Chapter 1 复数和复变函数

一、复数的基本概念 (Basic concepts of complex number)

形如 $a+\mathrm{i}b$（$a,b\in R$，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$）的数称为复数。（两元素两算子与四元素四算子）

1．复数（Complex number）的三种形式：

1) $z=x+\mathrm{i}y=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)=\rho e^{\mathrm{i}\varphi}$，（$x,y\in R,\ \rho,\varphi\in R$）

代数式：$z=x+\mathrm{i}y$；（缺点：无法表示多值函数的高相位）

三角式：$z=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$;（极坐标系下的表示）

指数式：$z=\rho e^{i\varphi}$， 其中 $e^{i\varphi}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(i\varphi)^n$.

$e^{i\varphi}=\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi$ 称为欧拉公式。

2) 一些术语（terminology）和符号(notation):

$\mathrm{Re}\,z=x$，实部（Real part），$\mathrm{Im}\,z=y$，虚部（Imaginary part）.

$|z|=\mathrm{mod}\,z=\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，模（Modulus），$\varphi$ 称为幅角（Argument），记作 Argz．而将满足 $0\le\varphi_0\le 2\pi$ 或 $-\pi\le\varphi_0\le\pi$ 的 φ 值称为幅角的主值或主幅角，记为 $\arg z$，因此有 $\mathrm{Arg}z=\arg z+2n\pi\quad(n=0,\pm1,\pm2\cdots)$.

当取 $-\pi\le\arg z\le\pi$ 时，有关系

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x} & x>0\\ \dfrac{\pi}{2} & x=0,y>0\\ -\dfrac{\pi}{2} & x=0,y<0\\ \pi+\arctan\dfrac{y}{x} & x<0,y\ge0\\ -\pi+\arctan\dfrac{y}{x} & x<0,y<0\end{cases}$$

3) $\bar{z}(\text{or } z^*)=x-\mathrm{i}y=\rho(\cos\varphi-\mathrm{i}\sin\varphi)=\rho e^{-\mathrm{i}\varphi}$，$\bar{z}(\text{or } z^*)$ 称为 z 的复共轭或共轭复数(Complex conjugate of z)，当然，z 也是 $\bar{z}(\text{or } z^*)$ 的复共轭。

注意：* 复数无大小。但它们的模之间可以比较大小。

**** $z_1=z_2$ 的充要条件为** $\mathrm{Re}\,z_1=\mathrm{Re}\,z_2, \mathrm{Im}\,z_1=\mathrm{Im}\,z_2$

(单值可以，多值时没有定义幅角**)；** $\rho_1=\rho_2, \varphi_1=\varphi_2$. **(可以)**

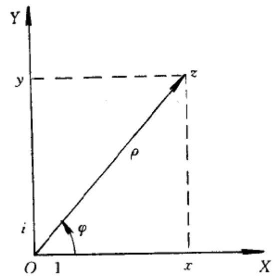
2．复数的几何表示：

复平面（**Complex plane**）：通过直角坐标系或极坐标系将平面上的点 (x,y)

或 (ρ,φ) 与复数 $x+\mathrm{i}y$ 或 $\rho e^{\mathrm{i}\varphi}$ 做成一一对应，

此时的平面称为复平面，其**自由矢量**为

（讨论：$\bar{z}$ 在哪里？）



3．复数的运算规则：

设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1=\rho_1(\cos\varphi_1+\mathrm{i}\sin\varphi_1)=\rho_1 e^{\mathrm{i}\varphi_1}$，

$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2=\rho_2(\cos\varphi_2+\mathrm{i}\sin\varphi_2)=\rho_2 e^{\mathrm{i}\varphi_2}$.

1) 加法：$z_1+z_2=(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2)$ 满足交换律和结合律。

减法：$z_1-z_2=(x_1-x_2)+\mathrm{i}(y_1-y_2)$.

加减法的几何解释与向量加减法相似，三角形法则（自由矢量，可以平移）。

2) 乘法：（$\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}=\mathrm{i}^2=-1$）——和多项式乘法一样

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2 &= (x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1) \\ &= \rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+\mathrm{i}\sin(\varphi_1+\varphi_2)] \\ &= \rho_1\rho_2 e^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)}. \end{aligned}$$

$|z_1\cdot z_2|=\rho_1\rho_2=|z_1|\cdot|z_2|$，乘积的模=模的乘积。

$\mathrm{Arg}(z_1\cdot z_2)=\varphi_1+\varphi_2=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2$，乘积的幅角=幅角的和。

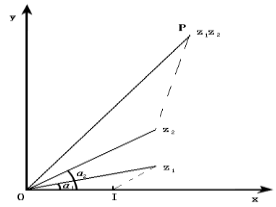
特别地，$z\bar{z}=|z|^2$.

乘法的几何解释：在 0x 轴上取单位线段 0I，

作 $\Delta 0z_2P$ 和 $\Delta 0Iz_1$ 相似，那么 P 点就表示

乘积 $z_1\cdot z_2$，这是因为 $|z_1|/1=|z|/|z_2|$.

