矩阵位移法

1 概 述

矩阵位移法是以结构位移为基本未知量，借助矩阵进行分析，并用计算机解决各种杆系结构受力、变形等计算的方法。

理论基础：位移法
分析工具：矩阵
计算手段：计算机

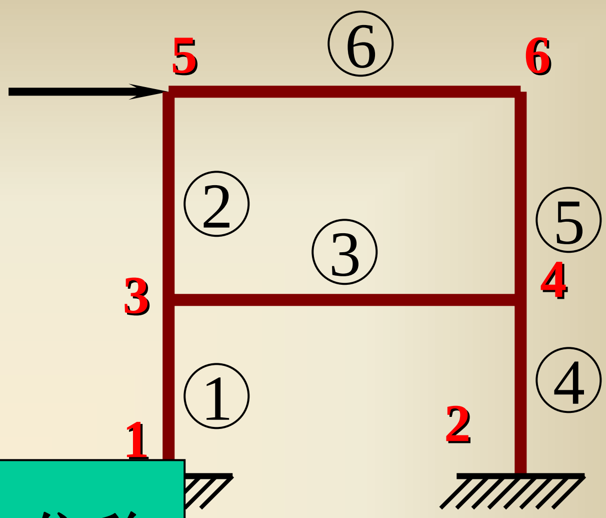
基本思想:

- 化整为零 ------ 结构离散化

将结构拆成杆件,杆件称作单元.

单元的连接点称作结点.

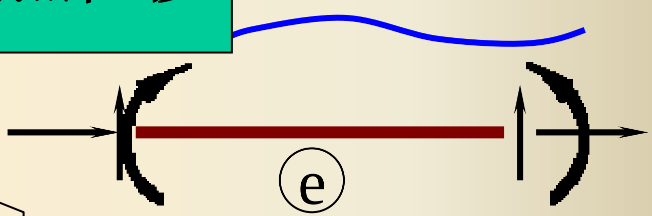
对单元和结点编码.



基本未知量:结点位移

- 单元分析

单元杆端力 ⇔ 单元杆端位移



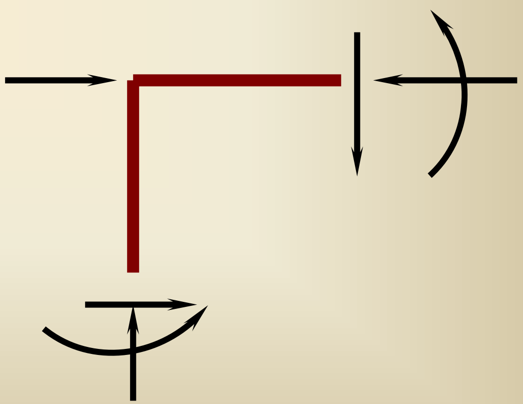
- 集零为整 ------ 整体分析

结点外力 ⇔ 单元杆端力

结点外力 ⇔ 单元杆端位移

(杆端位移=结点位移)

结点外力 ⇔ 结点位移



2 矩阵位移法解连续梁

一.离散化

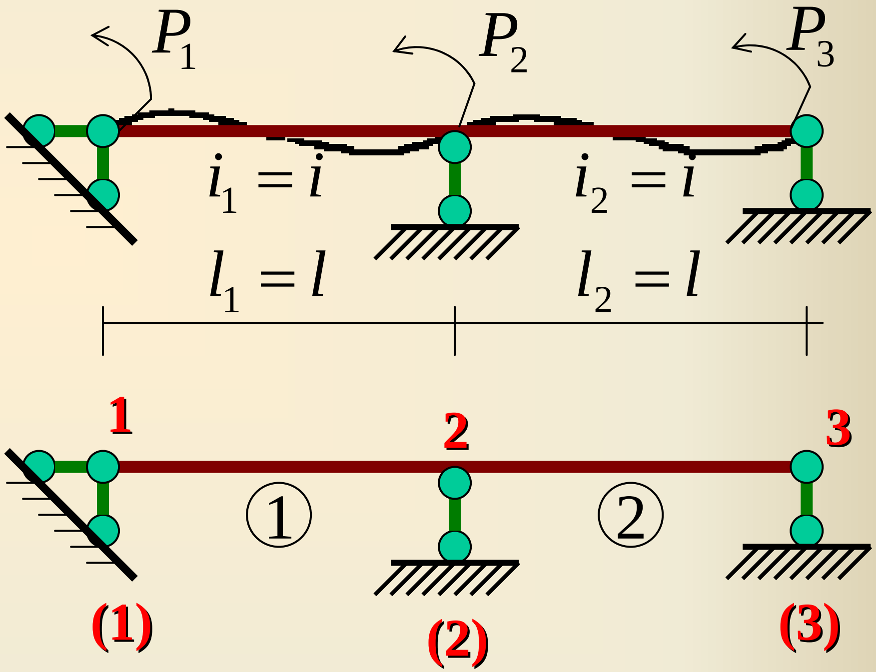
结点位移逆时针为整,
结点力逆时针为整.

