Chapter 3 复变函数级数

Abstract: 简介解析函数的性质，尤其是解析函数最重要的表达形式之一的幂级数(power series) 的重要性质。重点讲述解析函数在常点附近展开为 Taylor 级数和在孤立奇点附近展开为 Laurent 级数。最后讨论单值函数孤立奇点的分类。

Motivation: 引论中讲过，一方面，物理学家力求 $\sum_k a_k(z-b)^k$（将此 sum 表达为一个简单的函数）；但另一方面，有些物理上的表示（例如求解方程和方程的解等）相当复杂，人们不得不反过来做级数展开。有趣的是，大部分情况下级数的前一、二项就解决问题了（物理误差范围以内）。这不但对收敛快的级数是如此，况且对发散级数尤要 cut off！--多项式展开。更有趣的是，这样便构成了本征函数系—早已存在的数学理论，物理理论和实验的核心目标，see part II）。

级数复习: 常数项级数：$S_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}.$

函数项级数：$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n \quad (|z|<1)$，几何级数；

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \quad (|z|<\infty),\quad \text{指数级数；}$$

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (|z|<\infty),$$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (|z|<\infty),$$

三角函数级数。

一般级数：……

解析项级数：1.一般级数，2.幂级数。

问题：设有序列 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots$，问 $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=?$，Key：divergence 发散.

$\because \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-1}=1$, 且 $S_n=\int_1^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln(n+1)$，$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\ln(n+1)$，这是 log 发散。

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 收敛，$(p>1)$ convergence，且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=\zeta(p)$ 绝对收敛。$\zeta(p)$ 称为 Riemann zeta function. $p\le 1$：$\frac{1}{n}\le\frac{1}{n^p}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散（调和级数，和谐级数？）。

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散 $(p \le 1)$. 但是 $p > 1$为何收敛呢？

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} &= 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{7^p}\right) + \left(\frac{1}{8^p} + \cdots + \frac{1}{15^p}\right) + \cdots \\
&< 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{4^p}\right) + \left(\frac{1}{8^p} + \cdots + \frac{1}{8^p}\right) + \cdots \\
&= 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n
\end{aligned}
$$

此几何级数收敛$(p > 1)$，$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛$(p > 1)$。

再问一致收敛呢？要有$\varepsilon, N(\varepsilon)$学说，而非$N$ [See (Sub. 1.3) below].

在C平面 $p = \mathrm{Re}\, p + i\, \mathrm{Im}\, p$, $\mathrm{Re}\, p = 1$有无穷多个奇点。$p = -2n\, (n = 1, 2, \cdots)$ 是$\zeta(p)$的零点，其它零点落在$0 \le \mathrm{Re}\, p \le 1$.Riemann 假设：上述零点全部在$\mathrm{Re}\, p = 1/2$.

一、 级数的基本概念与性质 (Basic concepts and properties of series)

1. 复数序列

（1） 定义：按照一定顺序排列的复数$z_n = a_n + ib_n$，$n = 1, 2, \cdots$，称为复数序列，记为$\{z_n\}$。

一个复数序列完全等价于两个实数序列。

（2） 聚点：给定复数序列$\{z_n\}$，若存在复数z，对于$\forall \varepsilon > 0$，恒有无穷多个z_n满足$|z_n - z| < \varepsilon$，则称z为$\{z_n\}$的一个聚点（或极限点）。

一个序列可以有不止一个聚点，例如序列$\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, -\frac{6}{7}, \cdots$就有两个聚点，$\pm 1$。

（3） 有界序列和无界序列：给定复数序列$\{z_n\}$，若存在一个正数M，对所有的n都有$|z_n| < M$，称为序列有界；否则称为序列无界。

（4） 极限：给定复数序列$\{z_n\}$，如果对$\forall \varepsilon > 0$，$\exists$自然数N，使得只要$n > N$，就有$|z_n - A| < \varepsilon$，则称$\{z_n\}$收敛于A，记为$\lim_{n \to \infty} z_n = A$。

一个序列的极限必然是这个序列的聚点，而且是唯一的聚点。

显然，如果写成$z_n = a_n + ib_n$， $A = a + ib$，则 $\lim_{n\to\infty} z_n = A \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{n\to\infty} a_n = a \\ \lim_{n\to\infty} b_n = b \end{cases}$

例如，对于点列$\{\alpha^n\}$，有 $\lim_{n\to\infty} \alpha^n = \begin{cases} 0 & |\alpha| < 1 \\ \infty & |\alpha| > 1 \\ 1 & \alpha = 1 \\ \text{不存在} & |\alpha| = 1 \text{且} \alpha \neq 1 \end{cases}$

（5）序列极限存在（序列收敛）的 Cauchy 充要条件：任给$\varepsilon > 0$，存在正整数N，使对于任意正整数p，有$|z_{N+p} - z_N| < \varepsilon$.

一个无界序列不可能是收敛的。

2. 复数项级数

复数项级数的收敛：一个复数级数，$z_1 + z_2 + \cdots + z_k \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} z_k$，如果它的部分和$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$所构成的序列$\{S_n\}$收敛，即有极限$\lim_{n\to\infty} S_n = S$，则称级数$\sum_{k=1}^{\infty} z_k$收敛，而序列$\{S_n\}$的极限$S$称为级数$\sum_{k=1}^{\infty} z_k$的和；如果级数$\lim_{n\to\infty} S_n$不存在（无穷或不定），则称$\sum_{k=1}^{\infty} z_k$发散。

注：$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}\, z_k + i\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Im}\, z_k$，因此，一个复数级数完全等价于两个实数级数。若$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}\, z_k$，$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Im}\, z_k$都收敛，则$\sum_{k=1}^{\infty} z_k$收敛；若$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}\, z_k$，$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Im}\, z_k$至少有一个发散，则$\sum_{k=1}^{\infty} z_k$发散。

$\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ **收敛的充要条件（Cauchy 收敛判据）：**任给$\varepsilon > 0$，存在正整数N，使对于任意正整数$p \geq 1$, 有$\left|\sum_{k=N+1}^{N+p} z_k\right| < \varepsilon$.

特别是，令$p = 1$，则得到级数收敛的必要条件：$\lim_{k\to\infty} |z_k| = 0$.

绝对收敛： 如果 $\sum_{k=1}^{\infty}|z_k|$ 收敛，则称 $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ 绝对收敛。

绝对收敛的性质：

- *绝对收敛的级数一定收敛（因为：* $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} z_k\right| < \sum_{k=n+1}^{n+p}|z_k| < \varepsilon$ *），反之不定。*
- *绝对收敛的级数可以改换求和次序。特别是，可以把一个收敛级数拆成几个子级数，每个子级数仍绝对收敛。*
- *两个绝对收敛级数的积仍然绝对收敛。*

例如，$S_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_n$，$S_2=\sum_{l=0}^{\infty}b_l$ 是绝对收敛的，则

	b_0	b_1	b_2	......
a_0	a_0b_0	a_0b_1	a_0b_2	......
a_1	a_1b_0	a_1b_1	a_1b_2	......
a_2	a_2b_0	a_2b_1	a_2b_2	......
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

[注意最后一步的 $l=k-n$ 及 n 的取值范围]

$S_1\cdot S_2=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\sum_{l=0}^{\infty}b_l=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}a_nb_l=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k}a_nb_{k-n}$. $(b_{-|l|}=0)$ 因为 $|a_n|$ 和 $|b_l|$ 构成的实数级数收敛，所以 $|a_nb_{k-n}|$ 构成的实数级数也收敛。

由于 $\sum_{k=1}^{\infty}|z_k|$ 是一个实数级数，而且是一个正项级数，因此高等数学中任何一种正项级数的收敛判别法都可用来判别一个复数项级数是否绝对收敛。

下面列出了一些常用的收敛判别法（自证或者查资料证明之）

比较判别法： 若 $|u_k|\le v_k$，而 $\sum_{k=1}^{\infty}v_k$ 收敛，则 $\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|$ 收敛；

若 $|u_k|\ge v_k$，而 $\sum_{k=1}^{\infty}v_k$ 发散，则 $\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|$ 发散；

比值判别法（D'Alembert 判别法）： 若 $\lim_{k\to\infty}\frac{|u_{k+1}|}{|u_k|}=l<1$，则 $\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|$ 收敛；

若 $\lim_{k\to\infty}\frac{|u_{k+1}|}{|u_k|}=l>1$，则 $\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|$ 发散；

若 $\lim_{k\to\infty}\frac{|u_{k+1}|}{|u_k|}=l=1$，$\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|$ 可能收敛，也可能发散；

根值判别法（Cauchy 判别法）：若 $\lim\limits_{k\to\infty}|u_k|^{1/k}<1$，则 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|u_k|$ 收敛；

若 $\lim\limits_{k\to\infty}|u_k|^{1/k}>1$，则 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|u_k|$ 发散；

若 $\lim\limits_{k\to\infty}|u_k|^{1/k}=1$，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}|u_k|$ 可能收敛，也可能发散；

Gauss 判别法：如果（至少 n 充分大）$\left|\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right|=1+\dfrac{\mu}{n}+O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$，则当 $\mu>1$ 时，

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛（相当于 $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|<1$）；而当 $\mu\le 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散。

