

# 信号统计分析

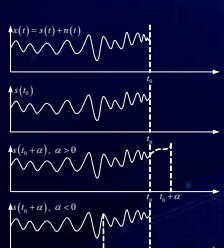
## 第6章 波形估计

### 本章内容

- 6.1 波形估计的分类
- 6.2 连续信号的维纳滤波
- 6.3 离散维纳滤波
- 6.4  $\alpha - \beta$  滤波
- 6.5 卡尔曼滤波

### 6.1 波形估计的分类

假设观测信号为  $x(t) = s(t) + n(t)$ ，待估计信号为  $g(t) = s(t + \alpha)$ ，当前时刻为  $t_0$

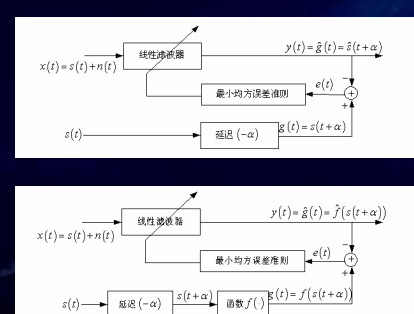


滤波：估计信号  $s(t_0)$

预测：估计信号  $s(t_0 + \alpha)$   $\alpha > 0$

平滑：估计信号  $s(t_0 + \alpha)$   $\alpha < 0$

波形估计目的：选取线性滤波器的冲激响应函数或传输函数，使估计的均方误差达到最小。



拓展：

### 6.2 连续信号的维纳滤波

**基本思想：**  
寻找线性滤波器的最佳冲激响应或传输函数，使滤波器的输出波形作为输入信号波形的最佳估计，即使波形估计的均方误差达到最小。

**主要内容：**

- 6.2.1. 广义平稳随机信号的维纳滤波原理
- 6.2.2. 物理不可实现维纳滤波器的解
- 6.2.3. 物理可实现维纳滤波器的解
- 6.2.4. 最小均方误差

### 6.2.1 广义平稳随机信号的维纳滤波原理

假设信号和噪声均为零均值的广义平稳随机过程且互不相关，则观测信号  $x(t) = s(t) + n(t)$  也是零均值广义平稳随机过程，且和  $g(t)$  联合广义平稳。

线性滤波器的冲激响应为  $h(t)$ ，输出信号  $y(t)$  为：

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau)x(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) x(t - \tau) d\tau$$

估计误差为： $e(t) = g(t) - \hat{g}(t) = g(t) - y(t)$

均方误差为： $E\{e^2(t)\} = E\{[g(t) - y(t)]^2\} \rightarrow \min$

利用线性最小均方差估计的正交条件

$$E\{e(t)x(\tau')\} = 0, \quad -\infty < \tau' < +\infty$$

可得非因果广义平稳随机过程的维纳-霍夫方程

$$R_{gx}(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda)R_x(\eta-\lambda)d\lambda, \quad -\infty < \eta < +\infty$$

因果广义平稳随机过程的维纳-霍夫方程

$$R_{gx}(\eta) = \int_0^{+\infty} h(\lambda)R_x(\eta-\lambda)d\lambda \quad 0 \leq \eta < +\infty$$

### 6.2.2 物理不可实现维纳滤波器的解

由非因果维纳-霍夫方程, 可得

$$S_{gx}(\omega) = H(j\omega)S_x(\omega)$$

即

$$H(j\omega) = \frac{S_{gx}(\omega)}{S_x(\omega)}$$

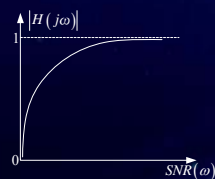
对于  $g(t) = s(t+\alpha)$ , 有

$$H(j\omega) = \frac{S_s(\omega)e^{j\omega\alpha}}{S_s(\omega) + S_n(\omega)}$$

维纳滤波器的幅频响应为

$$|H(j\omega)| = \frac{|S_s(\omega)/S_n(\omega)|}{|S_s(\omega)/S_n(\omega) + 1|} \triangleq \frac{1}{|1 + 1/SNR(\omega)|}$$