① ② ----单元编码

1,2,3 ----结点编码

(1),(2),(3) ----结点位移编码

----整体编码

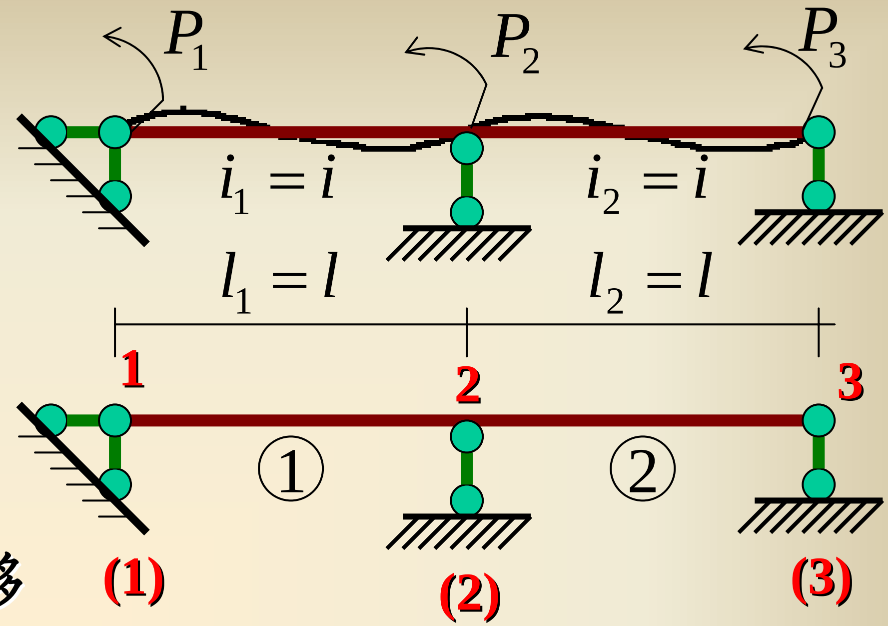


二.单元分析

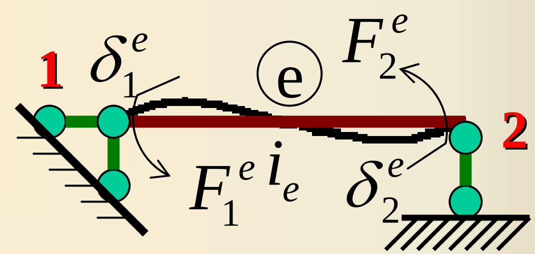
1,2----局部编码

$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \end{Bmatrix}$$ ----单元杆端力

$$\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \delta_1^e \\ \delta_2^e \end{Bmatrix}$$ ----单元杆端位移



单元杆端力和单元杆端位移逆时针为正.



单元分析的目的:

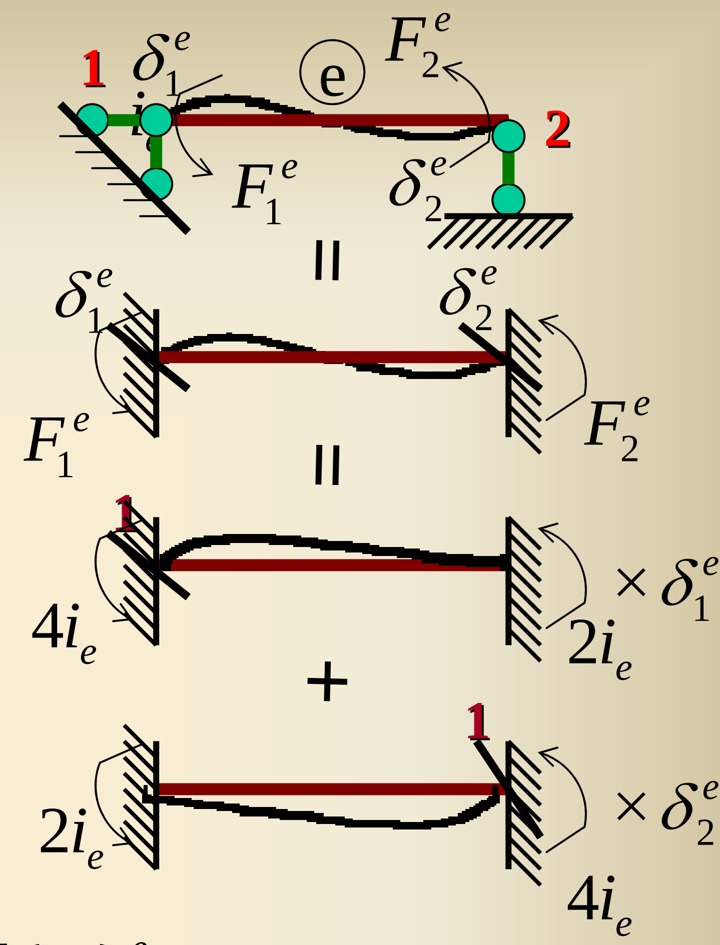
建立单元杆端力和单元杆端位移的关系.