3. 复变函数级数（设 $u_k(z)$ 为域 D 中的连续函数，$k=1,2,\cdots$）

函数级数的收敛：如果对于 D 中的一点 z_0，级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(z_0)$ 收敛，则称级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ 在 z_0 点收敛；反之 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(z_0)$ 发散，则称 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ 在 z_0 点发散。

如果级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ 在 D 中的每一点都收敛，则称级数在 D 内收敛。

其和函数 $S(z)$ 是 D 内的单值函数。

一致收敛：如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在一个与 z 无关的 $N(\varepsilon)$，使当 $n>N(\varepsilon)$ 时，对于任意正整数 $p\ge 1$, $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}u_k(z)\right|<\varepsilon$ 对 D 中每一点 z 均成立，则称级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ 在 D 内一致收敛。

（X）一致收敛级数的性质：

- *一致收敛的概念总是和一定区域联系在一起的，级数的一致收敛性质是它在一定区域内的性质。*
- （*）*若在区域 D 内满足* $|u_k(z)|\le a_k$，a_k *与* z *无关* $(k=1,2,\cdots)$, *且* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ *收敛，则*

$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ *绝对且一致收敛。（**Weierstrass 的 M 判别法**）*

- ***连续性：**如果 $u_k(z)$（$k=1,2,\cdots$）在 D 内连续，级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ 在 D 内一致收敛，则其和函数 $S(z)=\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ 也在 D 内连续。*
- 这个性质告诉我们，如果级数的每一项都是连续函数，则一致连续级数可以逐项求极限，或者说“求极限”与“求级数和”可以交换次序。即，$\lim\limits_{z\to z_0}\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\lim\limits_{z\to z_0} u_k(z)$.
- ***逐项求积分：**设 C 是区域 D 内一条分段光滑曲线，如果 $u_k(z)$（$k=1,2,\cdots$）在 C 上连续，则对于 C 上一致收敛级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ 可以逐项积分，$\int_C \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)\mathrm{d}z=\sum_{k=1}^{\infty}\int_C u_k(z)\mathrm{d}z.$*
- ***逐项求导数（Weierstrass 定理）：**设 $u_k(z)$（$k=1,2,\cdots$）在 $\overline{D}$ 中单值解析，$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ 在 $\overline{D}$ 中一致收敛，则此级数之和 $f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ 是 D 内的解析函数，$f(z)$ 可逐项求导，求导后的级数在 D 中的任意闭区域中一致收敛。$f^{(m)}(z)=\sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(m)}(z)$.*

[上面这些性质的证明见《数学物理方法》，北大 吴崇试，高等教育出版社。]

函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ 可表述为：对任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，当 $|x_2-x_1|<\delta$ 时，使得 $|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon$ 成立。

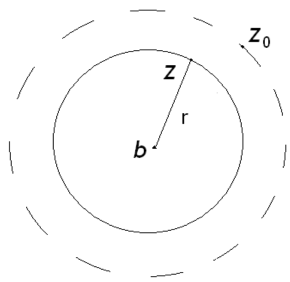
一致连续：δ 不依赖于 x. 例如：$f(x)=\dfrac{1}{x}$，$x\in(0,1)$，$|\Delta x|=|x_2-x_1|=\delta$，$|\Delta f|<\varepsilon$. 对任意小的正数 δ，$|\Delta f|=\left|\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}\right|=\dfrac{\Delta x}{x_1x_2}<\varepsilon$，$(x_1,x_2)>\delta$，所以连续，但并非一致连续。因为当 $x_1=\Delta, x_2=\Delta+\delta$ 时，$\Delta f=\dfrac{\delta}{\Delta(\Delta+\delta)}$.若 $\Delta>\delta$，则连续；若 $\Delta\ll\delta$，则 $|\Delta f|\approx\dfrac{1}{\Delta}\gg 1$.

康托尔(Couter)定理：在有界闭区域上有意义的连续函数在此闭区间上一致连续。

二、 幂级数(Power series)

1．定义：以幂函数$(z-b)^k$为一般项的级数$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-b)^k$称为以$b$为中心的幂级数。反之，函数$f(z)$在$z=b$附近的 Taylor 级数展开，其系数为$a_k$（$k=0,1,2,\cdots$）.

2．幂级数的收敛性：



Abel 定理：如果级数$\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-b)^k$在某点$z_0$收敛，则该级数在圆域$|z-b|<|z_0-b|$内绝对收敛，而且在$|z-b|\le r\ (r<|z_0-b|)$内一致收敛。

证明：因为$\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-b)^k$在$z_0$点收敛，故一定满足必要条件，$\lim_{k\to\infty}a_k(z_0-b)^k=0$.

因此存在正数M，使得，$\left|a_k(z_0-b)^k\right|\le M\ (k=0,1,2,\cdots)$，于是，

$$\left|a_k(z-b)^k\right|=\left|a_k(z_0-b)^k\right|\cdot\left|\frac{z-b}{z_0-b}\right|^k\le M\left|\frac{z-b}{z_0-b}\right|^k.$$

当$|Z|=\left|\frac{z-b}{z_0-b}\right|<1$，即$|z-b|<|z_0-b|$时，几何级数$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{z-b}{z_0-b}\right|^k$收敛，故$\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-b)^k$在圆$|z-b|<|z_0-b|$内绝对收敛。

而当$|z-b|\le r<|z_0-b|$时，$\left|a_k(z-b)^k\right|\le M\frac{r^k}{|z_0-b|^k}$，而常数项级数$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^k}{|z_0-b|^k}$收敛，故根据 Weierstrass 的 M 判别法，$\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-b)^k$在圆$|z-b|\le r\ (r<|z_0-b|)$内一致收敛。

推论一：如果级数$\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-b)^k$在某点$z_0$发散，则该级数在圆域$|z-b|>|z_0-b|$外处处发散。

当 $|z|<1$ 时， $\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ （$|z|\geq 1$ 外处处发散）； 当 $|z|>1$ 时，

$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$ （$|z|\leq 1$内处处发散）。

推论二：对于幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-b)^k$ ，必存在一个实数 $R\geq 0$，使得在圆 $|z-b|=R$ 内级数处处收敛，同时在圆 $|z-b|=R$ 外级数处处发散。

* *这个圆 $|z-b|=R$ 称为 $\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-b)^k$ 的收敛圆，而半径 R 称为收敛半径。*

** 收敛半径的求法，虽然有紧接着下面的常规方法，但是见 p.11 的第二个菱形的非常规方法更有效。

3．幂级数的收敛圆和收敛半径：

在讨论幂级数的性质时，首先应当求出收敛圆及其收敛半径：

（1） $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$，这是因为，根据 D’Alembert 判别法，有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(z-b)^{n+1}}{a_n(z-b)^n}\right|=|z-b|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$$ 时级数收敛。因此得

$$|z-b|<R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

（2） $R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$，这是因为，根据 Cauchy 判别法，有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|a_n(z-b)^n\right|}=|z-b|\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}<1$$ 时级数收敛。因此得

$$|z-b|<R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

4．幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-b)^k$ 在收敛区域内的性质：

◆ *在收敛圆内绝对收敛，在收敛圆内的任何闭圆域上一致收敛。*[Abel theorem].

◆ *和函数在收敛圆内解析。*[因幂级数的每一项都是解析函数，由 Abel 定理知幂

级数在其收敛域的任一闭区域中一致收敛，再由 Weierstrass 定理知其解析]

◆ *和函数在收敛圆内可逐项积分、逐项求导任意次。*[同上证明]

$$\int_{z_0}^{z}\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-b)^k\mathrm{d}z=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\int_{z_0}^{z}(z-b)^k\mathrm{d}z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k+1}\left[(z-b)^{k+1}-(z_0-b)^{k+1}\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-b)^k\right]=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\frac{\mathrm{d}(z-b)^k}{\mathrm{d}z}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cdot k(z-b)^{k-1}=\sum_{k=0}^{\infty}a_{k+1}(k+1)(z-b)^k .$$

◆ *积分和求导后级数的收敛半径不变。*[直接求出收敛半径即可]

例：设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 的收敛半径为 R，求下列幂级数的收敛半径。

（1）$\sum_{n=0}^{\infty}n^kc_nz^n$ （k 为实数）；　（2）$\sum_{n=0}^{\infty}(2^n-1)c_nz^n$.