其中  $SNR(\omega) = S_s(\omega)/S_n(\omega)$ 。



此时估计的最小均方差为:

$$E\{e^2(t)\}_{\min} = R_g(0) - \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda)R_{gx}(\lambda)d\lambda$$

#### 例 6.1

考虑输入信号  $x(t)$  为高斯-马尔可夫信号  $s(t)$  和噪声  $n(t)$  的叠加, 假定信号和噪声统计独立, 其功率谱分别为  $S_s(\omega) = \frac{3}{1+\omega^2}$  和  $S_n(\omega) = 1$ 。

求:  $\alpha$  分别取 0, +1 和 -1 时物理不可实现维纳滤波器的冲激响应及最小均方差。

### 6.2.3 物理可实现维纳滤波器的解

对于因果的维纳-霍夫方程:

$$R_{gx}(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda)R_x(\eta-\lambda)d\lambda \quad 0 \leq \eta < +\infty$$

其求解方法有如下两种:

1. 频谱因式分解法
2. 预白化法

#### 1. 频谱因式分解法

引入一个新函数:  $b(\eta) = \begin{cases} 0 & \eta \geq 0 \\ \text{形式不作具体规定} & \eta < 0 \end{cases}$

则有:

$$R_{gx}(\eta) + b(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda)R_x(\eta-\lambda)d\lambda \quad -\infty < \eta < +\infty$$

拉氏变换后得:

$$S_{gx}(s) + B(s) = H(s)S_x(s)$$

可知  $H(s), B(s)$  的极点分别只存在于  $s$  的左半平面和右半平面内。

如果  $S_x(s)$  满足佩利-维纳条件, 则有:

$$S_x(s) = S_x^+(s)S_x^-(s)$$

由于  $S_x(\omega) = S_x^+(\omega) = S_x^-(-\omega)$ , 则

$$S_x^+(-s) = S_x^-(s)$$

于是有

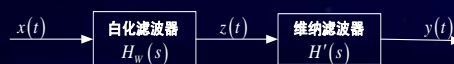
$$H(s)S_x^+(s) = \frac{S_{gx}(s)}{S_x^+(s)} + \frac{B(s)}{S_x^-(s)} = \left[ \frac{S_{gx}(s)}{S_x^+(s)} \right]^+ + \left[ \frac{S_{gx}(s)}{S_x^-(s)} \right]^- + \frac{B(s)}{S_x^-(s)}$$

故

$$H(s) = \frac{1}{S_x^+(s)} \left[ \frac{S_{gx}(s)}{S_x^-(s)} \right]^+ = \frac{1}{S_x^+(s)} \left[ \frac{S_{gx}(s)e^{s\tau}}{S_x^-(s)} \right]^+$$

## 2. 预白化法

基本思想: 先将输入信号进行预白化处理, 然后让得到的白化信号通过其对应的维纳滤波器。



白化滤波器取为

$$H_w(s) = \frac{1}{S_x^+(s)}$$

对于白信号输入为  $z(t)$ , 有  $R_z(\tau) = \delta(\tau)$ , 其对应的维纳滤波器满足如下方程:

$$R_{gz}(\tau) = \int_0^{+\infty} h'(\lambda) R_z(\tau - \lambda) d\lambda = h'(\tau), \quad \tau \geq 0$$

有:

$$H'(s) = \int_0^{+\infty} h'(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \left[ S_{gz}(s) \right]^+ = \left[ H_w(-s) S_{gx}(s) \right]^+ = \left[ \frac{S_{gx}(s)}{S_x^-(s)} \right]^+$$

则:

$$H(s) = H_w(s) H'(s) = \frac{1}{S_x^+(s)} \left[ \frac{S_{gx}(s)}{S_x^-(s)} \right]^+$$

