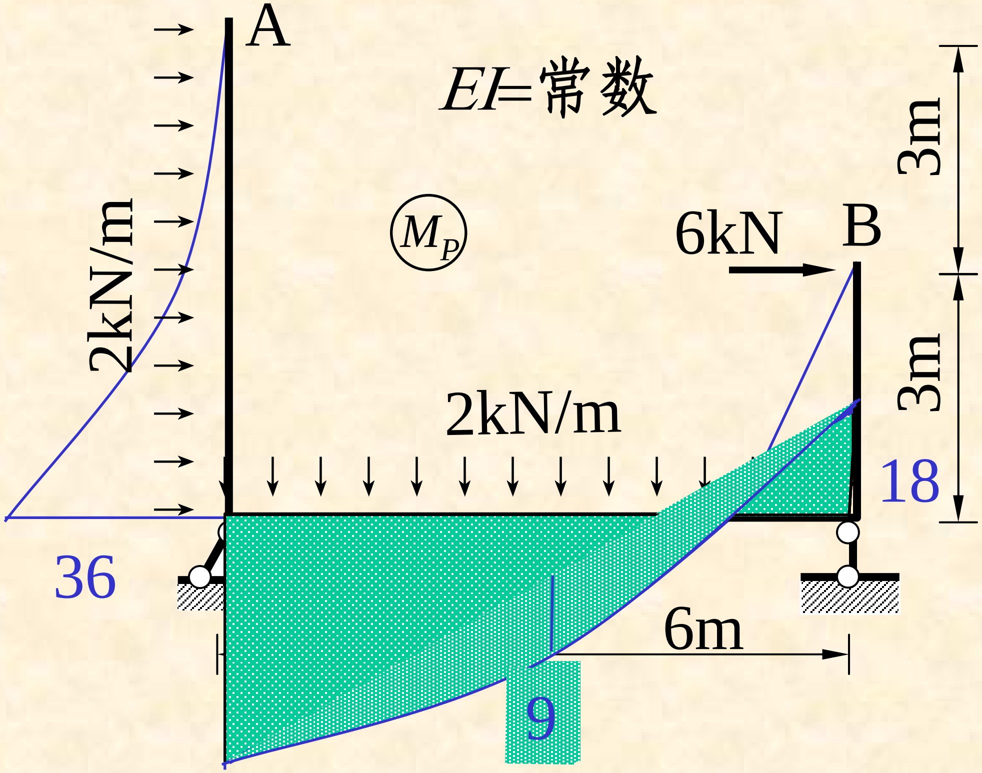
$$\Delta_N=\sum\frac{\overline{N}N_P l}{EA}=\frac{ql}{2}\times1\times\frac{l}{EA}=\frac{ql^2}{2EA}$$

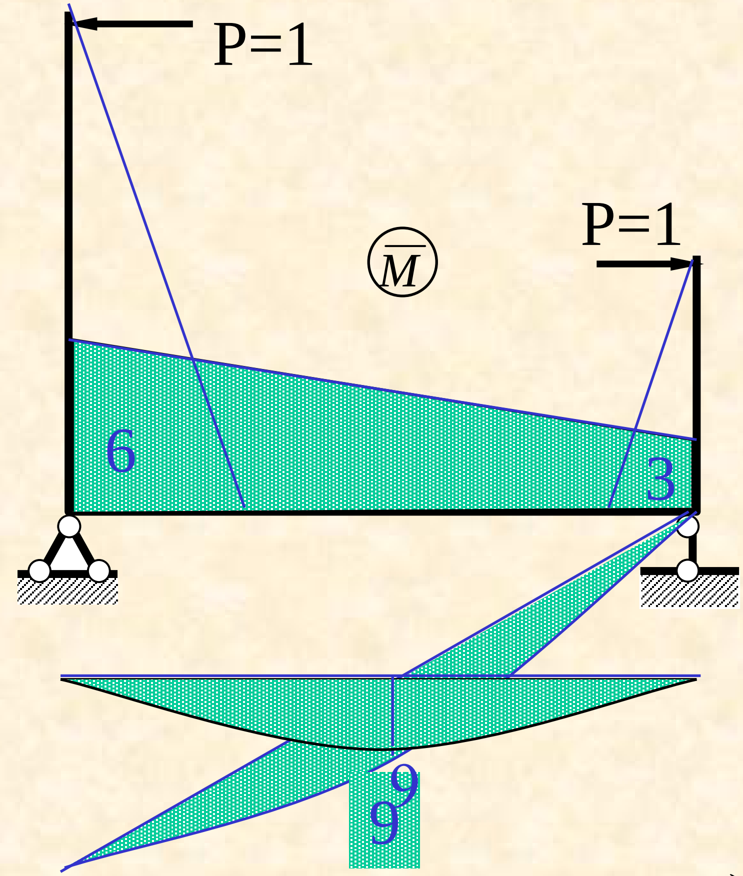
$$\Delta_M=\frac{1}{EI}(\omega_1y_1+\omega_2y_2+\omega_3y_3)$$

$$=\frac{1}{EI}\left(\frac{ql^2}{4}\frac{2l}{3}+\frac{ql^2}{4}\frac{2l}{3}+\frac{ql^2}{12}\frac{l}{2}\right)=\frac{3ql^4}{8EI}$$

$$\frac{\Delta_N}{\Delta_M}=\frac{ql^2}{2EA}\Big/\frac{3ql^4}{8EI}=\frac{4I}{3Al^2}=\frac{4\,{}^{bh^3}\!/_{12}}{3bhl^2}=\frac{h^2}{9l^2}\bigg|_{\frac{h}{l}=\frac{1}{10}}=\frac{1}{900}$$

求AB两点的相对水平位移。

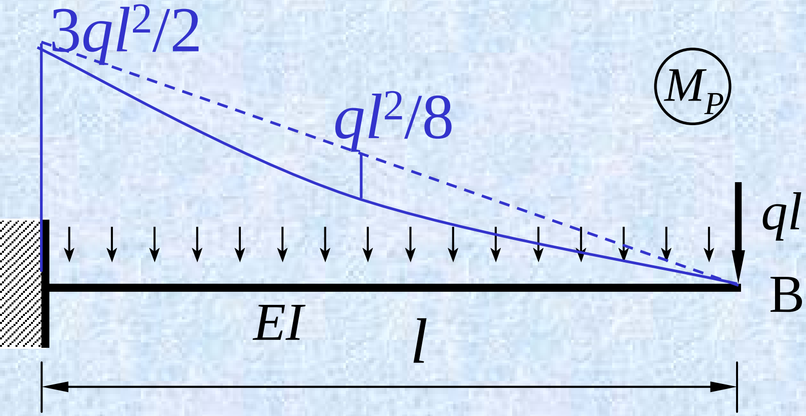


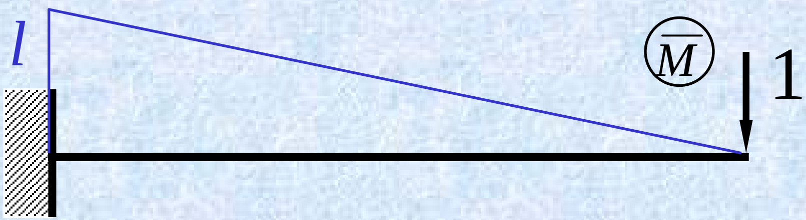


$$\Delta=\frac{1}{EI}\left(\frac{6}{6}\left(-2\times 36\times 6+2\times 18\times 3-36\times 3+18\times 6\right)-\frac{2}{3}\times 6\times 9\times\frac{3+6}{2}\right)$$