二.单元分析

1,2----局部编码

$$\{F\}^e=\begin{Bmatrix}F_1^e\\F_2^e\end{Bmatrix}$$ ----单元杆端力

$$\{\delta\}^e=\begin{Bmatrix}\delta_1^e\\\delta_2^e\end{Bmatrix}$$ ----单元杆端位移



单元分析的目的:

建立单元杆端力和单元杆端位移的关系.

$$F_1^e=4i_e\delta_1^e+2i_e\delta_2^e$$

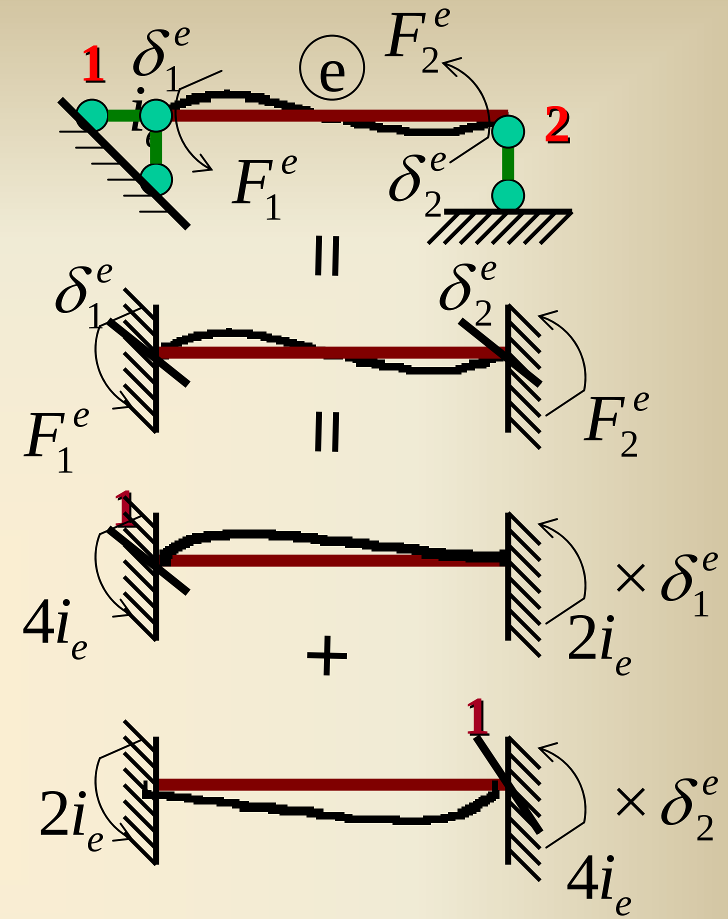
$$F_2^e=2i_e\delta_1^e+4i_e\delta_2^e$$

$$\begin{Bmatrix}F_1\\F_2\end{Bmatrix}^e=\begin{bmatrix}4i_e & 2i_e\\2i_e & 4i_e\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta_1\\\delta_2\end{Bmatrix}^e$$

简记为 $\{F\}^e=[k]^e\{\delta\}^e$ ---单元刚度方程

其中 $[k]^e$ 称作单元刚度矩阵(简称作单刚)

二.单元分析



单元刚度矩阵中元素的物理意义

$$[k]^e=\begin{bmatrix}k_{11}^e & k_{12}^e\\ k_{21}^e & k_{22}^e\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4i_e & 2i_e\\ 2i_e & 4i_e\end{bmatrix}$$

k_{ij}^e ---发生 $\delta_j^e=1,\delta_i^e=0$ 位移时在 i端所需加的杆端力.

单元刚度矩阵性质:对称矩阵

$$F_1^e=4i_e\delta_1^e+2i_e\delta_2^e$$

$$F_2^e=2i_e\delta_1^e+4i_e\delta_2^e$$

$$\begin{Bmatrix}F_1\\ F_2\end{Bmatrix}^e=\begin{bmatrix}4i_e & 2i_e\\ 2i_e & 4i_e\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\end{Bmatrix}^e$$

简记为 $\{F\}^e=[k]^e\{\delta\}^e$ ---单元刚度方程

其中 $[k]^e$ 称作单元刚度矩阵(简称作单刚)

三.整体分析

整体分析的目的：

建立结点力与结点位移的关系.