最小均方误差为:

$$E\{e^2(t)\}_{\min} = E\{e(t)g(t)\} = R_g(0) - \int_0^{+\infty} h(\lambda) R_{gz}(\lambda) d\lambda$$

### 例 6.2

考虑输入信号  $x(t)$  为高斯-马尔可夫信号  $s(t)$  和噪声  $n(t)$  的叠加, 假定信号和噪声统计独立, 其功率谱分别为  $S_s(\omega) = \frac{3}{1+\omega^2}$  和  $S_n(\omega) = 1$ 。

求:  $\alpha$  分别取 0, +1 和 -1 时物理可实现维纳滤波器的冲激响应及最小均方误差。

### 6.2.4 最小均方误差

物理可实现维纳滤波器的最小均方误差可以表示为:

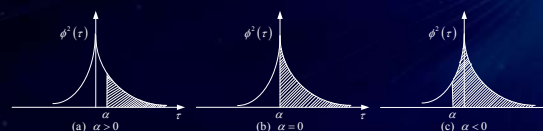
$$E\{e^2(t)\}_{\min} = R_g(0) - \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) R_{gz}(\alpha + \tau) d\tau$$

可推得:

$$E\{e^2(t)\}_{\min} = R_g(0) - \int_{\alpha}^{+\infty} \phi^2(\tau) d\tau$$

其中  $\phi(\tau) = R_z(\tau) = E\{s(t)z(t-\tau)\}$ 。

可见: 最小均方误差随着  $\alpha$  值的增大而单调地增大。



预测、滤波和平滑的性能示意图

结论:

平滑用到的数据最多, 对应的阴影面积最大, 其误差最小; 而预测用到的数据最少, 其对应的阴影面积最下, 误差最大; 滤波所用到的数据居中, 其误差也位于前二者之间。

### 6.3 离散维纳滤波

对于随机输入序列  $x(k) = s(k) + n(k)$ ，待估计的信号序列为  $g(k) = s(k + \alpha)$ 。系统的输出为

$$y(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h(k-j)x(j) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h(j)x(k-j)$$

选取  $h(k)$  使得  $y(k)$  的估计均方误差

$$E\{e^2(k)\} = E\left\{\left[g(k) - y(k)\right]^2\right\}$$

达到最小，这时的离散线性系统称为随机序列的维纳滤波器。其解满足线性最小均方误差估计的正交条件：

$$E\left\{\left[g(k) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} h(j)x(k-j)\right]x(j')\right\} = 0$$

### 有限观测样本的维纳滤波

每次对于  $g(k)$  的估计，只使用长度为  $N$  的观测样本，即

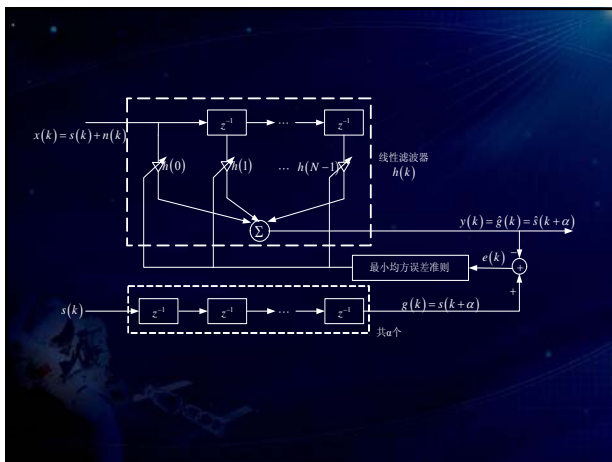
$$y(k) = \sum_{j=0}^{N-1} h(j)x(k-j)$$

则维纳滤波方程如下：

$$\sum_{i=0}^{N-1} h(i)R_x(l-i) = R_{gx}(l) \quad l = 0, 1, \dots, N-1$$

矢量形式为： $\mathbf{R}_x \mathbf{h} = \mathbf{r}_{gx}$ ，则： $\mathbf{h} = \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{r}_{gx}$