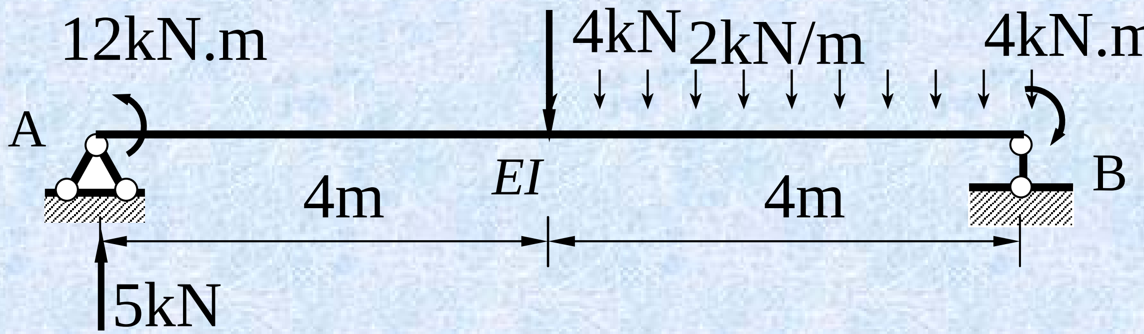
$$+\frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{3}\times 36\times 6\times\frac{3}{4}\times 6+\frac{18\times 3}{2}\times\frac{2}{3}\times 3\right)=\frac{-756}{EI}\quad(\rightarrow\leftarrow\;)$$

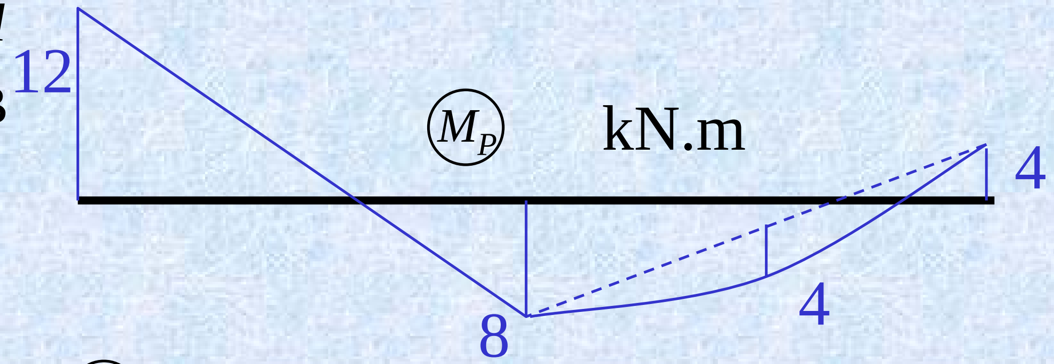
求**B**点竖向位移。

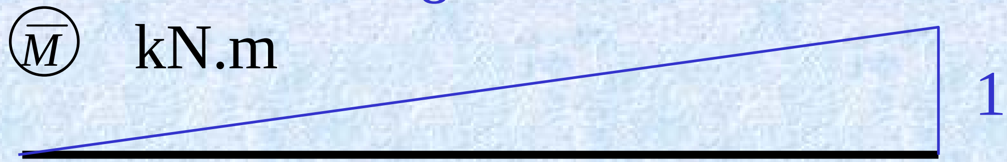




求 θ_B





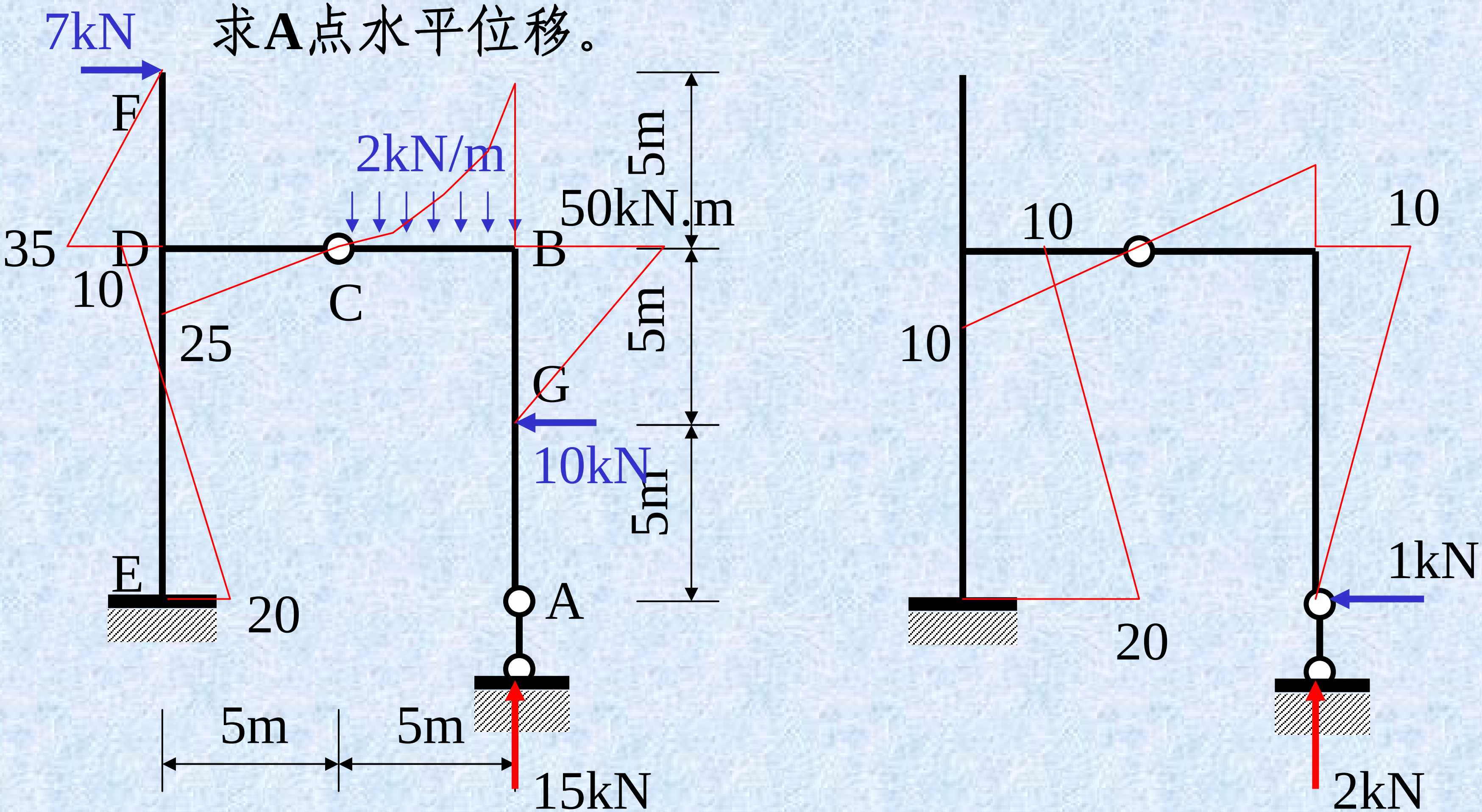


$$\Delta_{BV}=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\frac{3ql^2}{2}l\frac{2l}{3}-\frac{2l}{3}\frac{ql^2}{8}\frac{l}{2}\right]=\frac{11ql^4}{24EI}$$

$$\theta_B=\frac{1}{EI}\left[\frac{4}{6}(2\times12\times0.5-8\times0.5)+\frac{4}{6}(-2\times8\times0.5+2\times4\times1-8\times1+4\times0.5)\right.$$