$$P_1 = k_{11}\delta_1 + k_{21}\delta_2 + k_{31}\delta_3$$

$$P_2 = k_{21}\delta_1 + k_{22}\delta_2 + k_{32}\delta_3$$

$$P_3 = k_{31}\delta_1 + k_{32}\delta_2 + k_{33}\delta_3$$

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix}$$

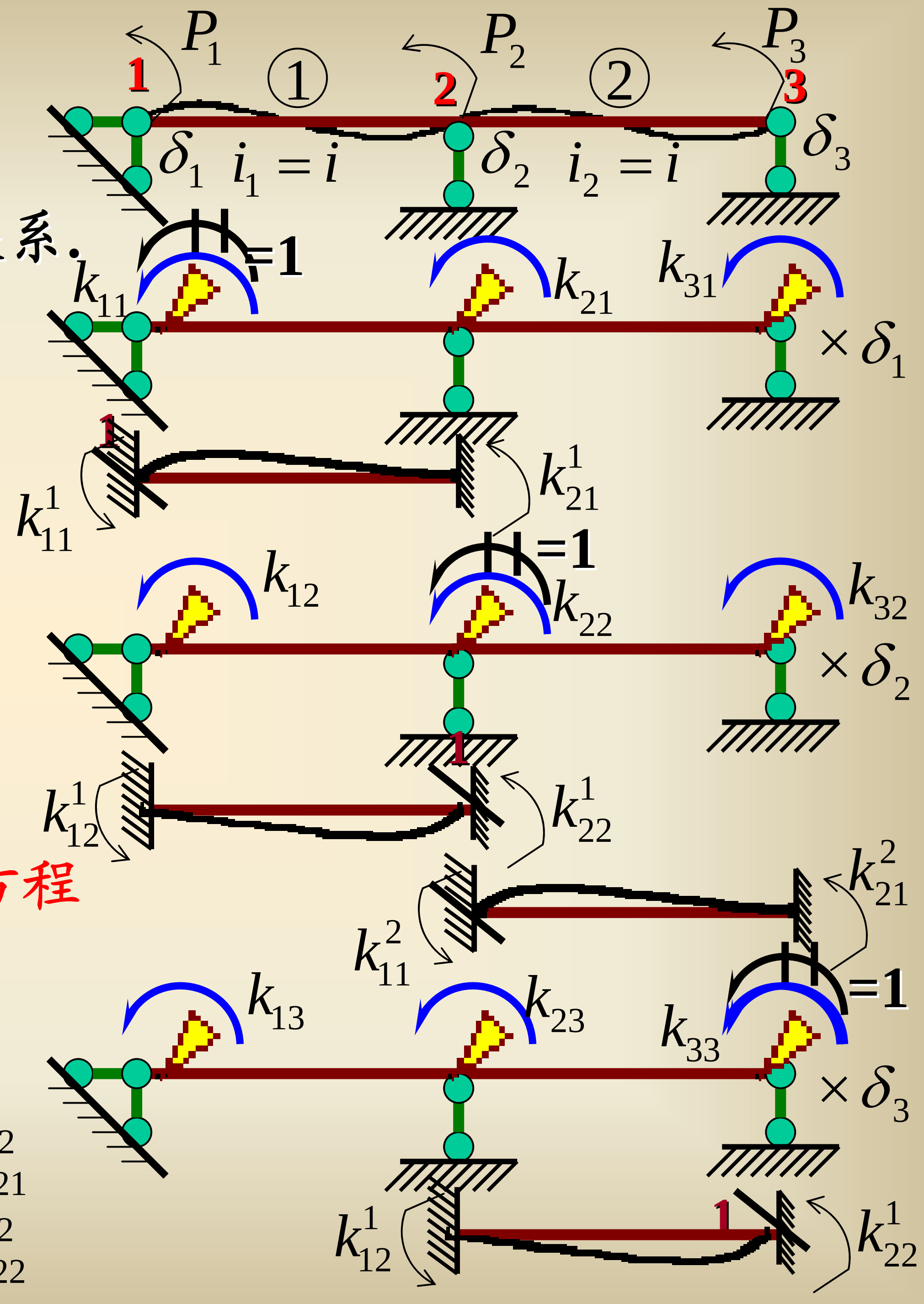
简记为 $\{P\} = [k]\{\Delta\}$---结构刚度方程

$[k]$ --结构刚度矩阵(总刚)

$k_{11} = k_{11}^1$　$k_{21} = k_{21}^1$　$k_{31} = 0$

$k_{12} = k_{12}^1$　$k_{22} = k_{22}^1 + k_{11}^2$　$k_{32} = k_{21}^2$

$k_{13} = 0$　$k_{23} = k_{12}^2$　$k_{33} = k_{22}^2$



单元刚度矩阵中元素的物理意义

$$[k]=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}$$

k_{ij} ---发生 $\delta_j=1$, 其它结点位移为零位移时在 **i**结点所需加的结点力.