解：（1）$a_n=n^kc_n$，

$$R_1=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^kc_n}{(n+1)^kc_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^k\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=R .$$

（2）$a_n=(2^n-1)c_n$,

$$R_2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left|(2^n-1)c_n\right|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{(2^n-1)}\sqrt[n]{|c_n|}}=\frac{1}{2}R.$$

注：幂级数在收敛圆内的任何闭区域内是绝对且一致收敛的，因此，

① 逐次求积分和导数任意次；

② 收敛圆内是解析函数，因而可求收敛半径。（即，p.11 的第二个菱形）

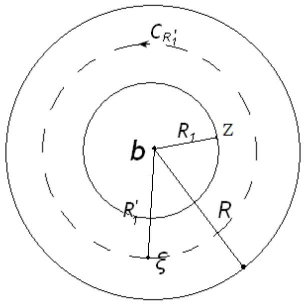
三、解析函数的 Taylor 级数展开(Expand to the Taylor series)

前面我们看到，一个幂级数在它的收敛圆内代表一个解析函数（虽然我们的课程目标是关注函数的非解析性）。现在，我们要提一个相反的问题（inversion problem）：如何把一个解析函数表示成幂级数？

1. 解析函数的 Taylor 级数:（有限远常点附近的级数展开）

Cauchy-Taylor 定理： 设函数 $f(z)$ 在圆域 D：$|z-b|<R$ 内是解析的，则 $f(z)$ 可以在 D 内展开为绝对收敛且一致收敛的幂级数 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-b)^k$，其中 $a_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-b)^{k+1}}\mathrm{d}\xi=\frac{f^{(k)}(b)}{k!}$（$k=0,1,2,\cdots$），并且这样的展开是唯一的。

证明：我们要证明对任何 $R_1<R$（D 内任意一闭区域），所展开的幂级数在闭圆域 D1：$|z-b|\le R_1$ 上是绝对且一致收敛的。



在 R_1 和 R 之间取一圆 $C_{R_1'}$：$|\xi-b|=R_1'$，根据 Cauchy 积分公式，有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1'}}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi,$$

其中 z 是闭圆域 $|z-b|\le R_1$ 内的任一点。

因为 $\left[\frac{1}{1-Z}=\sum_{k=0}^{\infty}Z^k\ (|Z|<1)\right]$

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{(\xi-b)-(z-b)}=\frac{1}{\xi-b}\frac{1}{1-\frac{z-b}{\xi-b}}=\frac{1}{\xi-b}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-b}{\xi-b}\right)^k,$$

其中 $\left|\frac{z-b}{\xi-b}\right|\le\frac{R_1}{R_1'}<1$，即级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{R_1}{R_1'}\right)^k$ 是收敛的。根据 ***Weierstrass 的 M 判别法，*** 级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-b}{\xi-b}\right)^k$ 是绝对且一致收敛的。那么 $\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-b)^k}{(\xi-b)^{k+1}}\right]f(\xi)$ 也是一致收敛的 [一致收敛级数的每一项乘以同一有界函数仍为一致收敛级数]，因此可以逐项积分，于是

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1'}}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1'}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-b)^k}{(\xi-b)^{k+1}}\right]f(\xi)\mathrm{d}\xi$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1'}}\frac{f(\xi)}{(\xi-b)^{k+1}}\mathrm{d}\xi\right](z-b)^k\equiv\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-b)^k,$$

其中　　$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}}\frac{f(\xi)}{(\xi-b)^{k+1}}\mathrm{d}\xi=\frac{f^{(k)}(b)}{k!}$$

(最后一步用到了 k 阶导数的 Cauchy 积分式，$k=0,1,2,\cdots$，see Chapt 2. P.11)。由于 $f(\xi)$ 是解析的，它必是连续的，因此 $|f(\xi)|\le M$，利用 Cauchy 不等式(see Chapt 2. P.13)，有 $\left|f^{(k)}(b)\right|\le\dfrac{Mk!}{(R_1')^k}$，所以 $\left|\dfrac{f^{(k)}(b)}{k!}(z-b)^k\right|\le M\left(\dfrac{R_1}{R_1'}\right)^k$（$k=0,1,2,\cdots$）.

因为级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\dfrac{R_1}{R_1'}\right)^k$ 是收敛的，所以幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{f^{(k)}(b)}{k!}(z-b)^k$ 在闭圆域 $|z-b|\le R_1$ 上是绝对且一致收敛的。

下面证明展开的唯一性：

假设两个级数在区域 $|z-b|\le R_1$ 都收敛到 $f(z)$，

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-b)^k=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-b)^k,$$

取极限 $z\to b$，由于级数在收敛域内是一致收敛的，故有

$$a_0=c_0=f(b).$$

逐项微商，再取极限 $z\to b$，又得 $a_1=c_1=f'(b)$.

如此继续，即可证得，$a_k=c_k=\dfrac{f^{(k)}(b)}{k!}$（展开了且用中心值 $z=b$ 确定）.

◆ Cauchy-Taylor 定理的唯一性告诉我们：

（1）可以用任何方便的方法来求其展开系数。

（2）如果在同一点展开的两个 Taylor 级数，则可以逐项比较系数。

◆ 因为 Taylor 级数在其收敛圆内是一个解析函数，所以被展开的函数如果有奇点的话，只能在收敛圆上或收敛圆外。因此，**函数展开为 Taylor 级数，其最大收敛半径必等于展开中心到被展开函数最近的奇点的距离**。

例1.　$\dfrac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$，奇点为 $z=\pm i$，因此收敛半径 $R=|\pm i|=1.$

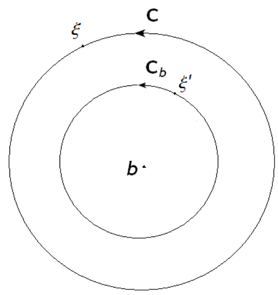
而在实数范围内，就不能理解收敛半径为何是 1 了，因为函数 $1/(1+x^2)$

在整个实轴上都是连续可导、并且任意阶导数都是存在的。

例2. 函数 $f(z)=\dfrac{ze^{tz}}{e^z-1}$ 的幂级数为 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}B_n(t)\dfrac{z^n}{n!}$，其中 $B_n(t)$ 为 Bernoulli 多项式（虽然它已知，但是写不出其通项，更写不出末项）。

由 $e^z-1=0$ 解得 $z_k=i2\pi k\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$。所以 $R=2\pi$.（分子有 z）

推论：假如 Taylor 级数展开的函数 $f(z)$ 在 $z=b$ 邻域为零，则 $f(z)\equiv 0$, 即 $a_k=0\ (k=0,1,2,\cdots)$. 解析函数一致性定理



证明：

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_b}\frac{f(\xi')}{(\xi'-b)^{k+1}}\mathrm{d}\xi'=0\,[\because f(\xi')=0],$$

$$\text{而}\,a_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f(\xi)}{(\xi-b)^{k+1}}\mathrm{d}\xi\equiv I.$$

因为 $f(z)$ 在 $\bar{\mathrm{D}}$ 内解析，函数 $f(z)/(\xi-b)$ 除 $\xi=b$ 点外解析，所以 C 内函数 $f(z)/(\xi-b)$ 解析。由于边界值 $f(\xi')=0$ 决定了其内部值，所以 $I=0\Rightarrow a_k=0\Rightarrow f(z)=0.$

根据 Taylor 级数公式，容易求得常见的几个函数的 Taylor 级数：

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\text{，（}|z|<\infty\text{）}$$

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\text{，（}|z|<\infty\text{）}$$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}\text{，（}|z|<\infty\text{）}$$

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\text{，（}|z|<1\text{）}.$$

例：证明 $e^{iz}=\cos z+i\sin z$.

证明：

$$e^{iz}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(iz)^{2k}}{(2k)!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(iz)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k}+i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}=\cos z+i\sin z.$$

2. 多值函数的 Taylor 级数（有限远常点附近的级数展开）：

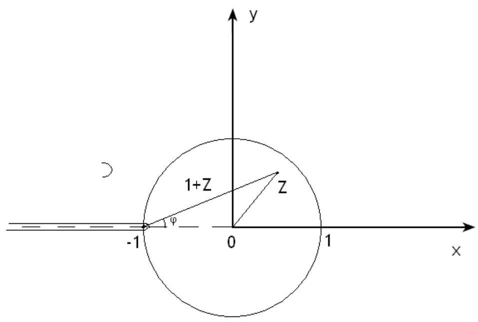
对于多值函数，在确定单值分支后，可以象单值函数一样展开。

例 1：在 $z=0$ 的邻域展开 $\ln(1+z)$.

解：$\ln(1+z)$ 的支点为 $z=-1$ 和 $z=\infty$，由 $z=-1$ 沿负实轴到 $z=\infty$ 作割线（当然有其它作法，只是这样作割线，其收敛半径最大）。

取单值分支：规定上岸 $\arg(1+z)=\varphi=\pi$，

则下岸 $\arg(1+z)=\varphi=-\pi$. 因此，



$z=-1+\rho e^{i\varphi}\quad(-\pi<\varphi<\pi)$，那么

$z=0=-1+1\cdot e^{i0}$. 于是

$$\ln(1+z)\big|_{z=0}=\ln(1\cdot e^{i0})=0.$$

又
$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\ln(1+z)\bigg|_{z=0}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+z)^n}\bigg|_{z=0}$$
$$=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{\left(1-1+1\cdot e^{i0}\right)^n}=(-1)^{n-1}(n-1)!$$

于是，$\ln(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}z^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n\quad[|z|<1,\because R=1(z=0\to-1)]$.

自证：若取另一单值分支：规定上岸 $\arg(1+z)=\varphi=3\pi$，则下岸 $\arg(1+z)=\varphi=\pi$.因此，$z=-1+\rho e^{i\varphi}\quad(\pi<\varphi<3\pi)$. 那么，$z=0=-1+1\cdot e^{i2\pi}$（此 2π 是因为再加上 π 就有上岸的 3π）. 于是 $\ln(1+z)\big|_{z=0}=\ln(1\cdot e^{i2\pi})=2\pi i$.

又 $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\ln(1+z)\bigg|_{z=0}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+z)^n}\bigg|_{z=0}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{\left(1-1+1\cdot e^{i2\pi}\right)^n}=(-1)^{n-1}(n-1)!$

于是 $\ln(1+z)=2\pi i+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}z^n=2\pi i+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n$ （$|z|<1$）

还可取其他分支: $\ln(1+z)=2k\pi i+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n$.