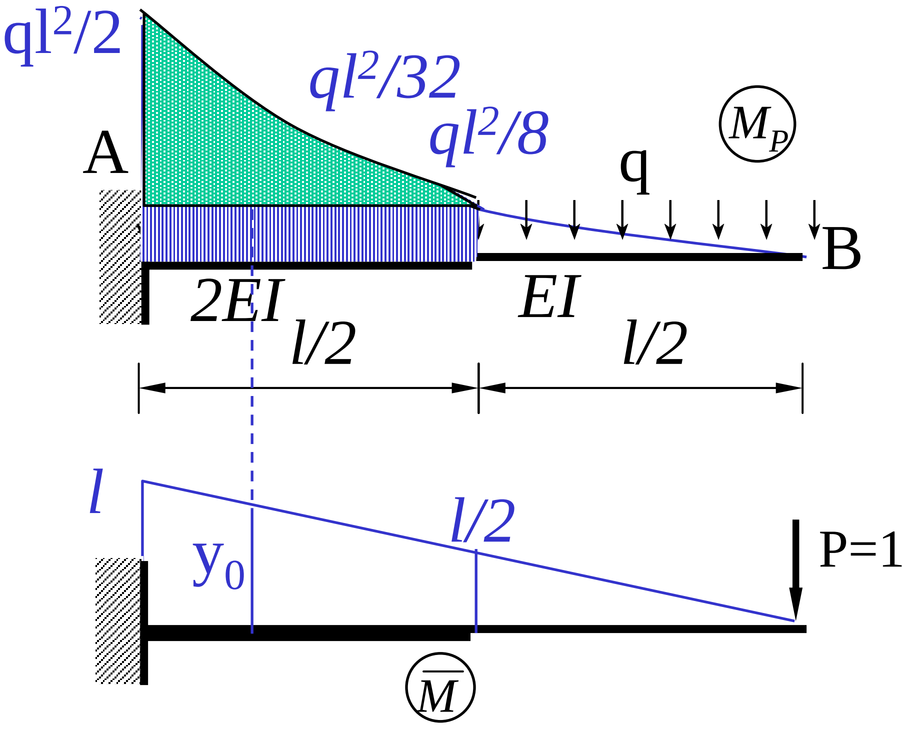
$$\left.-\frac{2}{3}\times4\times4\bullet0.75\right]=-\frac{20}{3EI}$$

求**A**点水平位移。



$$\Delta_{AH} = \frac{3187.5}{EI} = 1.594 \times 10^{-2} \ \mathrm{m}$$

求**B**点的竖向位移。



$$\Delta_B = \frac{1}{EI}\frac{1}{3}\frac{ql^2}{2}l \bullet \frac{3l}{4} = \frac{ql^4}{8EI} \quad ?$$

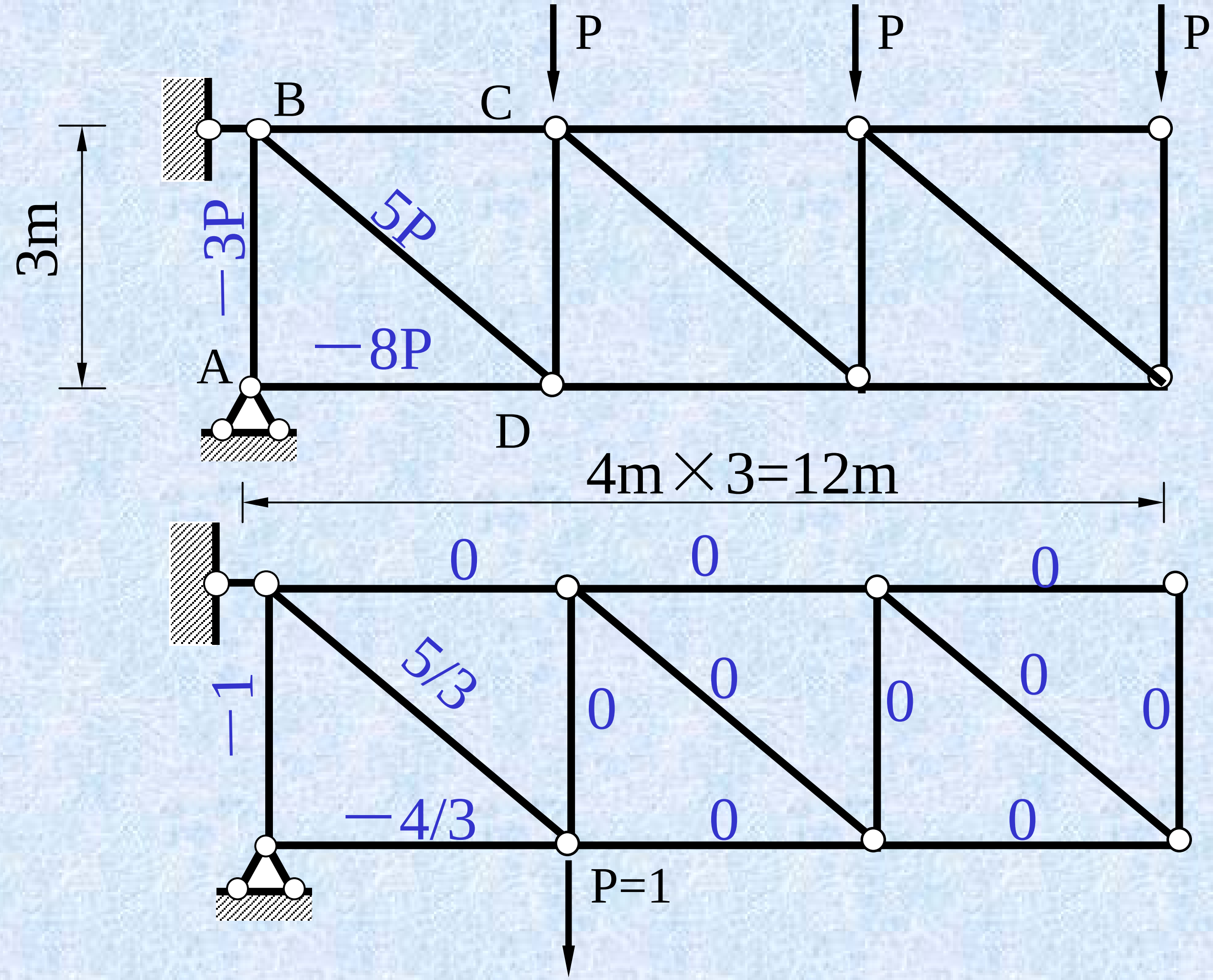
$$\Delta_B = \frac{1}{2EI}\frac{1}{3}\frac{3ql^2}{8}\frac{l}{2} \bullet y_0 + \cdots \quad ?$$