均方误差为： $E\{e^2(k)\}_{\min} = R_g(0) - \sum_{j=0}^{N-1} h(j)R_{gx}(j)$



### 6.4 $\alpha - \beta$ 滤波

下面通过举例引入  $\alpha - \beta$  滤波。

假设常值信号中混杂了加性噪声，现用  $N$  个观测样本  $x_k = s + n_k$  来估计常值信号  $s$ 。

一种处理方法是：

1. 测量  $x_1$ ，存储  $x_1$ ，取样本均值估计量为  $\hat{s}_1 = x_1$ ；
2. 测量  $x_2$ ，存储  $x_2$ ，取样本均值估计量为  $\hat{s}_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ ；
3. 依此类推，测量  $x_N$ ，存储  $x_N$ ，取样本均值估计量为  $\hat{s}_N = \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + \dots + x_N)$ 。

另一种处理方法是：

1. 测量  $x_1$ ，取样本均值估计量为  $\hat{s}_1 = x_1$ ，存储  $\hat{s}_1$ ，清除  $x_1$ ；
2. 测量  $x_2$ ，取样本均值估计量为  $\hat{s}_2 = \frac{1}{2}(x_2 + \hat{s}_1)$ ，存储  $\hat{s}_2$ ，清除  $x_2, \hat{s}_1$ ；
3. 依此类推，测量  $x_N$ ，取样本均值估计量为  $\hat{s}_N = \frac{N-1}{N}\hat{s}_{N-1} + \frac{1}{N}x_N$ ，存储  $\hat{s}_N$ ，清除  $\hat{s}_{N-1}, x_N$ 。

例：

需要对一运动目标进行跟踪测量，估计出目标的位移与速度。假设目标在时刻  $t_k$  的位移为  $x_k$ ，采样间隔  $T$ ，并且假设在时间区间  $[t_k, t_k + T]$  内目标作匀速直线运动。观测样本为  $y_k = x_k + n_k$

做法：用  $\hat{x}_k$  表示对目标位移  $x_k$  的估计值，则  $\hat{\dot{x}}_k$  为该时刻目标的速度估计值。

建立预测方程： $\hat{x}_{k+1}^- = \hat{x}_k + T\hat{\dot{x}}_k$   
 $\hat{\dot{x}}_{k+1}^- = \hat{\dot{x}}_k$

利用新的观测值  $y_{k+1}$  建立更新方程:

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1}^- + \alpha (y_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-)$$

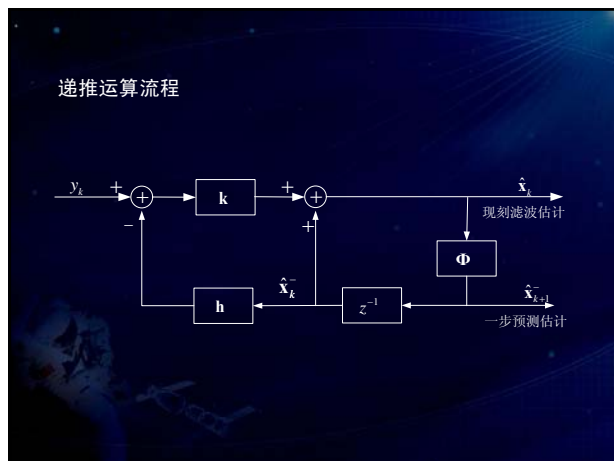
$$\hat{x}_{k+1}^- = \hat{x}_{k+1}^- + \frac{\beta}{T} (y_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-)$$