结构刚度矩阵性质:对称矩阵

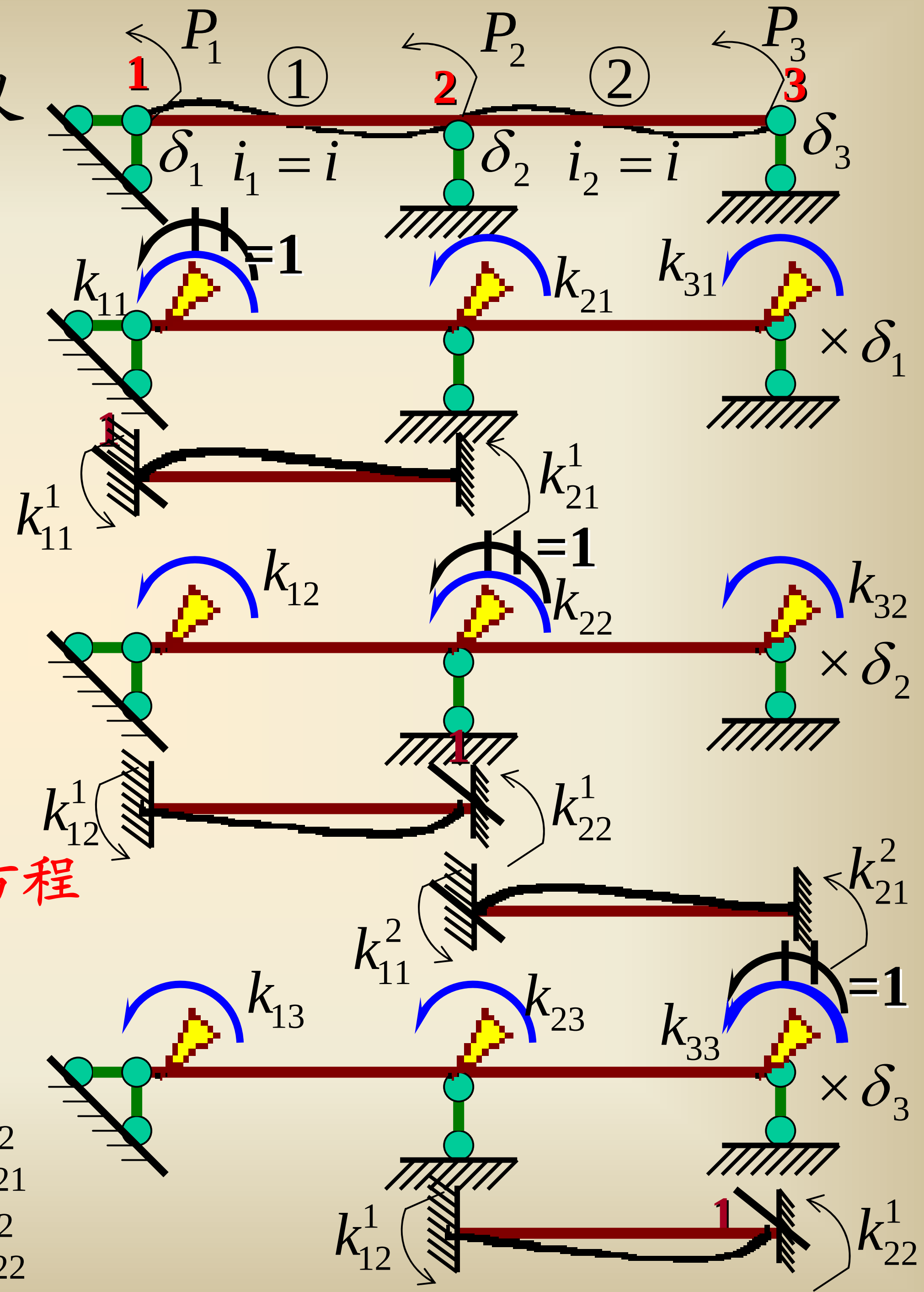
简记为 $\{P\}=[k]\{\Delta\}$---结构刚度方程

$[k]$ --结构刚度矩阵(总刚)

$k_{11}=k_{11}^1$　$k_{21}=k_{21}^1$　$k_{31}=0$

$k_{12}=k_{12}^1$　$k_{22}=k_{22}^1+k_{11}^2$　$k_{32}=k_{21}^2$

$k_{13}=0$　$k_{23}=k_{12}^2$　$k_{33}=k_{22}^2$



单元刚度矩阵中元素的物理意义

$$[k]=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}$$

k_{ij} ---发生 $\delta_j = 1$, 其它结点位移为零位移时在 i结点所需加的结点力.

结构刚度矩阵性质:对称矩阵

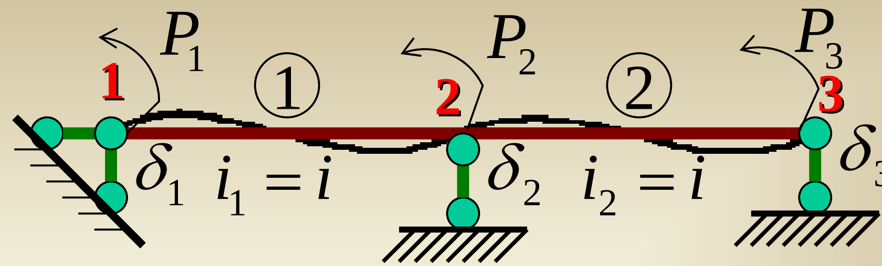
简记为 $\{P\}=[k]\{\Delta\}$---结构刚度方程

$[k]$ --结构刚度矩阵(总刚)

$$k_{11}=k^1_{11} \qquad k_{21}=k^1_{21} \qquad k_{31}=0$$

$$k_{12}=k^1_{12} \qquad k_{22}=k^1_{22}+k^2_{11} \qquad k_{32}=k^2_{21}$$

$$k_{13}=0 \qquad k_{23}=k^2_{12} \qquad k_{33}=k^2_{22}$$



总刚的形成方法 --- “对号入座”

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 2 & \\ & \cancel{1} & \cancel{2} & \\ [k]^1= & k^1_{11} & k^1_{12} & \cancel{\bar{1}}\ 1 \\ & k^1_{21} & k^1_{22} & \cancel{\bar{2}}\ 2 \end{array}$$

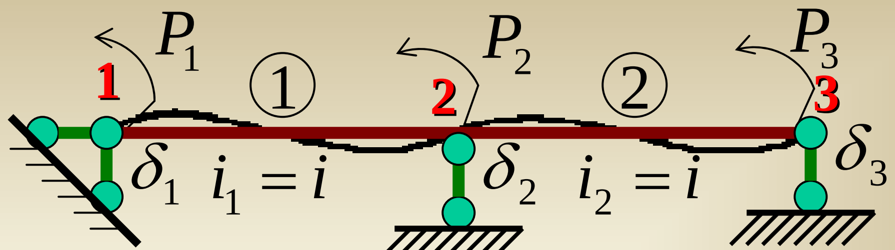
$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} & \\ [k]=\begin{bmatrix} k^1_{11} & k^1_{12} & 0 \\ k^1_{21} & k^1_{22}+k^2_{11} & k^2_{12} \\ 0 & k^2_{21} & k^2_{22} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & 2 & 3 & \\ & \cancel{1} & \cancel{2} & \\ [k]^2= & k^2_{11} & k^2_{12} & \cancel{\bar{1}}\ 2 \\ & k^2_{21} & k^2_{22} & \cancel{\bar{2}}\ 3 \end{array}$$