$$\Delta_B = \frac{1}{EI}\frac{1}{3}\frac{ql^2}{8}\frac{l}{2} \bullet \frac{3 \bullet \frac{l}{2}}{4}$$

$$+\frac{1}{2EI}\frac{0.5l}{6}\left[2\frac{ql^2}{2}l + 2\frac{ql^2}{8}\frac{l}{2} + \frac{ql^2}{2}\frac{l}{2} + \frac{ql^2}{8}l\right]$$

$$-\frac{1}{2EI}\frac{2}{3}\frac{ql^2}{32}\frac{l}{2} \bullet \frac{l+0.5l}{2} = \frac{17ql^4}{256EI}$$

求 Δ_{DV}

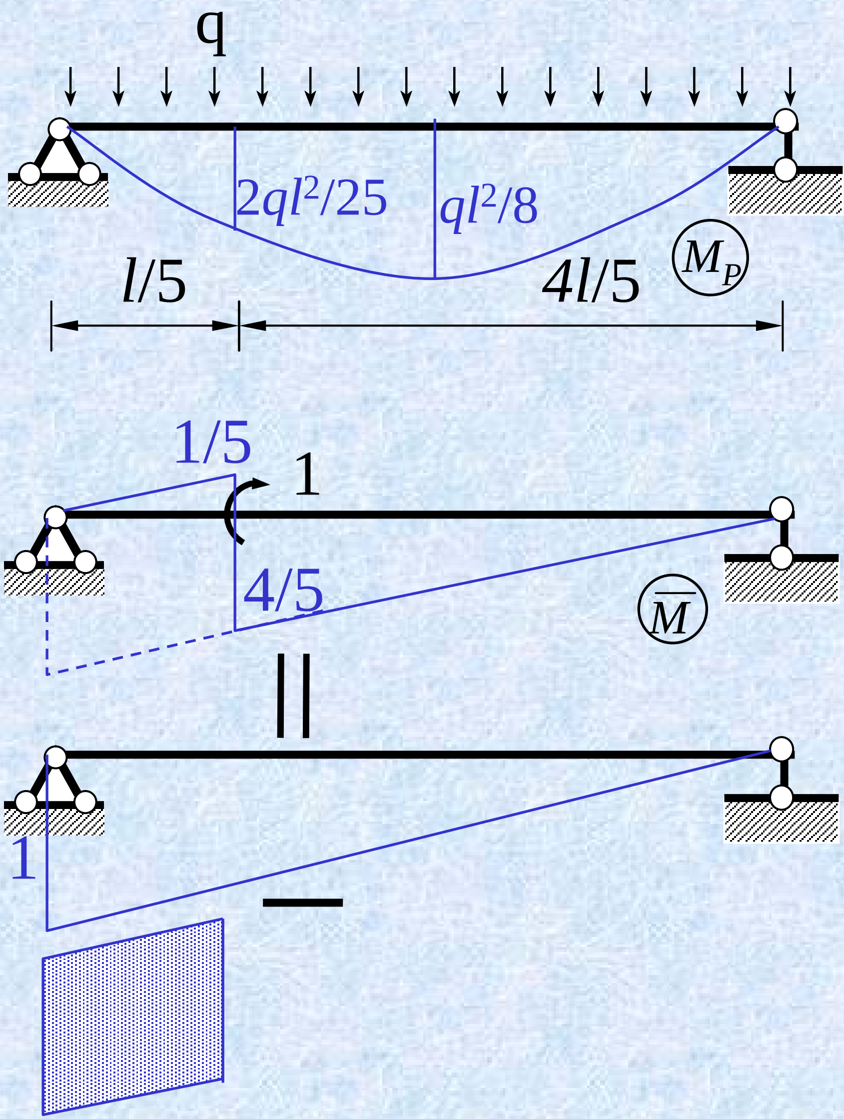


$$\Delta_{DV}=\frac{1}{EA}\left[3P\bullet1\bullet3+5P\frac{5}{3}5+8P\frac{4}{3}4\right]=\frac{280P}{3EA}$$

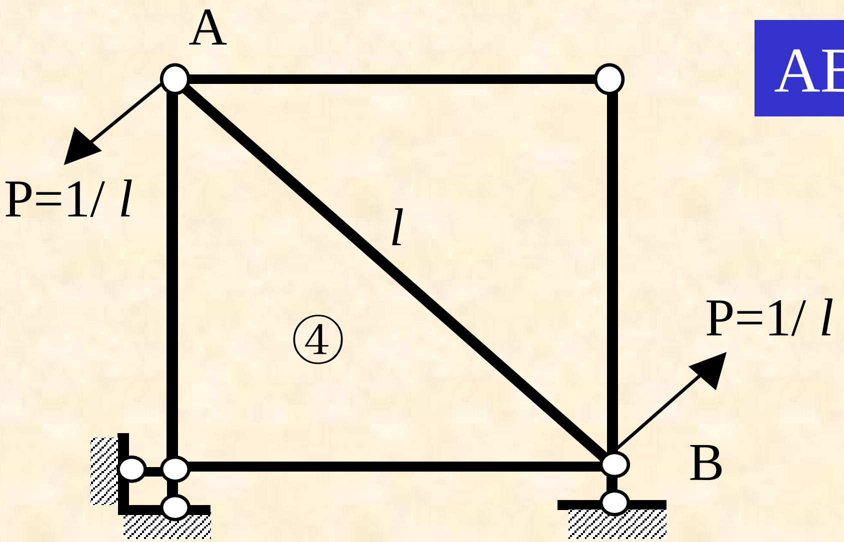
例：试求等截面简支梁C截面的转角。

$$\theta_C=\frac{1}{EI}\left[\frac{2}{3}\bullet\frac{ql^2}{8}\bullet l\bullet\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\bullet\frac{l}{5}\bullet\frac{2ql^2}{25}+\frac{2}{3}\bullet\frac{l}{5}\bullet\frac{ql^2}{8\bullet 25}\right)\bullet 1\right]$$