矢量形式:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \Phi \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{k} (y_{k+1} - \mathbf{h} \Phi \hat{\mathbf{x}}_k) \quad \hat{\mathbf{x}}_k = [\hat{x}_k, \hat{x}_k^-]^T$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{k} = [\alpha \quad \beta/T]^T, \mathbf{h} = [1 \quad 0]$$

上述递推算算法称为  $\alpha$ - $\beta$  滤波。



### 6.5 卡尔曼滤波

主要内容:

- 6.5.1 状态空间模型
- 6.5.2 离散卡尔曼滤波

### 6.5.1 状态空间模型

1. 状态变量、状态方程和观测方程

例: RLC电路

由基尔霍夫定律:  $u_o(t) = (R+r) \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$

$$u_o(t) = R \cdot i(t)$$

利用  $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}, q(t) = \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$

可得  $L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + (R+r) \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = u_o(t)$

$$u_o(t) = R \frac{dq(t)}{dt}$$

令  $q(t) = x_1(t), \frac{dq(t)}{dt} = x_2(t), y(t) = u_o(t)$

可得

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{1}{LC} x_1(t) - \frac{R+r}{L} x_2(t) + \frac{u(t)}{L} \\ y(t) = R x_2(t) \end{cases}$$

写出矢量形式

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/LC & -(R+r)/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [0 \quad R] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

状态变量: 描述系统状态的一组数目最少的变量

状态方程: 状态变量所满足的一阶微分方程

观测方程: 描述系统输出与状态变量之间关系的方程

一般的矢量形式

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{u}(t) \quad \leftarrow \text{状态方程}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{n}(t) \quad \leftarrow \text{观测方程}$$

如何用状态空间模型来描述随机过程？

### 2. 状态方程的解

状态方程是一个一阶P元联立的线性微分方程组，其齐次方程组：

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t)$$

有P个线性独立的解  $\mathbf{x}^1(t), \mathbf{x}^2(t), \dots, \mathbf{x}^p(t)$

这组解构成的非奇异矩阵，称为上式的基本解阵

$$\mathbf{X}(t) = [\mathbf{x}^1(t), \mathbf{x}^2(t), \dots, \mathbf{x}^p(t)]$$

满足微分方程

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{F}(t)\mathbf{X}(t)$$

定义：对于  $t, \tau \geq t_0$ ，矩阵  $\Phi(t, \tau) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(\tau)$  为系统的状态转移矩阵。

状态转移矩阵具有以下性质：

- 对于  $\tau \geq t_0$ ， $\frac{\partial \Phi(t, \tau)}{\partial t} = \mathbf{F}(t)\Phi(t, \tau)$
- 对于  $t \geq t_0$ ， $\Phi(t, t) = \mathbf{I}$
- 对于  $t, \tau \geq t_0$ ， $\Phi^{-1}(t, \tau) = \mathbf{X}(\tau)\mathbf{X}^{-1}(t) = \Phi(\tau, t)$
- 对于  $t_1, t_2, t_3 \geq t_0$ ， $\Phi(t_3, t_2)\Phi(t_2, t_1) = \Phi(t_3, t_1)$
- 对于  $t, \tau \geq t_0$ ， $\frac{\partial \Phi(t, \tau)}{\partial \tau} = -\Phi(t, \tau)\mathbf{F}(\tau)$

对于因果系统，状态方程的唯一解可由状态转移矩阵表示为：

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\mathbf{G}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

验证初始值：

$$\mathbf{x}(t_0) = \Phi(t_0, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_0} \Phi(t_0, \tau)\mathbf{G}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau = \mathbf{x}(t_0)$$

两侧对t求导：

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \frac{\partial \Phi(t, t_0)}{\partial t} \mathbf{x}(t_0) + \Phi(t, \tau)\mathbf{G}(\tau)\mathbf{u}(\tau) \Big|_{\tau=t} + \int_{t_0}^t \frac{\partial \Phi(t, \tau)}{\partial t} \mathbf{G}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \\ &= \mathbf{F}(t)\Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \mathbf{G}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{F}(t) \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\mathbf{G}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \\ &= \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{u}(t) \end{aligned}$$