（X）例 2：在 $z=0$ 的邻域展开 $(1+z)^{\alpha}$（α 为非整数）。

解：$(1+z)^{\alpha}$ 的支点为 $z=-1$ 和 $z=\infty$，由 $z=-1$ 沿负实轴到 $z=\infty$ 作割线（当然有其它作法，只是这样作割线，其收敛半径最大）。

取单值分支：规定上岸 $\arg(1+z)=\varphi=\pi$，则下岸 $\arg(1+z)=\varphi=-\pi$. 因此，$z=-1+\rho e^{i\varphi}\quad(-\pi<\varphi<\pi)$. 那么，$z=0=-1+1\cdot e^{i0}$. 于是

$$(1+z)^{\alpha}\Big|_{z=0}=(1\cdot e^{i0})^{\alpha}=1,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}}(1+z)^{\alpha}\Big|_{z=0}=\alpha\left(1+z\right)^{\alpha-1}\Big|_{z=-1+1\cdot e^{i0}}=\alpha\left(1+-1+1\cdot e^{i0}\right)^{\alpha-1}=\alpha\ ,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dz}^2}(1+z)^{\alpha}\Big|_{z=0}=\alpha\left(\alpha-1\right)\left(1+z\right)^{\alpha-2}\Big|_{z=-1+1\cdot e^{i0}}=\alpha\left(\alpha-1\right)\left(1+-1+1\cdot e^{i0}\right)^{\alpha-2}$$
$$=\alpha\left(\alpha-1\right),$$

…… ……

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{dz}^n}(1+z)^{\alpha}\Big|_{z=0}=\alpha\left(\alpha-1\right)\cdots\left(\alpha-n+1\right)\left(1+z\right)^{\alpha-n}\Big|_{z=-1+1\cdot e^{i0}}$$
$$=\alpha\left(\alpha-1\right)\cdots\left(\alpha-n+1\right).$$

因此，$(1+z)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^n\quad(|z|<1).$

若取另一单值分支：规定上岸 $\arg(1+z)=\varphi=3\pi$，则下岸 $\arg(1+z)=\varphi=\pi$.

因此 $z=-1+\rho e^{i\varphi}\quad(\pi<\varphi<3\pi)$. 那么 $z=0=-1+1\cdot e^{i2\pi}$. 于是

$$(1+z)^{\alpha}\Big|_{z=-1+e^{2\pi i}}=(1\cdot e^{i2\pi})^{\alpha}=e^{i2\alpha\pi},$$

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{dz}^n}(1+z)^{\alpha}\Big|_{z=0}=\alpha\left(\alpha-1\right)\cdots\left(\alpha-n+1\right)\left(1+z\right)^{\alpha-n}\Big|_{z=-1+1\cdot e^{i2\pi}}$$
$$=\alpha\left(\alpha-1\right)\cdots\left(\alpha-n+1\right)e^{i2\alpha\pi}.$$

因此，$(1+z)^{\alpha} = e^{i2\alpha\pi}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^{n}\right] \quad (|z|<1).$

3. 在无穷远点的 Taylor 展开（解析函数的 Taylor 级数展开）：

如果 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 解析，则也可以在 $z=\infty$ 展开成 Taylor 级数。

作变换 $z=\frac{1}{t}$，则 $f\left(\frac{1}{t}\right)$ 在 $t=0$ 点解析，将 $f\left(\frac{1}{t}\right)$ 在 $t=0$ 点展开成 Taylor 级数，故 $f\left(\frac{1}{t}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k t^k$，$|t|<r$.

则 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{z^k}$，$|z|>\frac{1}{r}$.

$f(z)$ 在 ∞ 点的 Taylor 级数只有常数项和负幂项。

例：$\frac{1}{1-z}=\frac{-1}{z}\frac{1}{1-1/z}=\frac{-1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^k}=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^{k+1}} (|z|>1).$

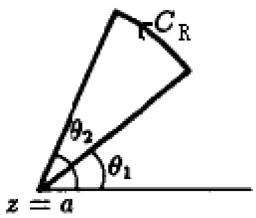
四. 解析函数的 Laurent 级数展开 (Expand to the Laurent series)

Review: $z=x+iy, f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$.

CRCs：$u_x=v_y, u_y=-v_x$.

CI: $\oint_{l^+} f(z)\mathrm{d}z=0$. CIF: $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{l^+}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi,\ f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{l^+}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}\mathrm{d}\xi.$

$\oint_{l^+}\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n}=2\pi i\delta_{1,n};\ \sum_{n=-\infty}^{\infty}\oint_{l^+}c_n(z-a)^n\mathrm{d}z=2\pi i c_{-1}$;（留数 c_{-1}）



$0<|z-a|<R, \lim_{z\to a}(z-a)f(z)=A: \oint_{l^+} f(z)\mathrm{d}z=2\pi iA.$

[大圆弧引理]：如果 $f(z)$ 在区域 D：$R\le|z-a|<\infty$，$\theta_1\le\arg(z-a)\le\theta_2$ 上连续，且当 $z(z\in\mathrm{D})\to\infty$ 时，$(z-a)f(z)$ 一致地趋于 K，则 $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z=iK(\theta_2-\theta_1)$，其中，$C_R$ 是以 a 为圆心，R 为半径，夹角为 $\theta_2-\theta_1$ 的圆弧：$|z-a|=R, \theta_1\le\arg(z-a)\le\theta_2$.

习题 2.2. 求积分 $I=\oint_{|z|=1^+}(z+\frac{1}{z})^{2n}\frac{\mathrm{d}z}{z}\ (n=0,1,2,\cdots).$

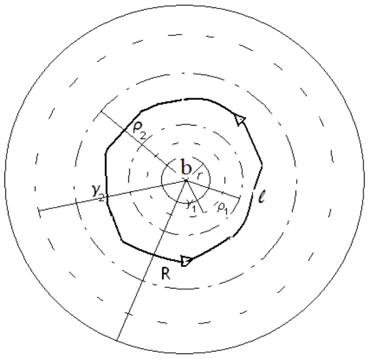
解：$I=\oint_{|z|=1^+}\frac{(1+z^2)^{2n}}{z^{2n}}\frac{\mathrm{d}z}{z}$.

令 $z^2=Z,\,z=e^{i\varphi},\,Z=e^{i2\varphi}$，则 $\frac{\mathrm{d}z}{z}=\frac{\mathrm{d}Z}{2Z}$，$I=2\oint_{|Z|=1^+}\frac{(1+Z)^{2n}}{2Z^{n+1}}\mathrm{d}Z$，其中前因子 2 是因为 z 的幅角转动一圈时 Z 的幅角转动二圈，而其积分将仅转动一圈。因为 $(1+Z)^{2n}$ 的 n 次幂的系数为 $c_{2n}^{n}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}$，所以 $I=\frac{2\pi i}{n!}\left[(1+Z)^{2n}\right]_{Z=0}^{(n)}=2\pi i\frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

一个函数除了可以在解析点作 Taylor（圆域内单连通、无奇点）展开外，有时还需要将它在奇点附近展开成幂级数（环域内解析），此即 Laurent 展开。

1．Laurent 定理：设函数 $f(z)$ 在环形区域 $r<|z-b|<R$ 内是单值解析的，则 $f(z)$ 可以在此环形区域内展开为绝对收敛且一致收敛的幂级数

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(z-b)^k\text{，其中 }a_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_l\frac{f(\xi)}{(\xi-b)^{k+1}}\mathrm{d}\xi$$



[l 是环域内围绕 $z=b$ 一周的任何闭曲线(详见证明过程，只要 $\rho_2>\rho_1$ 并且遍及全解析区域—只能围绕 $z=b$ 一周)，积分沿逆时针方向]，并且这样的展开是唯一的。

证明：这里所谓的在环域 $r<|z-b|<R$ 内一致收敛，意即在任何一个外半径 $\rho_2<R$，内半径 $\rho_1>r$（点画线）的闭环域 $\rho_1\le|z-b|\le\rho_2$ 上一致收敛。设 z 是环域 $r<|z-b|<R$ 内任一点，且 $\rho_1\le|z-b|\le\rho_2$（粗实线附近）. 再取两个圆，$|z-b|=\gamma_1$ $(z=\xi)$ 和 $|z-b|=\gamma_2\,(z=\xi)$（虚线），并满足 $r<\gamma_1<\rho_1$ 和 $\rho_2<\gamma_2<R$.