$(|z|=|z_1||z_2|)$



3) 除法：假设 $z_1 \neq 0$，

$$\frac{z_2}{z_1} \equiv z_2 \cdot \frac{1}{z_1} = z_2 \cdot \frac{\bar{z}_1}{|z_1|^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_1^2 + y_1^2} + i\frac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_1^2 + y_1^2}$$

$$= \frac{\rho_2}{\rho_1}\left[\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \mathrm{i}\sin(\varphi_2 - \varphi_1)\right]$$

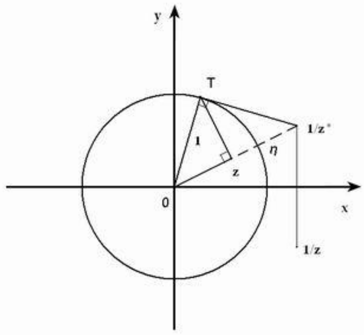
$$= \frac{\rho_2}{\rho_1}e^{\mathrm{i}(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

$$\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{|z_2|}{|z_1|}，\quad \mathrm{Arg}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \varphi_2 - \varphi_1 = \mathrm{Arg}z_2 - \mathrm{Arg}z_1.$$

几何解释（$\frac{1}{z}$）：先看(即设)

$z' = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{\rho}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$，若

$|z| < 1$，过 z 点作射线 Oz 的垂线，交单位圆周于 T，过 T 作单位圆周的切线，这条切线与 Oz 的交点就是 $z' = \frac{1}{\bar{z}}$，而它关于 x 轴的对称点为 $\frac{1}{z}$.



设 z 点到 z' 点的距离为 η，则图示三个直角三角形之间存在如下关系：

$$|\mathrm{Tz'}| = (\rho+\eta)^2 - 1 = 1 - \rho^2 + \eta^2，解得\quad \rho + \eta = \frac{1}{\rho} = \left|\frac{1}{\bar{z}}\right|.$$

若 $|z| > 1$，只需先作切线，再作垂线。若 $|z| = 1$，$z' = z$.

4) 整数幂：

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = \rho^n e^{in\varphi},$$

$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$ ----De Moivre 公式。

4．（X）复数运算的一些基本性质：（两个重要不等式）

1）$|z_1 \pm z_2| \le |z_1| + |z_2|$， 三角形两边之和大于第三边;

$|z_1 \pm z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big|$， 三角形两边之差小于第三边。

证明：利用 $\operatorname{Re} z = x \le \sqrt{x^2+y^2} = |z|$，

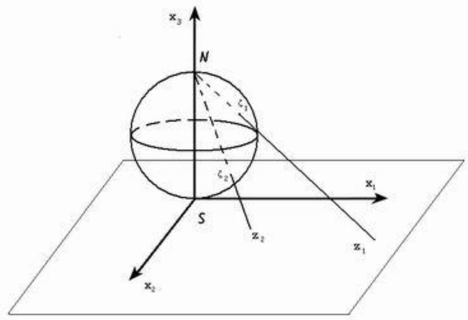
$\because z_1\cdot\bar{z}_2 + \bar{z}_1\cdot z_2 = 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) \le 2|z_1\bar{z}_2| = 2|z_1||z_2|$，

$\therefore (z_1\pm z_2)(\bar{z}_1\pm\bar{z}_2) = |z_1|^2+|z_2|^2 \pm (z_1\cdot\bar{z}_2+\bar{z}_1\cdot z_2) \substack{\le\\ \ge} (|z_1|\pm|z_2|)^2$.

2）$\overline{z_1\pm z_2} = \bar{z}_1\pm\bar{z}_2$.

3）$\overline{z_1\cdot z_2} = \bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$. $\overline{\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)} = \dfrac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1}$.

5．复球面与无穷远点：



考虑一个半径为 R 的球面 S（$x_1^2+x_2^2+(x_3-R)^2=R^2$），点(0,0,0)称为南极，与复平面 Ox_1x_2 的原点重合，点(0,0,2R)称为北极，记为 N. 对于 C 中的任一有限远点 z，它与 N 连接的直线只与 S 交于一点 ξ. 反之，球面 S 上任意一点 ξ（N 点除外），它与 N 连接的直线也只与 C 交于一点 z. 所以，除 N 点外，球面 S 上的点和复平面 C 上的点都是一一对应的。对于 N 点，我们发现，当 $|z|\to+\infty$ 时，$\xi\to N$，因此在复平面 C 中引进一个理想点，作为与 N 对应的点，称为无穷远点，记为 $z=\infty$. 加上无穷远点的复平面称为扩充复平面，也叫闭复平面，记为 $C_\infty = C\cup\{\infty\}$. 不包含无穷远点的复平面 C 称为有穷复平面，也叫（开）复平面。这样，C_∞ 与 S 建立起来的一一对应，称为球极射影。S 称为复球面。