$$=\frac{33ql^3}{100EI}$$

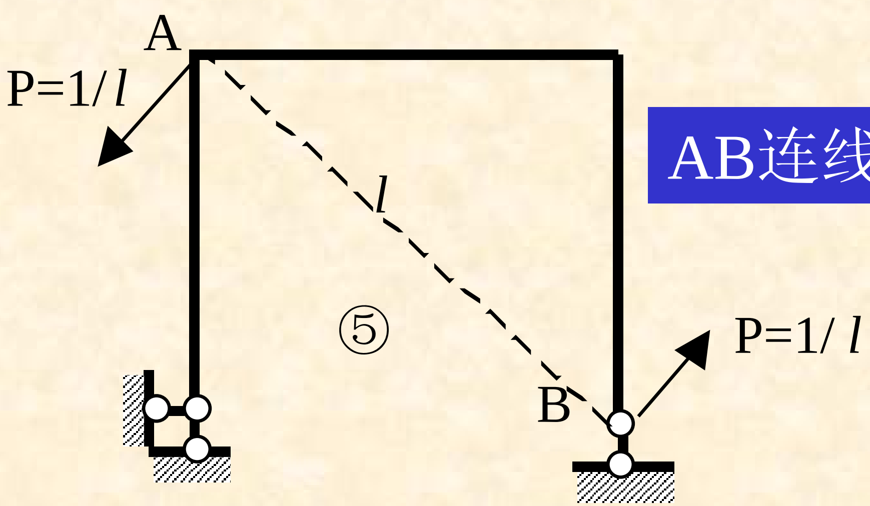


2-1、图示虚拟的广义单位力状态，可求什么位移。

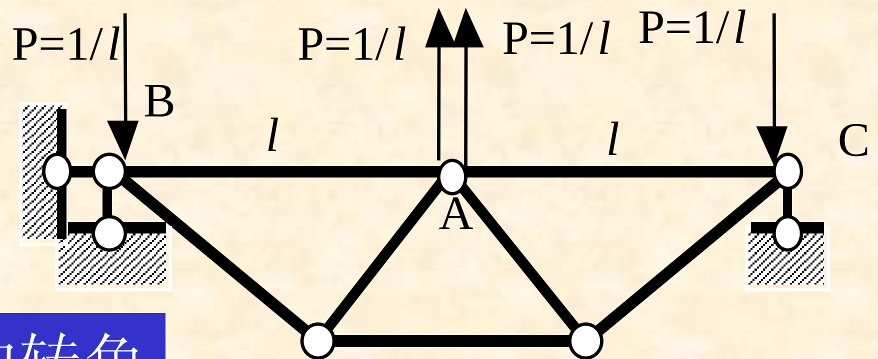


AB杆的转角

(   )



AB连线的转角



AB杆和AC杆的相对转角

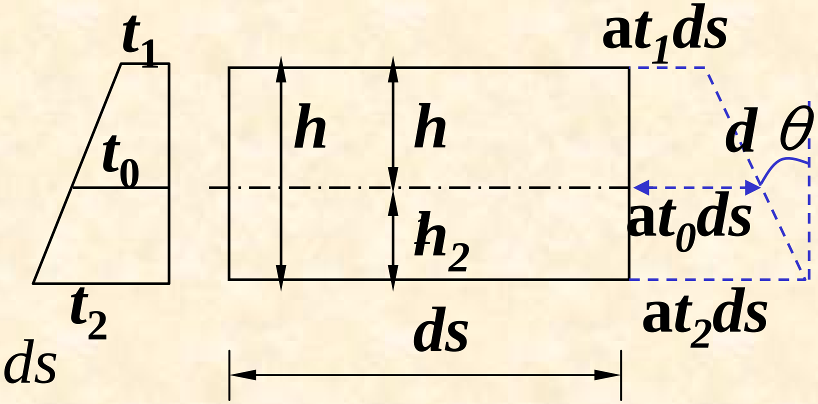
§9-6 静定结构由于温度改变而产生的位移计算

1）温度改变对静定结构不产生内力，变形和位移是材料自由膨胀、收缩的结果。

2）假设：温度沿截面高度为线性分布。

$t_0 = (h_1 t_2 + h_2 t_1)/h$

$\Delta t = t_2 - t_1$



3）微段的变形

$e = \alpha t_0$

$\kappa = d\theta / ds = [\alpha(t_2 - t_1)ds/h]/ds$

$= \alpha \Delta t/h$

$\gamma = 0$

$$\Delta = \sum\int\left(\overline{M}\kappa_2 + \overline{Q}\gamma_2 + \overline{N}\varepsilon_2\right)ds - \sum \overline{R_k} c_k$$

$$\Delta_{it} = \sum\int \overline{N}\alpha t_0 ds \pm \sum\int \overline{M}\frac{\alpha\Delta t}{h} ds$$

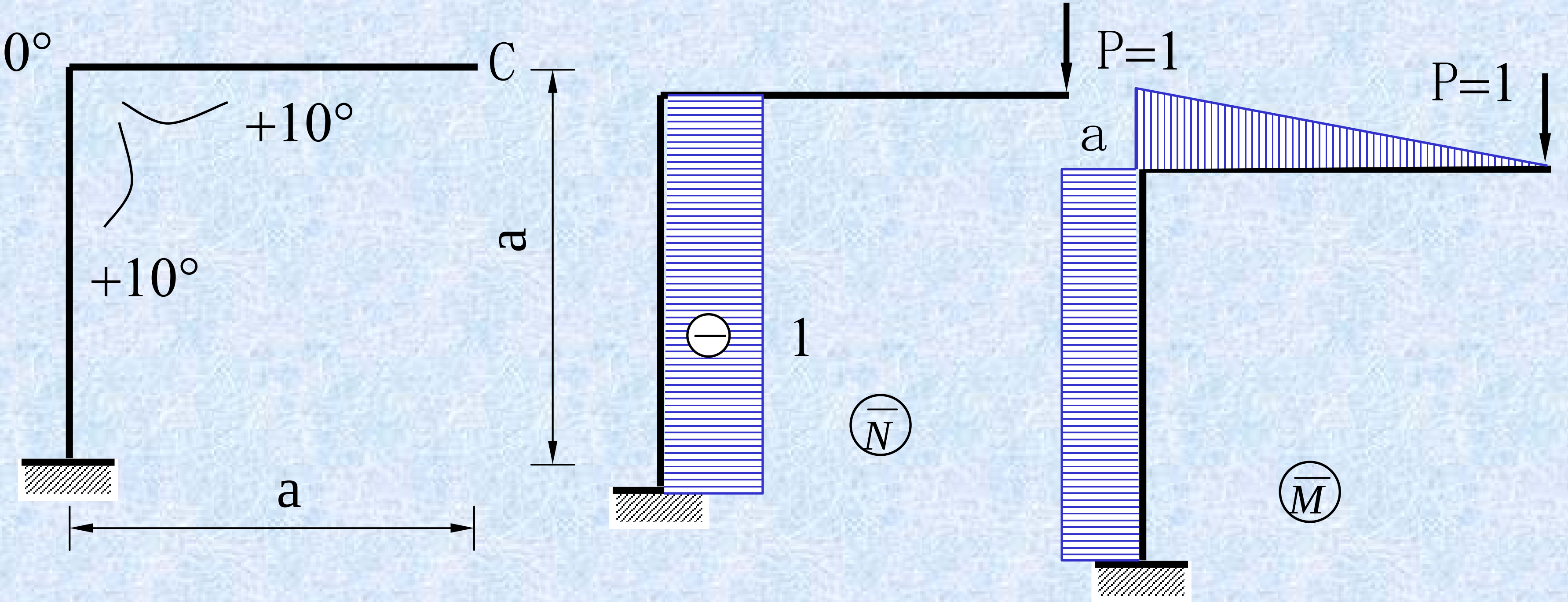
$$= \sum \alpha t_0 \int \overline{N} ds \pm \sum \frac{\alpha\Delta t}{h}\int \overline{M} ds$$