根据复连通 Cauchy 积分公式，有(天衣无缝的手术刀，且两者积分方向相同)

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi.$$

当ξ在γ_1上时，因为$|Z|=\left|\dfrac{\xi-b}{z-b}\right|\le\dfrac{\gamma_1}{\rho_1}<1$，则

$$\frac{1}{\xi-z}=-\frac{1}{z-b}\frac{1}{1-\dfrac{\xi-b}{z-b}}=-\frac{1}{z-b}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{\xi-b}{z-b}\right)^l$$，（内区域出现负幂次！）

级数在γ_1上一致收敛，并且随着γ_1的减小，这种收敛愈加增快。

当ξ在γ_2上时，因为$|Z|=\left|\dfrac{z-b}{\xi-b}\right|\le\dfrac{\rho_2}{\gamma_2}<1$，则

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{\xi-b}\frac{1}{1-\dfrac{z-b}{\xi-b}}=\frac{1}{\xi-b}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-b}{\xi-b}\right)^k$$，（外区域仍然是正幂次！）

级数在γ_2上一致收敛，并且随着γ_2的增大，这种收敛愈加增快。

于是 $$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2}\frac{f(\xi)}{(\xi-b)^{k+1}}\mathrm{d}\xi\right](z-b)^k=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-b)^k,$$

其中$a_k=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2}\dfrac{f(\xi)}{(\xi-b)^{k+1}}\mathrm{d}\xi$，这是外环线贡献，呈现正幂次。而

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi&=\sum_{l=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{f(\xi)}{(\xi-b)^{-l}}\mathrm{d}\xi\right](z-b)^{-(l+1)}\\&=\sum_{k=-1}^{-\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{f(\xi)}{(\xi-b)^{k+1}}\mathrm{d}\xi\right](z-b)^k=\sum_{k=-1}^{-\infty}a_k(z-b)^k,\end{aligned}$$

上述第一等式用了$(-)(-)=+$，第二等式用了$-(l+1)=k$，其中$a_k=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\dfrac{f(\xi)}{(\xi-b)^{k+1}}\mathrm{d}\xi$，这是内环线贡献，呈现负幂次。把两部分合并起来有

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(z-b)^k\ \ (r<\rho_1\le|z-b|\le\rho_2<R),\qquad a_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_l\frac{f(\xi)}{(\xi-b)^{k+1}}\mathrm{d}\xi\,.$$

* l是(γ_1,γ_2)之间即(r,R)之间绕$z=b$一周的任意一个正向闭合曲线。

** 类似 Taylor 级数收敛性的证明，可以证明正幂部分在区域$|z-b|\le\rho_2$上是绝对且一致收敛的：l是区域$l>r$并且ρ_2以内走向为规定的正方向。

在$l>r$区间，设（引进）展开系数回路积分（表达式）中的被积函数为$F_k(\xi)\equiv f(\xi)/(\xi-b)^{|k|+1}$，则其留数为$a_{|k|}$. 这是因为，直观地

$$F_k(\xi)=f(\xi)/(\xi-b)^{|k|+1}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(\xi-b)^n/(\xi-b)^{|k|+1}=\cdots+\frac{a_{|k|}}{\xi-b}\cdots.$$

虽然$f(z)$在环形区域$r<|z-b|<R$内单值解析，但是$F_k(z)$在区域$l>r$包括ρ_2以外以及至$|z-b|$无穷大内，最多有有限阶奇点甚至单值解析。对于外区域的a_k, 当$k\ge 0$时，被积函数$F_k(\xi)$在区域$l>r$最多有有限阶奇点。这一点在下面的例子中要用到[并且$F_k(\xi)$是单值解析的]。

*** 负幂部分在区域$\rho_1\le|z-b|$上是绝对且一致收敛的：l是区域$l<R$并且ρ_1以外走向为规定的正方向。

在$l<R$区间，引进函数$F_k(\xi)=f(\xi)(z-b)^{|k|-1}$，它的留数为$a_{-|k|}$. 这是因为

$$F_k(\xi)=f(\xi)(\xi-b)^{|k|-1}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(\xi-b)^n(\xi-b)^{|k|-1}=\cdots+\frac{a_{-|k|}}{\xi-b}\cdots.$$

$F_k(z)$在区域$l<R$包括ρ_1以内以及$|z-b|$至零内，最多有有限阶奇点，从而就可计算了。对于内区域的a_k, 当$k<0$时，被积函数$F_k(\xi)$在区域$l<R$最多有有限阶奇点。(内外辩证！)。

**** 因此 Laurent 级数在环域$\rho_1\le|z-b|\le\rho_2$内绝对且一致收敛。

下面证明展开的唯一性：设有$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(z-b)^k$（$\rho_1\le|z-b|\le\rho_2$），以$2\pi i(z-b)^{n+1}$除上式两端，并关于$z$在$l$上积分，有

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_l\frac{f(z)}{(z-b)^{n+1}}\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\oint_l(z-b)^{k-n-1}\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi i}2\pi i c_n=c_n,$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_l\frac{f(z)}{(z-b)^{n+1}}\mathrm{d}z=a_n.\ \delta_{k,n}=\begin{cases}0\ (k\ne n)\\1\ (k=n)\end{cases}$$为 Kronecker 符号。

有关 Laurent 级数的几点说明：

1） Laurent 级数有负幂项（当$z=b$不是$f(z)$的奇点时，负幂项系数全部为0）。

2） 在圆域$|z-b|\le r$内有奇点。奇点一般在圆$|z-b|=r$上，此时$f^{(n)}(b)$存在，但是 Cauchy 导数公式不成立。当然，如果$z=b$是$f(z)$的奇点，则$f^{(n)}(b)$牙根儿不存在。

3） b点不一定是$f(z)$的奇点。如果r内部无奇点，则变成 Taylor 级数了。

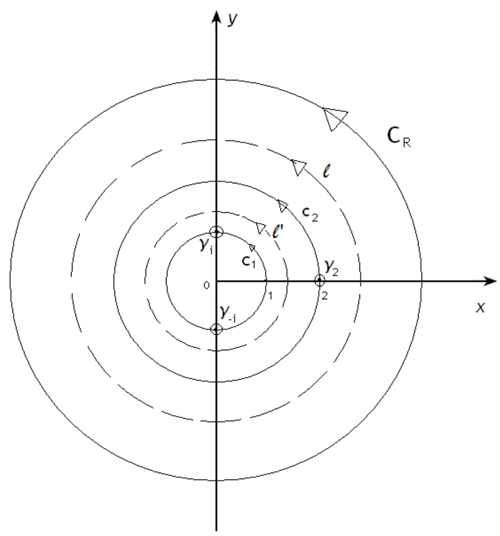
4） 级数的收敛域为环。

5） 系数（即使是正幂项系数）a_k不能写为$\dfrac{f^{(k)}(b)}{k!}$. 证明展开的唯一性只能用积分方法，而 Taylor 级数展开的唯一性既可用微分方法又可用积分方法来证明。

6） 同一函数在不同环域上的 Laurent 展开有不同形式。

7） 正幂次项：$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\left(z-b\right)^k$叫正则部，在$|z-b|\le\rho_2$内部绝对且一致收敛。

8） 负幂次项：$\sum\limits_{k=-1}^{-\infty} a_k\left(z-b\right)^k$叫主部（表征函数奇异特性时起主要作用的部分），在$|z-b|\ge\rho_1$外部绝对且一致收敛。



例：求函数$f(z)=\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$在区域

（1）$2<|z|<\infty$；（2）$1<|z|<2$ 的 Laurent 展式。

解：$f(z)=\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}=\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{2}{z^2+1}$.

It needs to focus on $z=2,\pm i$. **根据定义:**

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n z^n,(b=0),\ c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_l\frac{f(z)}{z^{n+1}}\mathrm{d}z.$$

(1) 当$2<|z|<\infty$时，$c_n=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}\dfrac{z^2-2z+5}{z^{n+1}\left(z-2\right)\left(z^2+1\right)}\mathrm{d}z$，

其中被积函数 $F_n(z)\equiv\dfrac{z^2-2z+5}{z^{n+1}\left(z-2\right)\left(z^2+1\right)}=\dfrac{1}{z^{n+1}}\left(\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{2}{z^2+1}\right)$发生了变化：

对于$c_{|n|}$即当$n\ge 0$时，这个被积函数在$z=0$以外的全域是单值解析的。当$n\ge 0$

时，求c_n就简单了。这是因为$\lim\limits_{z\to\infty} z\cdot\dfrac{z^2-2z+5}{z^{n+1}(z-2)(z^2+1)}=0$，根据大圆弧引理，所以有

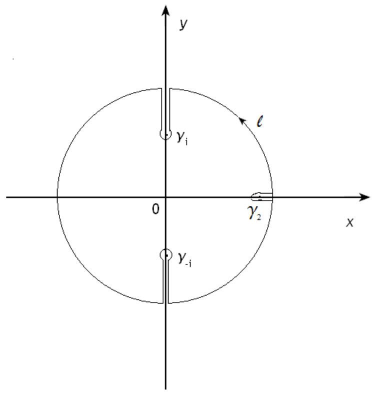
$$\lim_{R\to\infty}\oint_{C_R}\frac{z^2-2z+5}{z^{n+1}(z-2)(z^2+1)}\mathrm{dz}=0,\quad 即\ c_n=0,\ (n=0,1,2,\cdots).$$

由于l任意的缘故，l内部$z=0$为$n+1$阶奇异，过于复杂（当然本例要求$2<|z|<\infty$），其中C_R最简单。$c_n=0,\ (n=0,1,2,\cdots)$表明此级数并无正则部分。

对于$c_{-|n|}$即当$n\le-1$时，这个被积函数在$z=0$非奇点，而$z=2,\pm i$是l内部$(0<|z|<\infty)$的三个一阶奇点。当$n\le-1$时，求c_n就简单了。令$m=-n\ge1$，则