四.计算杆端力

$\{P\}=[k]\{\Delta\}$ 计算结点位移

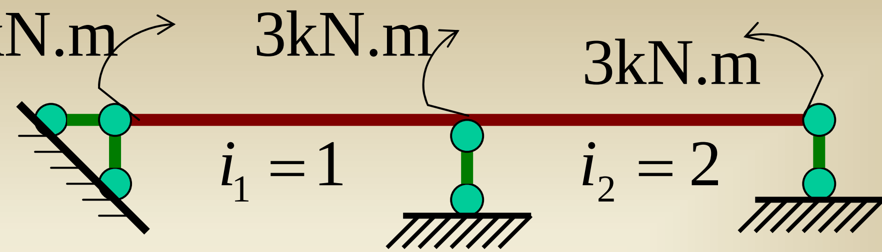
$\{F\}^e=[k]^e\{\delta\}^e$ 计算杆端力

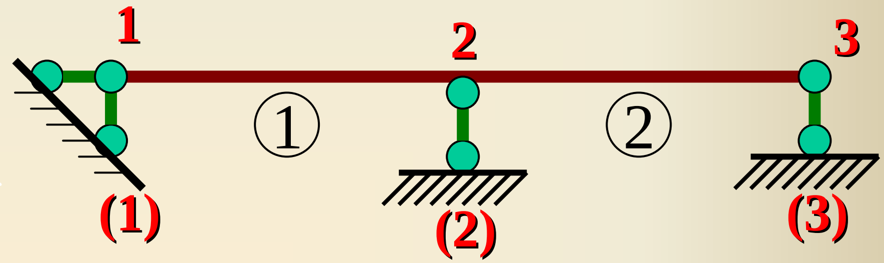


四.计算杆端力

$\{P\}=[k]\{\Delta\}$　计算结点位移

$\{F\}^e=[k]^e\{\delta\}^e$　计算杆端力





例：计算图示梁,作弯矩图

解：1.离散化　2.计算总刚,总荷

$$[k]^1=\begin{array}{cccc} 1 & 2 & & \\ \cancel{\bar{1}} & \cancel{\bar{2}} & & \\ 4 & 2 & \cancel{\bar{1}} & 1 \\ 2 & 4 & \cancel{\bar{2}} & 2 \end{array}\quad\text{i.e. } [k]^1=\begin{bmatrix}4&2\\2&4\end{bmatrix}$$

$$[k]^2=\begin{array}{cccc} 2 & 3 & & \\ \cancel{\bar{1}} & \cancel{\bar{2}} & & \\ 8 & 4 & \cancel{\bar{1}} & 2 \\ 4 & 8 & \cancel{\bar{2}} & 3 \end{array}\quad\text{i.e. } [k]^2=\begin{bmatrix}8&4\\4&8\end{bmatrix}$$

$$[k]=\begin{bmatrix}4&2&0\\2&12&4\\0&4&8\end{bmatrix}\qquad \{P\}=\begin{Bmatrix}-6\\-3\\3\end{Bmatrix}$$

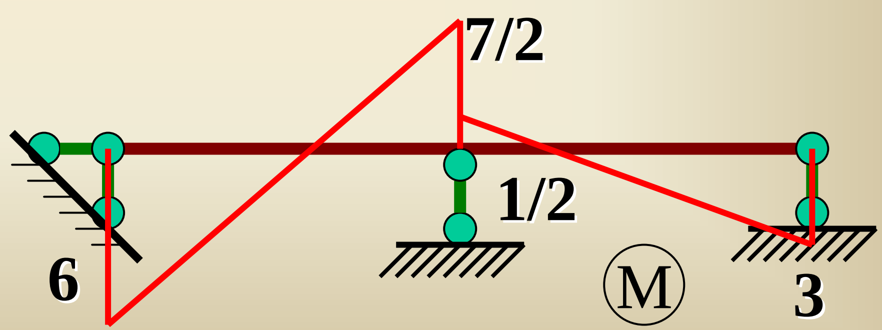
3.解方程,求位移

$$\{P\}=[k]\{\Delta\}\qquad \{\Delta\}=\begin{Bmatrix}-17/12\\-1/6\\11/24\end{Bmatrix}$$

4.求杆端力

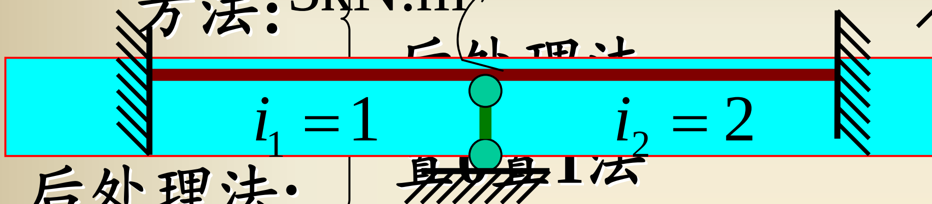
$$\{F\}^1=\begin{bmatrix}4&2\\2&4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-17/12\\-1/6\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-6\\-7/2\end{Bmatrix}$$

$$\{F\}^2=\begin{bmatrix}8&4\\4&8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-1/6\\11/24\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1/2\\3\end{Bmatrix}$$