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, 0)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t, \tau)\mathbf{G}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

“零输入”解      “零状态”解

对于线性非时变系统，相关矩阵退化为常数矩阵：

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t) \quad t \geq t_0 \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{H}\mathbf{x}(t) + \mathbf{n}(t) \quad t \geq t_0 \end{aligned}$$

可以证明此时的解为：

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \Phi(t-t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)\mathbf{G}\mathbf{u}(\tau)d\tau \\ \Phi(t, \tau) &= \Phi(t-\tau) = e^{\mathbf{F}(t-\tau)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathbf{F}^k (t-\tau)^k}{k!} \end{aligned}$$

### 3. 离散状态方程和观测方程

对状态方程的时域解采样：

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) = \Phi(t_{k+1} - t_k)\mathbf{x}(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1} - \tau)\mathbf{G}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

可得：

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \Phi_{k+1, k} \mathbf{x}_k + \Gamma_{k+1, k} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{n}_k \end{aligned}$$

### 6.5.2 离散卡尔曼滤波

假设在时刻  $t_k$ ，基于该时刻以前所获得的全部知识，对状态矢量  $\mathbf{x}_k$  做一个预测估计  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ 。预测估计的误差为：

$$\mathbf{e}_k^- = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-$$

预测误差的协方差矩阵为：

$$\mathbf{C}_k^- = E\{\mathbf{e}_k^- \mathbf{e}_k^{-T}\} = E\{(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T\}$$

利用  $t_k$  时刻的新观测数据  $\mathbf{y}_k$  进一步改善对  $\mathbf{x}_k$  的估计  $\hat{\mathbf{x}}_k$ ，称为更新估计。

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-)$$

更新估计的误差为：

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{e}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{n}_k$$

更新估计的均方误差为：

$$E\{\mathbf{e}_k^T \mathbf{e}_k\} = E\{(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^T (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)\} \xrightarrow{\mathbf{K}_k} \min$$

更新估计的协方差矩阵为：

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_k &= E\{\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T\} = E\{(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^T\} \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{C}_k^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \end{aligned}$$

其中： $E\{\mathbf{n}_k \mathbf{n}_k^T\} = \mathbf{R}_k \delta_{ik}$

令  $\mathbf{D}_k \mathbf{D}_k^T = \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k$

可得  $\mathbf{C}_k = \mathbf{C}_k^- + (\mathbf{K}_k \mathbf{D}_k - \mathbf{A})(\mathbf{K}_k \mathbf{D}_k - \mathbf{A})^T - \mathbf{A} \mathbf{A}^T$   
 $\mathbf{A} = \mathbf{C}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{D}_k^T)^{-1}$

当  $\mathbf{K}_k \mathbf{D}_k - \mathbf{A} = \mathbf{0}$

此时  $\mathbf{C}_k$  的主对角线元素之和达到最小

即  $\mathbf{K}_k = \mathbf{A} \mathbf{D}_k^{-1} = \mathbf{C}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{D}_k^T)^{-1} \mathbf{D}_k^{-1} = \mathbf{C}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{C}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}$

此时  $\mathbf{C}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{C}_k^-$

下面利用  $\hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{C}_k$  预测估计  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-, \mathbf{C}_{k+1}^-$ 。

由状态方程  $\mathbf{x}_{k+1} = \Phi_k \mathbf{x}_k + \Gamma_k \mathbf{u}_k$

忽略噪声作用  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \Phi_k \hat{\mathbf{x}}_k$

则  $t_{k+1}$  时刻的预测误差和协方差矩阵分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{k+1}^- &= \mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \Phi_k \mathbf{e}_k + \Gamma_k \mathbf{u}_k \\ \mathbf{C}_{k+1}^- &= E\{\mathbf{e}_{k+1}^- \mathbf{e}_{k+1}^{-T}\} = \Phi_k \mathbf{C}_k \Phi_k^T + \Gamma_k \mathbf{Q}_k \Gamma_k^T \end{aligned}$$