$c_{-m}=c_n=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_l z^{m-1}\left[\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{2}{(z-i)(z+i)}\right]\mathrm{dz}.$挖去三个一阶奇点形成多通区域，由

$\oint_C=\oint_l-\left(\oint_{\gamma_2}+\oint_{\gamma_i}+\oint_{\gamma_{-i}}\right)=0,$（see Chapter 2）



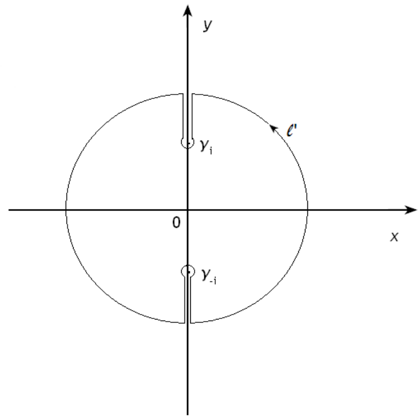
得到（这里先用了留数定理，see Chapter 5，p. 2）

$$\begin{aligned}&\oint_l=\oint_{\gamma_2}+\oint_{\gamma_i}+\oint_{\gamma_{-i}}\\&=(z-2)F_n(z)|_{z=2}+(z-i)F_n(z)|_{z=i}+(z+i)F_n(z)|_{z=-i}\\&=2^{m-1}+i^m+(-1)^m i^m.\end{aligned}$$

故

$$c_{-m}=\begin{cases}2^{2k} & (m=2k+1)\\ 2^{2k-1}+2(-1)^k & (m=2k)\end{cases}\quad(k=0,1,2,\cdots).$$

（2）当$1<|z|<2$时，



$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{l'}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\mathrm{dz}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{l'}F_n(\mathrm{z})\mathrm{dz}\,.$$

对$n\ge0$，$1<|z|<\infty$，由复连通区域 Cauchy 定理，

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}F_n(\mathrm{z})\mathrm{dz}-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2}F_n(\mathrm{z})\mathrm{dz},$$

其中首项是$|z|>2$以外，当$R\to\infty$时，$\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}F_n(\mathrm{z})\mathrm{dz}\to0,$次项是$|z|\le2$以内（相反的方向，当然$|z|>1$以外），$F_n(z)=\dfrac{1}{z^{n+1}}\left(\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{2}{z^2+1}\right)$仅仅$z=2$对积分有贡献；如果选择

$|z|<1$以内，则$z=0$是n阶奇点，计算繁杂。故$c_n=-\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2}\dfrac{1}{z^{n+1}(z-2)}\mathrm{d}z=\dfrac{-1}{2^{n+1}}$.

这是因为仅仅绕$z=2$一周，$F_n(z)$中末项积分没有贡献，这里仅仅是其首项贡献。

对$n\le -1$，$1<|z|<2$, 由复连通区域 Cauchy 定理，$\oint_{C'}=\oint_{l'}-\left(\oint_{\gamma_i}+\oint_{\gamma_{-i}}\right)=0.$

$$\begin{aligned}c_n&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{l'}F_n(z)\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_i}F_n(z)\mathrm{d}z+\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_{-i}}F_n(z)\mathrm{d}z\\&=\frac{i}{2\pi i}\oint_{\gamma_i}\frac{1}{z^{n+1}(z-i)}\mathrm{d}z-\frac{i}{2\pi i}\oint_{\gamma_{-i}}\frac{1}{z^{n+1}(z+i)}\mathrm{d}z\\&=i\left[\frac{1}{i^{n+1}}-\frac{1}{(-i)^{n+1}}\right]=\frac{1}{i^n}+\frac{1}{(-i)^n}=\begin{cases}0 & (n=-2k+1)\\ 2(-1)^k & (n=-2k)\end{cases}\quad (k=1,2,\cdots).\end{aligned}$$

如果选择$|z|>2$以外，则$z=\infty$是n阶奇点，计算繁杂。

Q: 因故未去听课，所以对 Laurent 级数有很多不懂的地方(问题挺多的，又麻烦老师了)：

第一点，在证明 Laurent 定理时，最后将正幂部分和负幂部分合并起来时，为什么可以把环路积分路径统一换成 L？既然这个时候可以换成任意的积分路径，为什么一开始还要区分开用 r1,r2?

第二点，Laurent 系数为什么不可以写成 f(z)的 k 阶导数比上 K 的阶乘？

因为由导数定义，只要 f(z)在 z=b 的邻域内解析，则可导；而 b 点又不一定是奇点。应该说 Laurent 系数不一定能写成那样，而不是不能。

第三点，同一函数在不同邻域内展开为 Laurent 级数不同，是否是因为其在不同邻域收敛半径不同？

第四点，对 Laurent 展开的负幂部分，其收敛域是|1/(z-a)|< δ ,即|z-a|>1/ δ =r,是否存在 r>R 的情况（R 为正幂部分收敛半径）？可否举出例子？

五、Taylor 级数和 Laurent 级数展开的几种常用方法(Usual methods)

1. 利用几何级数公式（这是常用的方法）

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\quad(|z|<1)\text{等等。}$$

例 1：$\dfrac{1}{z^2-1}$在$1<|z|<\infty$的 Laurent 展式。

解：$\dfrac{1}{z^2-1}=\dfrac{1}{z^2}\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{z^2}}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{2n+2}}$，$(|z|>1)$.

此展式仅仅有主部，并且有无穷多个项。但是$z=0$非奇点，而$z=\pm 1$

为奇点，这是因为$|z|>1$.

例 2：求函数 $f(z)=\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{2}{z^2+1}$ 在区域（1）$2<|z|<\infty$；（2）$1<|z|<2$ 的 Laurent 展式。

解：（1）当$2<|z|<\infty$时，

$$f(z)=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}-\frac{2}{z^2}\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n-\frac{2}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{z^2}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n+2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n}}=\sum_{m=1}^{\infty}c_{-m}z^{-m},$$

其中，$c_{-m}=\begin{cases}2^{2k} & (m=2k+1)\\ 2^{2k-1}+2(-1)^k & (m=2k)\end{cases}(k=0,1,2,\cdots)$ 同前。

（2）当$1<|z|<2$时，简单的有

$$f(z)=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{2}{z^2}\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n-\frac{2}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{z^2}\right)^k$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n+2}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k z^{-2k}.$$

2．利用其它初等函数的 Taylor 级数展开式

例3.　$e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!z^n}$，收敛域$\left|\dfrac{1}{z}\right|<\infty$，即$|z|>0$.

3．已知级数的逐项求导或逐项积分

例 4：$\dfrac{1}{(1-z)^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\dfrac{1}{1-z}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}z^n=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n\quad(|z|<1).$

例 5：$\dfrac{1}{(z-1)^3}$ 在$1<|z|<\infty$内的 Laurent 展式。

解：$\dfrac{1}{(z-1)^3}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\dfrac{1}{z-1}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\dfrac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^n}=\dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)}{z^{n+3}}\quad(|z|>1).$

例 6：求$\ln(1+z)$在$z=0$的 Taylor 展式，规定$\ln(1+z)|_{z=0}=0$.

解：$\ln(1+z)=\int_0^z\dfrac{\mathrm{d}\xi}{1+\xi}=\int_0^z\mathrm{d}\xi\sum_{n=0}^{\infty}(-\xi)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1}\ (|z|<1).$

4．已知级数的相乘或相除

例 7： $f(z)=\dfrac{1}{1-3z+2z^2}=\dfrac{1}{1-z}\cdot\dfrac{1}{1-2z}.$

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}z^k\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\left(2z\right)^l=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}2^l z^{k+l}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{n}2^l\right)z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{n+1}-1\right)z^n$$

$(|z|<\frac{1}{2})$, Note： $k+l=n:k=n-l,l[0,n];$

另外 $f(z)=\dfrac{2}{1-2z}-\dfrac{1}{1-z}=2\sum_{k=0}^{\infty}\left(2z\right)^k-\sum_{k=0}^{\infty}z^k=\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{k+1}-1\right)z^k.$

(x)例 8： $f(z)=e^{\frac{1}{1-z}}$ 在 $|z|>1$ 之 Laurent 展式（习题 3.10）。

解法一：设 $t=\dfrac{1}{z}$， $f(z)=e^{\frac{t}{t-1}}=\varphi(t)$ 在 $|t|<1$ 解析，因而可作 Taylor 展式，

$\varphi(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n$ 其中 $a_0=1$，因为 $t=0:\varphi'=\varphi''=\varphi'''=-1,\varphi^{(4)}=1,\cdots$

$$\Rightarrow f(z)=1-\frac{1}{z}-\frac{1}{2!z^2}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{4!z^4}+\cdots;$$

解法二：因为

$$e^{\frac{1}{1-z}}=e^{-(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots)}=(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{4!z^4}+\cdots)(1-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!z^4}+\cdots)(\cdots)\cdots$$

$$\Rightarrow f(z)=1-\frac{1}{z}-\frac{1}{2!z^2}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{4!z^4}+\cdots.$$

(x)例 9：求 $\cot z$ 在 $z=0$ 邻域的 Laurent 级数。

下面我们用级数除法求解：

$$\cot z=\frac{1}{\tan z}=\frac{1}{z+\frac{1}{3}z^3+\frac{2}{15}z^5+\cdots}=\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{1}{3}z^2+\frac{2}{15}z^4+\cdots}.$$

设其分母为 $1+\frac{1}{3}z^2+\frac{2}{15}z^4+\cdots=1+Z$, 则

$$\cot z=\frac{1}{z(1+Z)}=\frac{1}{z}(1-Z+Z^2-Z^3+\cdots)$$

$$=\frac{1}{z}[1-\frac{1}{3}z^2+(\frac{-2}{15}+\frac{1}{9})z^4+\cdots]=\frac{1}{z}-\frac{1}{3}z-\frac{1}{45}z^3+\cdots.$$

例 10：试求函数 $e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})}$ 在 $0<|z|<\infty$ 内的 Laurent 展式[13.2 节，1（2）p.273

生成函数，参数 $x: E=\frac{\hbar^2k^2}{2m}=\frac{\hbar^2x^2}{2mL^2}$，无量纲动量。$E>0: x=\mathrm{Re}\,x; E<0: x=i\,\mathrm{Im}\,x.$].