$\overline{N}$拉为正，t_0升温为正；Δt、ω_M取绝对值计算，正负号直观确定。

$$\Delta_{it} = \sum \alpha t_0 \omega_{\overline{N}} \pm \sum \frac{\alpha\Delta t}{h}\omega_{\overline{M}}$$

该公式仅适用于静定结构

例9-11 求图示刚架C点的竖向位移。各杆截面为矩形。



$$t_0=\frac{10^\circ+0}{2}=5^\circ \qquad \Delta t=10^\circ-0^\circ=10^\circ$$

$$\Delta_c=\sum\frac{\alpha\Delta t}{h}\omega_{\overline{M}}+\sum\alpha t_0\omega_{\overline{N}}$$

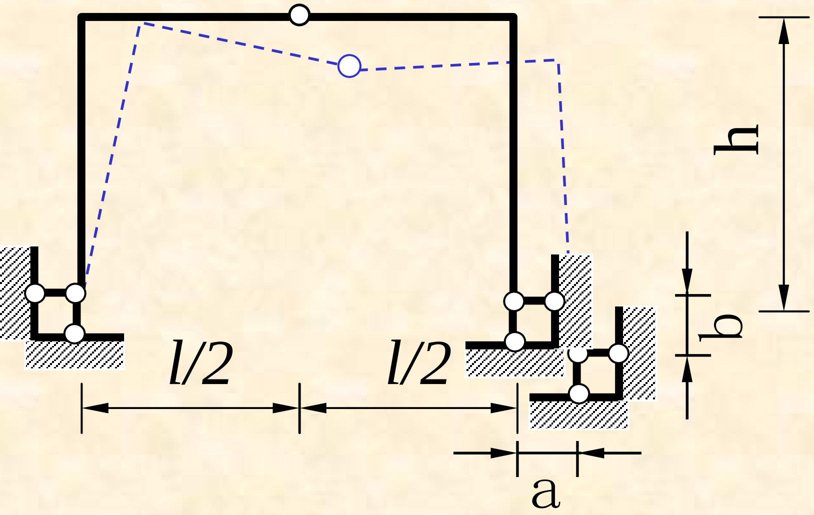
$$=\frac{-10\alpha}{h}\frac{3a^2}{2}+5\alpha(-a)=-5\alpha a\left(1+\frac{3a}{h}\right)$$

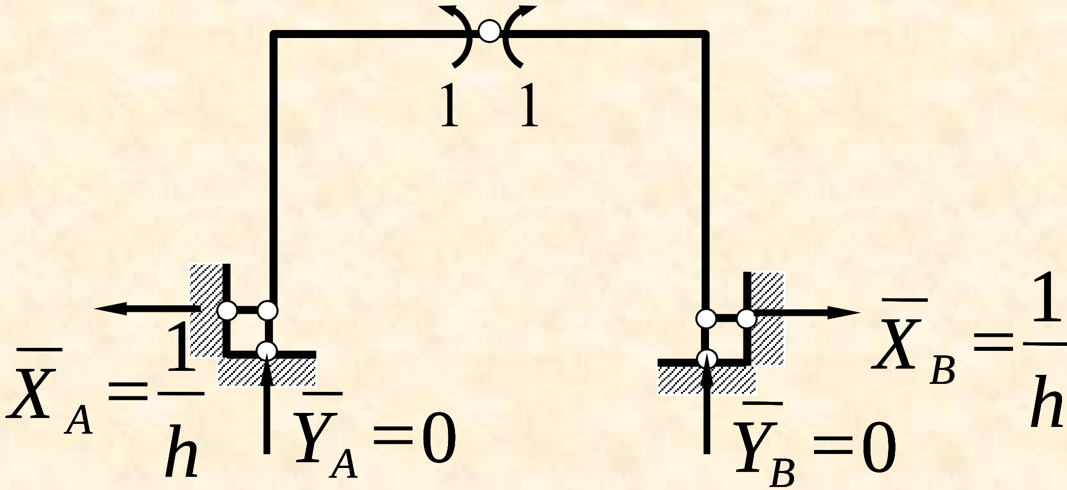
§9-7 静定结构由于支座移动而产生的位移计算

静定结构由于支座移动不会产生内力和变形，所以ε=0，κ=0，γ=0。代入

$$\Delta = \sum \int \left(\overline{M}\kappa_2 + \overline{Q}\gamma_2 + \overline{N}\varepsilon_2 \right) ds - \sum \overline{R_k} c_k$$

得到：$\Delta_{ic} = -\sum \overline{R}_K \bullet c_K$　　仅用于静定结构





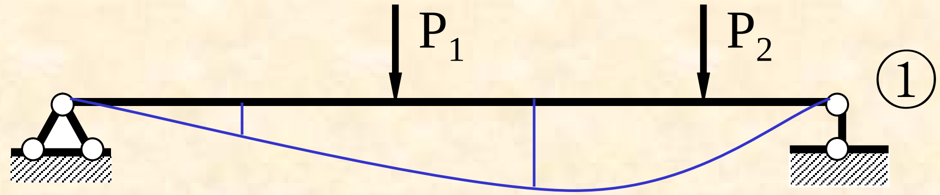
$$\Delta = -\sum \overline{R} c = -\frac{a}{h}(\text{弧度})$$

§9-7 互等定理

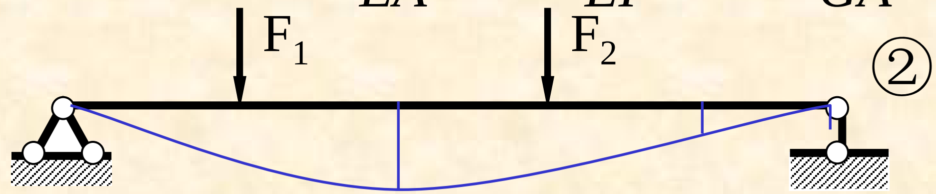
应用条件：1) 应力与应变成正比；

2) 变形是微小的。

即：线性变形体系。



$N_1\ M_1\ Q_1\quad \varepsilon_1=\dfrac{N_1}{EA}\quad \kappa_1=\dfrac{M_1}{EI}\quad \gamma_{01}=\dfrac{kQ_1}{GA}$



一、功的互等定理

$N_2\ M_2\ Q_2\quad \varepsilon_2=\dfrac{N_2}{EA}\quad \kappa_2=\dfrac{M_2}{EI}\quad \gamma_{02}=\dfrac{kQ_2}{GA}$

$$W_{12}=\sum P_1\Delta_2=\sum\int\left(\frac{N_1N_2}{EA}+\frac{M_1M_2}{EI}+\frac{kQ_1Q_2}{GA}\right)ds$$