其中  $E\{\mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T\} = \mathbf{Q}_k \delta_{ik}$

#### 卡尔曼滤波算法的递推过程

(1) 建立状态空间模型： $\mathbf{x}_{k+1} = \Phi_k \mathbf{x}_k + \Gamma_k \mathbf{u}_k$   
 $\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{n}_{k+1}$

(2) 设置初始化条件： $\hat{\mathbf{x}}_0 = E\{\mathbf{x}_0\}, \mathbf{C}_0 = \text{Var}\{\mathbf{x}_0\}$

(3) 预测： $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \Phi_k \hat{\mathbf{x}}_k$

(4) 计算预测误差协方差矩阵： $\mathbf{C}_{k+1}^- = \Phi_k \mathbf{C}_k \Phi_k^T + \Gamma_k \mathbf{Q}_k \Gamma_k^T$

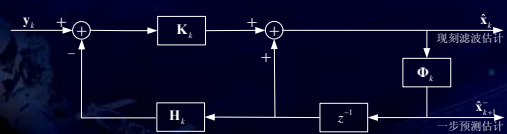
(5) 计算卡尔曼增益： $\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{C}_{k+1}^- \mathbf{H}_{k+1}^T (\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{C}_{k+1}^- \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1})^{-1}$

(6) 更新： $\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- + \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-)$

(7) 计算更新误差协方差矩阵： $\mathbf{C}_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}) \mathbf{C}_{k+1}^-$

(8) 令  $k = k + 1$ ，重复步骤 (3) - (8) 直到当前时刻。

迭代框图：



例 6.3

飞机相对于雷达作径向直线匀加速运动。目标与雷达站之间的斜距为  $x_k$ 。目标相对于雷达的距离方程、速度方程和加速度方程为

$$x_k = x_{k-1} + T\dot{x}_{k-1} + \frac{T^2}{2}\ddot{x}_{k-1}, \quad \dot{x}_k = \dot{x}_{k-1} + T\ddot{x}_{k-1}, \quad \ddot{x}_k = \ddot{x}_{k-1}$$

式中,  $x_k$  为  $k$ 时刻目标的斜距,  $\dot{x}_k$ 为  $k$ 时刻目标的径向速度,  $\ddot{x}_k$ 为  $k$ 时刻目标的径向加速度,  $T$ 为采样时间间隔,  $T = 2s$ 。

已知

$$E\{x_0\} = 0, \quad \text{Var}\{x_0\} = 8(\text{km})^2$$
$$E\{\dot{x}_0\} = 0, \quad \text{Var}\{\dot{x}_0\} = 10(\text{km}/s)^2$$
$$E\{\ddot{x}_0\} = 0.2, \quad \text{Var}\{\ddot{x}_0\} = 5(\text{km}/s^2)^2$$

且目标未受外界干扰, 动态噪声  $u_k = 0$ ,  $n_k$  是零均值的白噪声, 即  $E\{n_k\} = 0$ ,  $\text{Cov}\{n_i, n_j\} = 0.15\delta_{ij}(\text{km})^2$

$n_k$  与  $x_k, \dot{x}_k, \ddot{x}_k$  都不相关。当观测时刻  $k = 1, 2, \dots, 10$  时, 斜距的观测值  $y_k(\text{km})$  为:

0.30, 1.56, 3.64, 6.44, 10.5, 14.8, 20.0, 25.2, 32.2, 40.4

求:  $x_k, \dot{x}_k, \ddot{x}_k$  的估计以及估计误差的协方差矩阵。

### 本章内容小结

- 1 波形估计的分类
- 2 连续信号的维纳滤波
- 3 离散维纳滤波
- 4  $\alpha - \beta$  滤波
- 5 卡尔曼滤波