解：$e^{\frac{x}{2}z}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(x/2)^l}{l!}z^l \quad (|z|<\infty),$ （1）

对于固定的 x 此级数绝对收敛，并且随着 $|z|$ 的减小，这种收敛愈加增快。

$e^{\frac{x}{2}\frac{-1}{z}}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(x/2)^l}{l!}(-\frac{1}{z})^l \quad (0<|z|),$ （2）

对于固定的 x 此级数绝对收敛，并且随着 $|z|$ 的增大，这种收敛愈加增快。

方法一：方程（1）相乘方程（2）得

$$e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})}=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{l!n!}(\frac{x}{2})^{l+n}z^{l-n}.$$

因为此级数是 z^{l-n} 次幂的形式，所以令 $m=l-n.$ 当对 n 求和时，对于固定的 $l, m=l-n$ 可正可负,即 Laurent 级数。所以 $m(-\infty,+\infty)$, 而 $n[0,+\infty)$. 因此代 $l=n+m$ 得

$$\begin{aligned} e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})} &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} z^m\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+m)!}(\frac{x}{2})^{2n+m}\right] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}J_m(x)z^m+\sum_{m=1}^{\infty}J_{-m}(x)z^{-m}. \end{aligned}$$

即对于某一个 m，遍及所有 n，再对所有 m 求和。我们已定义了

$$J_m(x)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m} \quad (m\geq 0);$$

$$J_{-m}(x)\equiv\sum_{n=m}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n-m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-m} \quad (m\geq 1, l=n+m, n-m\geq 0).$$

它们称为 m 阶 Bessel 函数，记为 $J_m(x)$，其母函数为 $e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})}$.

(x)方法二：为了得到乘积中某一个正 m 幂次项 $z^m(m\geq 0)$，取方程（2）中第 n 项与方程（1）中 $l=n+m$ 的项去相乘，这正好得到 $(\frac{1}{z})^n z^{n+m}=z^m$ 项，注意求和变量为 n. 为了得到乘积中某一个负 h 幂次项 $z^{-h}(h\geq 1)$，取方程（1）中第 l 项与方程（2）中 $n=l+h$ 的项去相乘，这正好得到 $z^l(\frac{1}{z})^{l+h}=z^{-h}$

项，这里求和变量为l.两项相加得

$$e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})}=\sum_{m=0}^{\infty}z^m\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+m)!}(\frac{x}{2})^{2n+m}\right]+\sum_{h=1}^{\infty}(-z)^{-h}\left[\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l!(l+h)!}(\frac{x}{2})^{2l+h}\right](0<|z|<\infty),$$

其中首项用了上述分析的$l\to n+m$，末项用了上述分析的$n\to l+h.$

末项再作变换：$-h\to m, l\to n,$ 则

$$e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})}=\sum_{m=0}^{\infty}z^m\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+m)!}(\frac{x}{2})^{2n+m}\right]+\sum_{m=-\infty}^{-1}z^m(-1)^m\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+|m|)!}(\frac{x}{2})^{2n+|m|}\right].$$

故 $$e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})}=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}J_m(x)z^m,$$

其中

$$J_m(x)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m},$$

$$J_{-m}(x)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+m}}{n!(n+m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m}=(-1)^mJ_m(x),(m=0,1,2,\cdots).$$

5．待定系数法

例 11：求$\tan z$在$z=0$的 Taylor 级数（习题 3.11）。

解：分析：由于$\tan z$是奇函数，故其在$z=0$的 Taylor 级数只有奇次幂，$\tan z=\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k+1}z^{2k+1}$，其中系数$a_{2k+1}$待定。因为$\tan z=\dfrac{\sin z}{\cos z}$, 所以

$\sin z=\cos z\cdot\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k+1}z^{2k+1}.$ 因为$\sin z,\cos z$的奇、偶级数已知，所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{(2l)!}z^{2l}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k+1}z^{2k+1}=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k+1}\frac{(-1)^l}{(2l)!}z^{2k+2l+1}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_{2k+1}\frac{(-1)^{n-k}}{(2n-2k)!}\right)z^{2n+1},$$

其中最后一步用到了$k+l=n.$ 比较方程两边级数的系数，即得

$$\sum_{k=0}^{n}a_{2k+1}\frac{(-1)^{n-k}}{(2n-2k)!}=\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\quad(n=0,1,2,\cdots).\quad\text{(RR)}$$

具体地 $n=0$： $a_1=1$

$n=1$：　$-\dfrac{1}{2!}a_1+a_3=-\dfrac{1}{3!}$　　　$a_3=\dfrac{1}{3}$

$n=2$：　$\dfrac{1}{4!}a_1-\dfrac{1}{2!}a_3+a_5=\dfrac{1}{5!}$　　　$a_5=\dfrac{2}{15}$

… …（此处省去 N 个字）

所以 $\tan z=z+\dfrac{1}{3}z^3+\dfrac{2}{15}z^5+\cdots\quad(|z|<\dfrac{\pi}{2}).$

由于 $a_1=1$，方程（RR）为系数 a_{2k+1} 的递推式(recurrence relation).

例 12：求 $\cot z$ 在 $z=0$ 邻域的 Laurent 级数。

解：分析：用与上面相似的方法可求得 $\cot z$ 在 $z=0$ 邻域的 Laurent 级数。

注意 $\cot z$ 的最低次幂为 -1: $\cot z=\dfrac{\cos z}{\sin z}=\dfrac{1-z^2/2+\cdots}{z-z^3/6+\cdots}.$

设 $\cot z=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_{2k-1}z^{2k-1}$，其中 $a_{-1}=1,\ a_{2k-1}\ (k=1,2,3,\cdots)$ 待定。同理可得

$$\cot z=\frac{1}{z}-\frac{1}{3}z-\frac{1}{45}z^3+\cdots\qquad(0<|z|<\pi).$$

- 待定系数法只能用于有限个负幂项（正幂项）的情形。
- 对称性分析。

6．其它展开法

例 13：$\sin^5 z=\dfrac{1}{(2i)^5}(e^{iz}-e^{-iz})^5=\cdots=\dfrac{1}{16}(\sin 5z-5\sin 3z+10\sin z)$, 再代

$\sin z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ 等等即可展开了。

例 14：求函数 $f(z)=\oint_{|\xi|=1}\dfrac{\sin\xi}{1-z^2\xi}\mathrm{d}\xi$ 在 $|z|>1$ 上的 Laurent 展开。

解：

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{-1}{z^2}\oint_{|\xi|=1}\frac{\sin\xi}{\xi-1/z^2}\mathrm{d}\xi=\frac{-1}{z^2}2\pi i\sin(1/z^2)\\&=\frac{-1}{z^2}2\pi i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z^{-2})^{2n+1}}{(2n+1)!}=-2\pi i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{4n+4}}.\end{aligned}$$

六、孤立奇点的分类和特性

(Classications and characteristics of the isolated singular points)

1. 孤立奇点的定义： 设 $f(z)$ 为单值函数（或多值函数的一个单值分支），

但b点是它的奇点，即除$z=b$点以外,在$z=b$点邻域内$f(z)$处处可导，则称b为$f(z)$的孤立奇点。

例 1： $z=0$点是函数$\frac{1}{z}+1$的孤立奇点。$z=0$点不是函数$\frac{1}{\sin(1/z)}$的孤立奇点：它的数值不定[看下面的 2 c) 本性奇点]，$z=0$为本性奇点。

如果$z=b$是$f(z)$的孤立奇点，则一定存在一个环域$0<|z-b|<R$，在此环域内，$f(z)$可展开成 Laurent 级数：

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-b)^n, \qquad 0<|z-b|<R.$$

正幂部分称为<u>*解析部分;*</u>负幂部分称为<u>*主要部分;*</u>两者均在环域$0<|z-b|<R$内解析; $f(z)$在$z=b$点的奇性完全由主要部分决定。

2. 孤立奇点的分类：

a) 可去奇点：级数中无主部（不含负幂项），即$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-b)^n$.