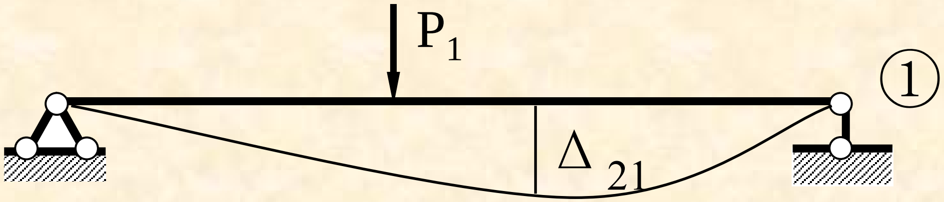
$$W_{21}=\sum F_2\Delta_1=\sum\int\left(\frac{N_2N_1}{EA}+\frac{M_2M_1}{EI}+\frac{kQ_2Q_1}{GA}\right)ds$$

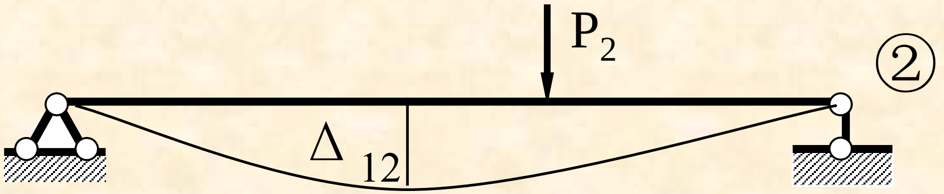
功的互等定理： 在任一线性变形体系中，状态①的外力在状态②的位移上作的功W_{12}等于状态②的外力在状态①的位移上作的功W_{21}。即： $W_{12}=W_{21}$

二、位移互等定理

$$P_1\Delta_{12}=P_2\Delta_{21}$$

$$\Delta_{12}/P_2=\Delta_{21}/P_1$$





$\delta_{ij}=\Delta_{ij}/P_j$ 称为位移影响系数，等于$P_j=1$所引起的与P_i相应的位移。

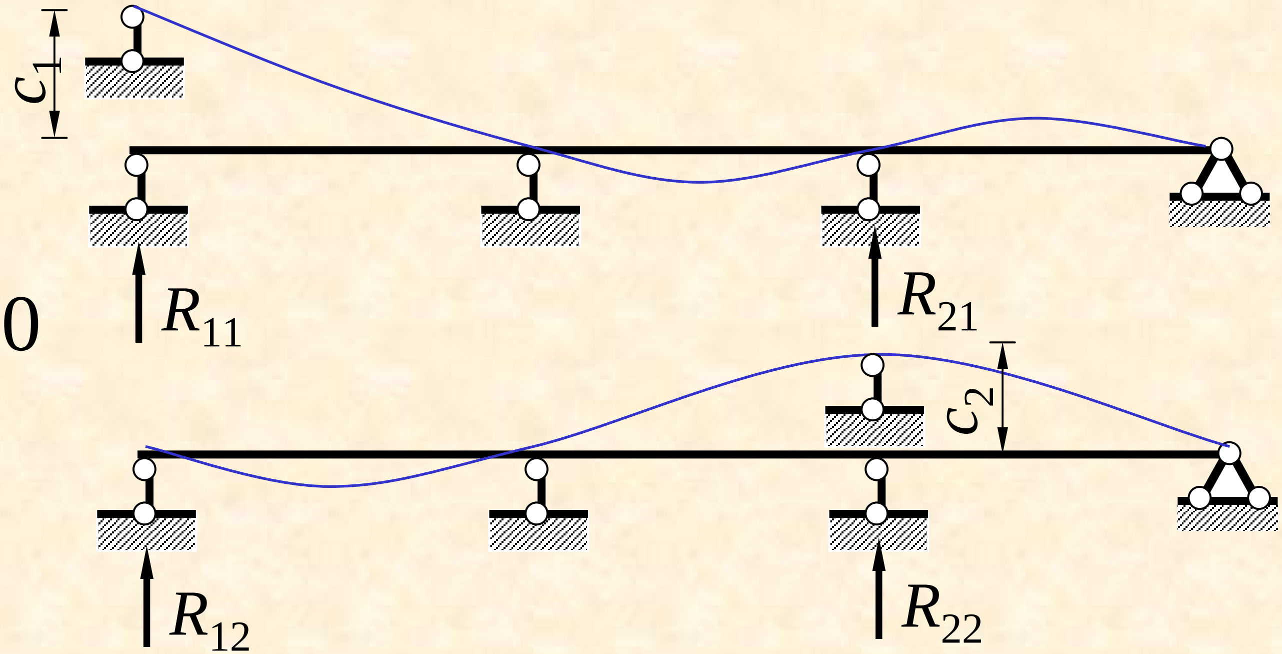
$$\delta_{12}=\delta_{21}$$

位移互等定理：在任一线性变形体系中，由荷载P_1所引起的与荷载P_2相应的位移影响系数 δ_{21} 等于由荷载P_2所引起的与荷载P_1相应的位移影响系数 δ_{12} 。或者说,由单位荷载$P_1=1$所引起的与荷载P_2相应的位移 δ_{21}等于由单位荷载$P_2=1$所引起的与荷载P_1相应的位移 δ_{12} 。

注意：1）这里荷载可以是广义荷载，位移是相应的广义位移。

2）δ_{12}与 δ_{21}不仅数值相等，量纲也相同。

三、反力互等定理



$$R_{11}\times 0+R_{21}\times c_2$$
$$=R_{12}\times c_1+R_{22}\times 0$$

$$R_{21}/c_1=R_{12}/c_2$$

$r_{ij}=R_{ij}/c_j$ 称为反力影响系数，等于c_j=1所引起的与c_i相应的反力。

$$r_{12}=r_{21}$$

反力互等定理： 在任一线性变形体系中，由位移c_1所引起的与位移c_2相应的反力影响系数r_{21}等于由位移c_2所引起的与位移c_1相应的反力影响系数r_{12}。或者说,由单位位移c_1=1所引起的与位移c_2相应的反力r_{21}等于由单位位移c_2=1所引起的与位移c_1相应的反力r_{12}。

注意：1）这里支座位移可以是广义位移，反力是相应的广义力。

2）反力互等定理仅用于超静定结构。

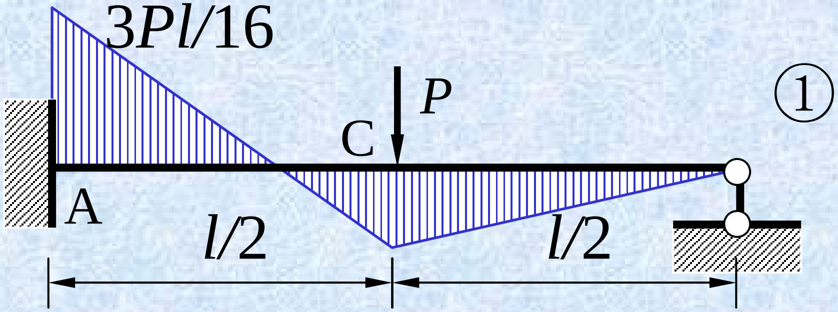
例：已知图①结构的弯矩图求同一结构②由于支座**A**的转动引起**C**点的挠度。