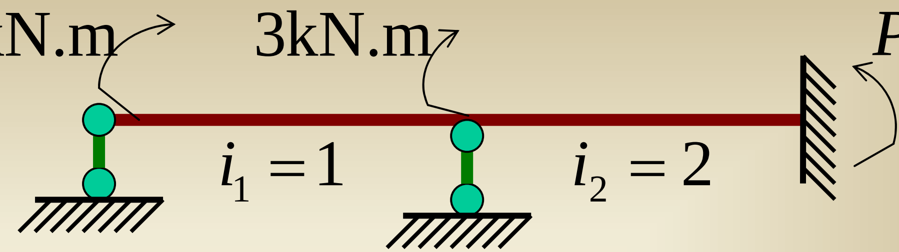
五、(零位移)边界条件处理

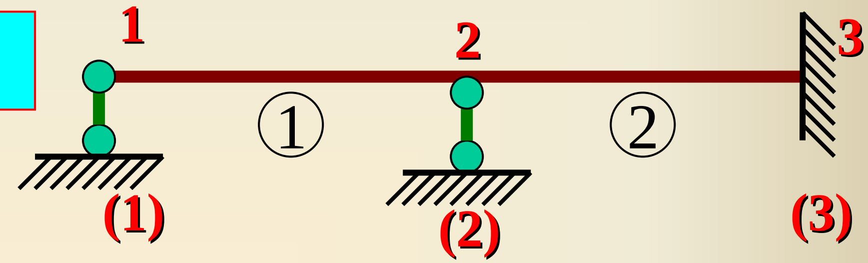
方法: 先处理法 / 后处理法



后处理法: 置0置1法 / 乘大数法

作弯矩图





(1)置0置1法

$$\begin{bmatrix}4 & 2 & 0\\ 2 & 12 & 4\\ 0 & 4 & 8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\\ \delta_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-6\\ -3\\ P_3\end{Bmatrix}$$

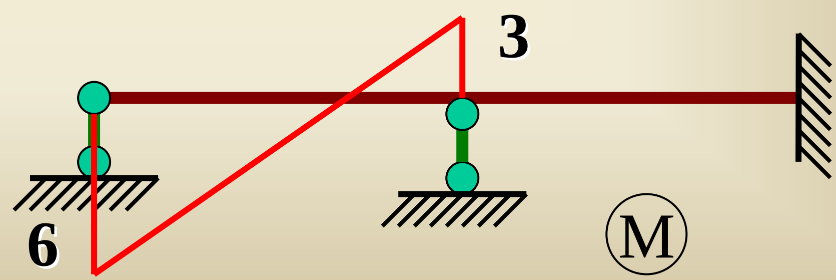
0 0 1　　**0**

$$\delta_3=0$$

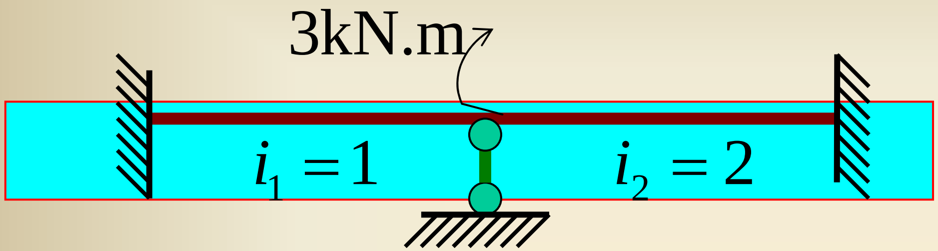
$$\begin{bmatrix}4 & 2 & 0\\ 2 & 12 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\\ \delta_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-6\\ -3\\ 0\end{Bmatrix}$$

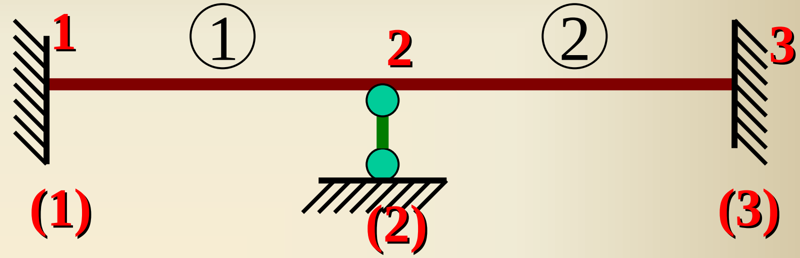
$$\{\Delta\}=\begin{Bmatrix}-3/2\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}\qquad \{F\}^2=\begin{bmatrix}8 & 4\\ 4 & 8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$$

$$\{F\}^1=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-3/2\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-6\\ -3\end{Bmatrix}$$



练习：





作弯矩图

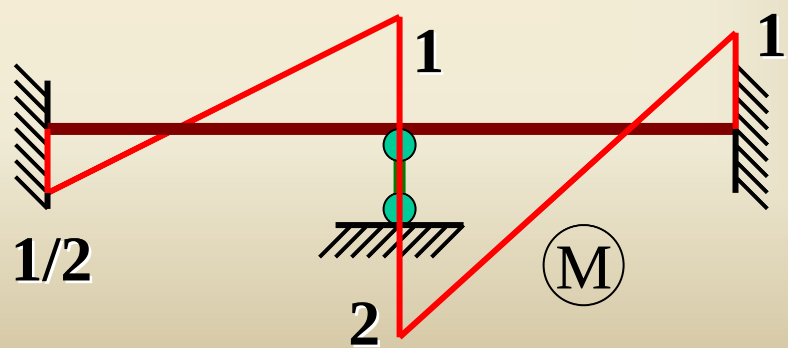
$$\begin{bmatrix}4 & 2 & 0\\ 2 & 12 & 4\\ 0 & 4 & 8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\\ \delta_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\cancel{P_1}\\ -3\\ \cancel{P_3}\end{Bmatrix}\qquad \begin{Bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\\ \delta_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ -1/4\\ 0\end{Bmatrix}$$

$$\{F\}^1=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ -1/4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-1/2\\ -1\end{Bmatrix}$$