例 2：$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=\lim_{z\to 0}(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots)=1$, 因此当约定$\left.\frac{\sin z}{z}\right|_{z=0}=1$时，$z=0$是$\frac{\sin z}{z}$的可去奇点。

* b为$f(z)$的可去奇点$\Leftrightarrow \lim_{z\to b}f(z)=a_0$（$a_0$为有限复数）。

证：因为$z=b$是可能的孤立奇点，又$\lim_{z\to b}f(z)=a_0$有限，所以在b的邻域有，$|f(z)|\le M$, $|a_n|=\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-b)^{n+1}}\mathrm{d}z\right|\le\frac{1}{2\pi}\oint_C\frac{|f(z)|}{|z-b|^{n+1}}|\mathrm{d}z|\le\frac{M}{\rho^n}$.

曲线 C：$|z-b|=\rho$. 令$\rho\to 0$，得$a_n=0$（$n=-1,-2,\cdots$）,不含负幂项。

** 约定$f(z)=\begin{cases}f(z) & z\ne b\\ \lim_{z\to b}f(z) & z=b\end{cases}$，则$f(z)$在$b$点也解析了(去掉了)。只要有此约定，可去奇点就不是奇点了。

b)极点：级数中只有有限个负幂项，即

$$f(z)=\sum_{n=-m}^{\infty}a_n\left(z-b\right)^n=\frac{\varphi(z)}{(z-b)^m},$$

其中$\varphi(z)=a_{-m}+a_{-m+1}(z-b)+\cdots+a_0(z-b)^m+\cdots$为$z=b$及其邻域的解析函数。当$m\ge 1, a_{-m}\ne 0$时，则称$z=b$为$f(z)$的$m$阶极点(poles of the order of m). $m=1$又称为单极点。

* $z=b$为$f(z)$的极点$\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to b}f(z)=\infty$.

证：因为$z=b$是孤立奇点，又$\lim\limits_{z\to b}f(z)=\infty$，所以当$|z-b|<\delta$时，$|f(z)|>M\gg 1$, $\left|\frac{1}{f(z)}\right|<\frac{1}{M}<\varepsilon\ll 1$, 即$\lim\limits_{z\to b}\frac{1}{f(z)}=0$.因此$z=b$是$\frac{1}{f(z)}$的可去奇点，令$\frac{1}{f(z)}=\sum\limits_{k=m}^{\infty}a_k\left(z-b\right)^k \quad (a_m\ne 0)$，$\because a_0=\lim\limits_{z\to b}\frac{1}{f(z)}=0$，$\therefore m\ge 1$. 因此上式又可改写为$\frac{1}{f(z)}=\left(z-b\right)^m\psi(z)$,其中$\psi(z)\sim\frac{1}{\varphi(z)}$，并且$\lim\limits_{z\to b}\psi(z)=a_m\ne 0$，$\psi(z)$在$z=b$及其邻域内解析。因此，$\frac{1}{\psi(z)}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k\left(z-b\right)^k (c_0\ne 0)\sim\varphi(z)$在$z=b$及其邻域内也解析。所以$c_k=a_{k-m}, c_{n+m}=a_n$：

$$f(z)=\left(z-b\right)^{-m}\frac{1}{\psi(z)}=\left(z-b\right)^{-m}\sum_{k=0}^{\infty}c_k\left(z-b\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\left(z-b\right)^{k-m}=\sum_{n=-m}^{\infty}c_{n+m}\left(z-b\right)^n.$$

** 若$z=b$是$f(z)$之m阶极点，则从$\lim\limits_{z\to b}\left[\left(z-b\right)^n f(z)\right]=\begin{cases}\infty & n<m\\ a_{-m}\ne 0 & n=m\\ 0 & n>m\end{cases}$

可确定极点的阶数（n为自然数），而无需展开$f(z)$为 Laurent 式。

例 3：$\frac{z}{\sin^2 z}$有极点$z=n\pi \ (n=0,1,2......)$. 但是

$$\lim_{z\to n\pi}(z-n\pi)\frac{z}{\sin^2 z}=\begin{cases}\infty\ (n\ge 1)\\ 1\ \ (n=0)\end{cases}\Rightarrow z=0\text{为单极点。}$$

$$\lim_{z\to n\pi}(z-n\pi)^2\frac{z}{\sin^2 z}=n\pi(n\ge 1)\Rightarrow z=n\pi\text{为二阶极点。}$$

*** $z=b$是$f(z)$的m阶极点，则$z=b$一定是$1/f(z)$的m阶零点。

例 4： $z=n\pi$ 是 $f(z)=1/\sin z$ 的一阶极点（单极点） $(n=0,1,2,\cdots)$.

$z=1$ 是 $f(z)=1/(z-1)^2$ 的二阶极点。

c)本性奇点：级数中有无穷多个负幂项，即 $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-b)^n$.

* b 为 $f(z)$ 的本性奇点 $\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to b}f(z)$ 不存在[换句话说， $z\to b$ 的方式不同， $f(z)$ 趋于不同的值]。

例 5： $z=0$ 是 $e^{\frac{1}{z}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}$ $(0<|z|<\infty)$的本性奇点。

当 z 沿正实轴趋于 0 时， $e^{\frac{1}{z}}\to\infty$;

当 z 沿负实轴趋于 0 时， $e^{\frac{1}{z}}\to 0$;

当 z 沿虚轴趋于 0 时， $e^{\frac{1}{z}}$ 不趋于一个确定的数；

特别是，当 z 以序列 $\pm i/2n\pi\,(n=1,2,\cdots)$ 趋于 0 时， $e^{\frac{1}{z}}\equiv 1$;

当 z 以序列 $\pm i/(2n+1)\pi\,(n=1,2,\cdots)$ 趋于 0 时， $e^{\frac{1}{z}}\equiv -1$;

当 z 以序列 $\pm i/(n+1/2)\pi\,(n=1,2,\cdots)$ 趋于 0 时， $e^{\frac{1}{z}}\equiv \mp i$.

Picard 定理：若 $z=b$ 是 $f(z)$ 的本性奇点，则在 b 点的任意小的邻域内， $f(z)$ 可以无限次地取任何一个数。

$(+1)^n=1,(n=0,\pm1,\pm2,\cdots,$ 实数空间);

$$a^{\alpha}=\begin{cases}\pm\sqrt{|a|}e^{i\frac{1}{2}\arg a},(\alpha=1/2,\text{无穷个相位，两类数：}+: n=\text{even}，-: n=\text{odd});\\ |a|^{\alpha}\,e^{i(2\pi n+\arg a)\alpha},(\alpha=\text{任意实数}, n=0,\pm1,\pm2,\cdots,\text{复数空间}).\end{cases}$$

还有 e.g., $f(z)=z^2-1$ ， $\Rightarrow[\pm f(z)]^{\alpha}--$ 复平面上单枝单值解析

$[(-1)^{1/2}\equiv +i$--基本定义$,(-1)^{1/2}\neq -i]$.

d)无穷远点 (Chapter 1:无穷远点只有一个，其模 $+\infty$ ，而幅角不定):

如果 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的孤立奇点，则在环域 $R<|z-b|<\infty$ 内， $f(z)$

可展开成 Laurent 级数:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n z^n\ ,(R<|z-b|<\infty)（和 z=0 点的形式相同 \Rightarrow b 任意）$$

- 负幂部分称为*解析部分*; 正幂部分称为*主要部分*; 两者均在环域 $R<|z-b|<\infty$ 内解析;
- 可去奇点：级数中不含正幂项；极点：级数中只有有限个正幂项；
- 本性奇点：级数中有无穷多个正幂项；或者，作代换 $z=\dfrac{1}{\xi}$，把 $f(z)$ 化成 $f(1/\xi)$，然后讨论 $\xi=0$ 点的奇性，即为 $z=\infty$ 的奇性。

例 6: $z=\infty$ 是 $f(z)=\dfrac{1}{1+z}$ 的可去奇点；$z=\infty$ 是 $f(z)=1+z^2$ 的二阶极点；

$z=\infty$ 是 $e^z,\sin z,\cos z$ 的本性奇点(Laurent 展式含无穷多个正幂项)。

例 7： $z=\infty$ 是多项式 $p_n z^n+p_{n-1}z^{n-1}+......p_1 z+p_0$ $(p_n\neq 0)$ 的 n 阶极点

（n 个正幂项）。

例 8：设实数 $|k|<1$，试证明 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}k^n e^{-i(n+1)\theta}=\frac{1}{e^{i\theta}-k}=\frac{1}{\cos\theta-k+i\sin\theta}$， 即

$$\sum_{n=0}^{\infty}k^n\sin[(n+1)\theta]=\frac{\sin\theta}{1-2k\cos\theta+k^2}\ 和\ \sum_{n=0}^{\infty}k^n\cos[(n+1)\theta]=\frac{\cos\theta-k}{1-2k\cos\theta+k^2}.$$

证明：设 $|z|>k$，则 $\displaystyle\frac{1}{z-k}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{k}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^n}{z^{n+1}}.$

再设 $z=e^{i\theta}$（$|z|=1>k$）$=\cos\theta+i\sin\theta$，则

$$\frac{1}{z-k}=\frac{1}{\cos\theta-k+i\sin\theta}=\frac{\cos\theta-k-i\sin\theta}{(\cos\theta-k)^2+\sin^2\theta}=\frac{\cos\theta-k-i\sin\theta}{1-2k\cos\theta+k^2}.$$

比较得证。

思考题：枝点是什么类型的奇点？

（特别类，因为要割线，非孤立奇点，但是转一圈幅角有变化）

Home work: 3.5; 3.9; 3.12; 3.13: (1), (4).