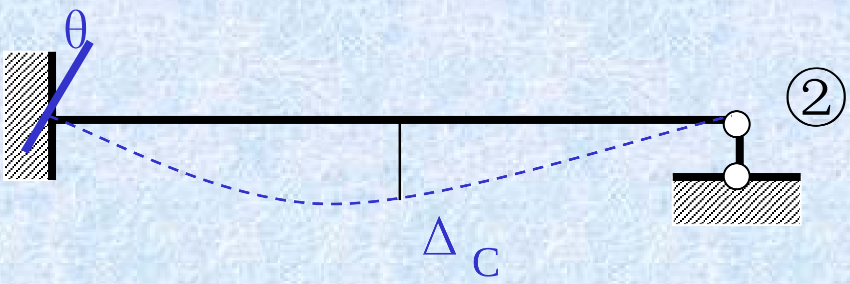
解：$W_{12}=W_{21}$

$\because \quad T_{21}=0$

$\therefore \quad W_{12}=P\Delta_C - 3Pl/16\times\theta = 0$

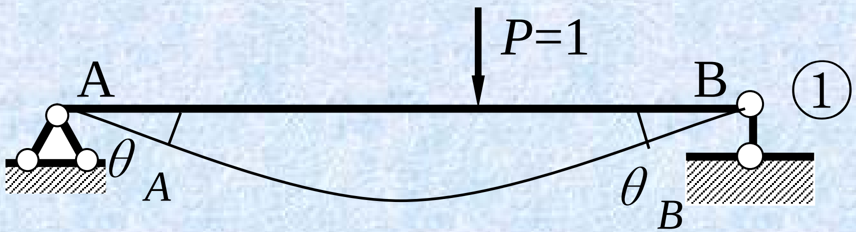
$\Delta_C = 3l\theta/16$

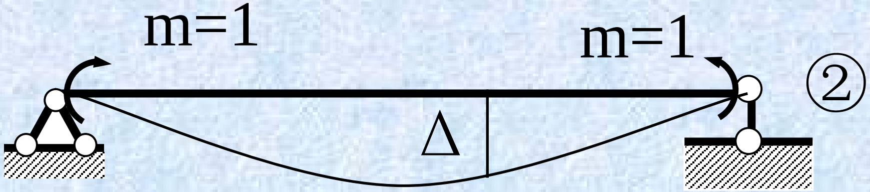




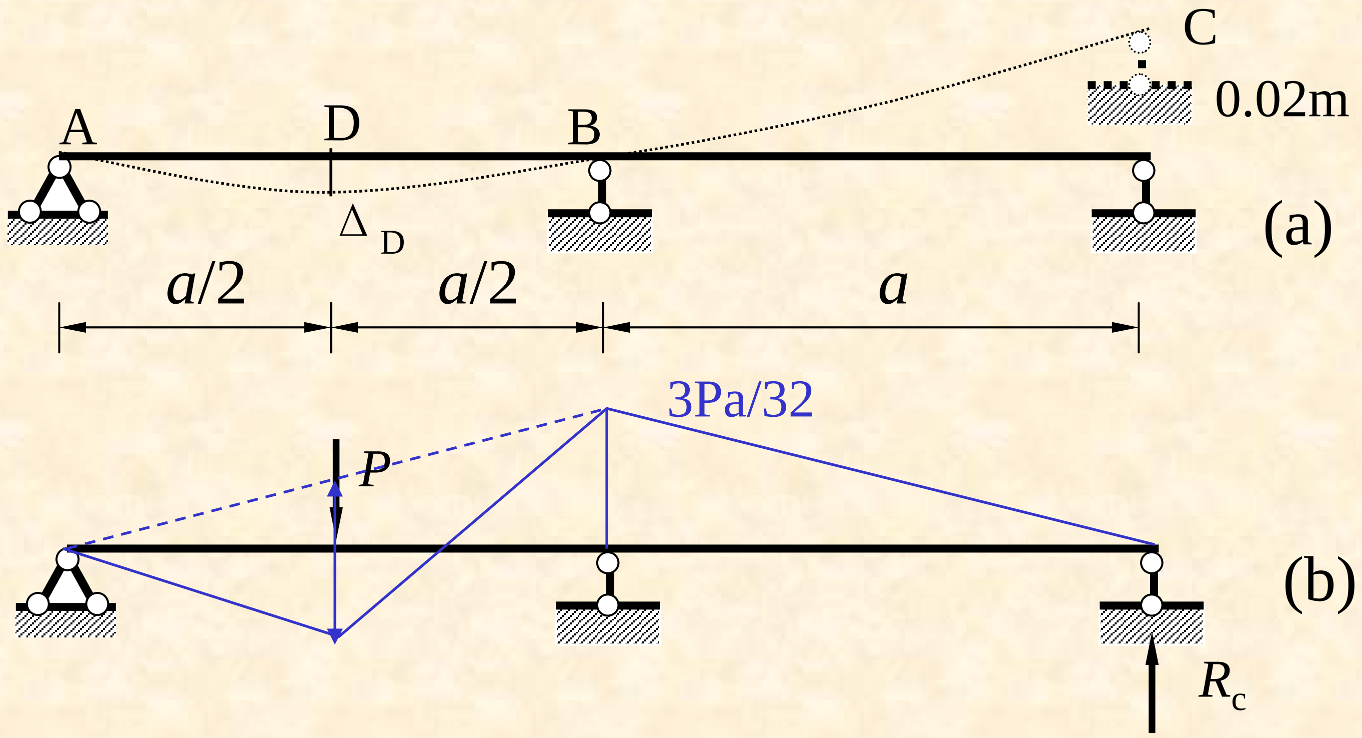
例：图示同一结构的两种状态，求Δ=?

$\Delta = \theta_A + \theta_B$





已知图a梁支座C上升0.02m引起的Δ_D=0.03m/16，试绘图b的M图.



$W_{ab}=0=\ W_{ba}=P\cdot\Delta_D+R_C\cdot\ \Delta_C$

$R_C=-3P/32$

小结

一、虚功原理$W_e=W_i$

虚设位移 → 虚位移原理（求未知力）虚功方程等价于平衡条件

虚设力系 → 虚力原理（求未知位移）虚功方程等价于位移条件

力：满足平衡

位移：变形连续

二、$$\Delta=\sum\int\frac{\overline{M}M_P}{EI}ds+\sum\frac{\overline{N}N_P}{EA}l-\sum\overline{R}_K\bullet c_K$$

刚架、梁　　桁架　　支座移动

组合结构、拱

- 各项含义
- 虚设广义单位荷载的方法

三、图乘法求位移　$$\Delta=\sum\int\frac{\overline{M}M_P}{EI}dx=\sum\frac{\omega y_0}{EI}$$

- 图乘法求位移的适用条件
- y_0的取法

- 标准图形的面积和形心位置
- 非标准图形乘直线形的处理方法

四、互等定理

- 适用条件
- 内容

$$W_{12}=W_{21}\quad\begin{cases}\delta_{12}=\delta_{21}\\ r_{12}=r_{21}\end{cases}$$