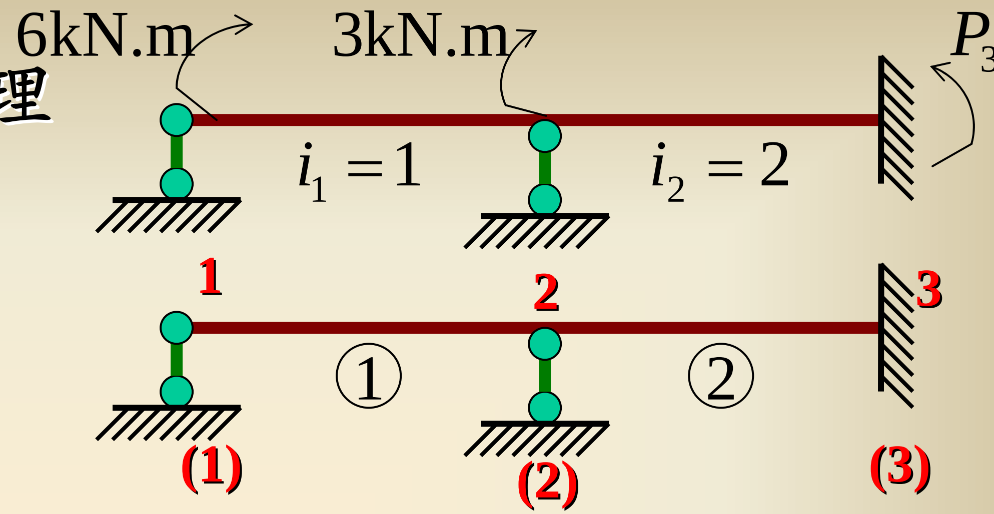
$$\{F\}^2=\begin{bmatrix}8 & 4\\ 4 & 8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-1/4\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-2\\ -1\end{Bmatrix}$$

$$\delta_1=\delta_3=0$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 12 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\\ \delta_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ -3\\ 0\end{Bmatrix}$$



五.(零位移)边界条件处理



方法: 先处理法 / 后处理法

后处理法: 置0置1法 / 乘大数法

(1)置0置1法

(2)乘大数法

若 $\delta_i=0$,则将总刚主对角元素 k_{ii} 乘以大数N.

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 12 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -6 \\ -3 \\ P_3 \end{Bmatrix}$$

$$\delta_3=0$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 12 & 4 \\ 0 & 4 & 8\times N \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -6 \\ -3 \\ P_3 \end{Bmatrix}$$

第三个方程变为:

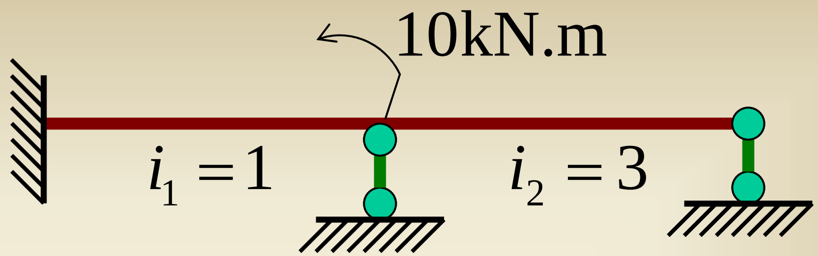
$$0\times\delta_1+4\times\delta_2+8\times N\times\delta_3=P_3$$

$$\delta_3=(P_3-0\times\delta_1-4\times\delta_2)/(8\times N)$$

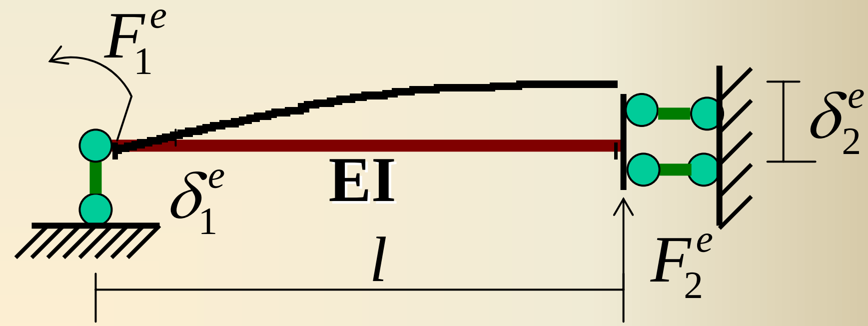
$$\delta_3\approx 0$$

作业:

1.作图示结构弯矩图



2.推导图示单元的单刚



3.计算图示梁总刚中元素 k_{44} k_{23} k_{25}

4.思考题

(1).连续梁的总刚为何应是一个三对角矩阵?

(2).荷载不作用于结点上时怎么办?

(3).连续梁单刚和总刚是奇异还是非奇异矩阵?