注意： * 无穷远点只有一个，其模为 $+\infty$，而幅角是不确定的。

** 同样对于 $z=0$ 点，其模为 0，幅角是不确定的。

*** $z=\infty \Rightarrow \xi=\dfrac{1}{z}=0$：作 $\xi=\dfrac{1}{z}$ 变换，或复球面均是就 $|z|$ 大而言，其中 $|\xi|$ 为 N 与 ξ 点之间的距离。

二、复变函数（Functions of complex variable）

1. 区域的概念（复习）:

点集 E： 由复数点组成的集合。

例如，$|z|<1$，表示以原点为圆心，半径为 1 的圆（单位圆）的内部。

$|z+1|+|z-1|=4$，表示以± 1为焦点，半长轴为 2 的椭圆。

点 z_0 的邻域： 对于实数$\delta>0$，满足条件$|z-z_0|<\delta$的点的全体称为z_0点的δ邻域，记为$V(z_0;\delta)$。

∞点的邻域： 满足条件$|z|>R$（R 是正实常数）的所有点 z 的集合，即以点$z=0$为圆心，R 为半径的圆的外部，记为$V(\infty;R)$。

点集 E 的内点： 设平面上给定一点集 E，如果z_0及其某邻域$V(z_0;\delta)$的点全部属于 E，则称z_0为点集 E 的内点。

点集 E 的外点： 设平面上给定一点集 E，如果z_0及其某邻域$V(z_0;\delta)$的点全部不属于 E，则称z_0为点集 E 的外点。

点集 E 的边界点： 设平面上给定一点集 E，如果z_0的任一邻域中都含有 E 和非 E 的点，则称z_0为点集 E 的边界点。

区域 D： 满足下面两条的点集称为区域。

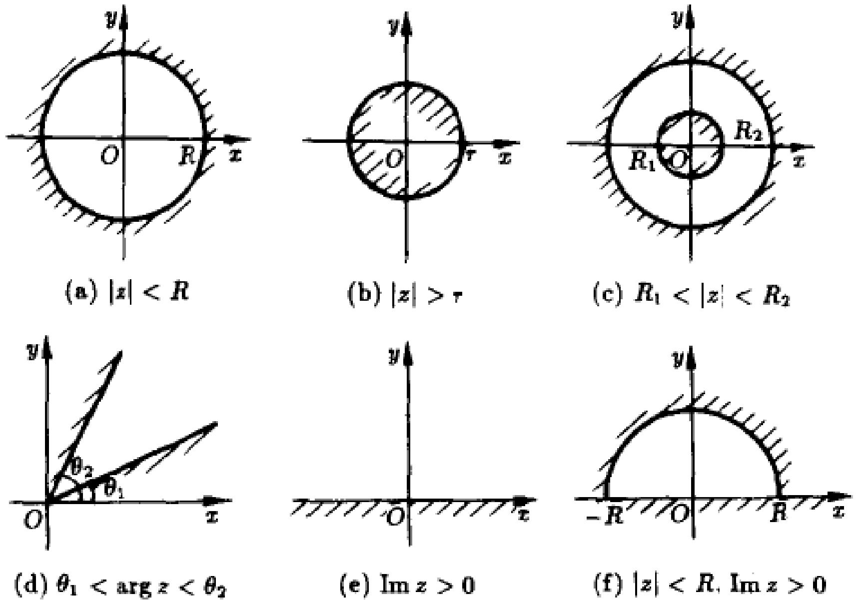
a）D 为开集: D 中的每一点都是内点$\Rightarrow$区域全由内点组成;

b) D 是连通集: 对于 D 中的任意两点，总可以用某一曲线段连接起来，而这条曲线上的所有点都属于该点集$\Rightarrow$区域内点连通。

闭区域$\bar{\mathrm{D}}$： 由区域 D 及其全部边界点所组成的点集，闭域 D 通常记为$\bar{\mathrm{D}}$.

单连通域： 在连通域 D 中任作闭曲线，若该曲线内部的点全部属于 D，则称 D 为单连通域。否则称 D 为复连通域！（请讨论之！）

有界域 D： 若存在有限大的圆$|z|=R$，使得$D\subset V(0;R)$，则称 D 为有界域，否则为无界域（有界域离散量子数无界域连续量子数）。



几个典型的区域（阴影在边界外侧）

2. 复变函数：

（1） 复变函数定义：若对于复平面上区域 D 中的每一个复数 z，按照一定规律，都有一个（或几个）复数值 w 与之相对应，则称 w 为 z 的复变函数 (单值函数（或多值函数）)，区域 D 称为定义域。复变函数有两种表示形式：

$$w = f(z),\quad (z = x + iy, w = \xi + i\eta),$$

$$w = u(x,y) + iv(x,y),\ [(u,v) \text{ 均为实变量 } (x,y) \text{ 的二元实函数}]。$$

例如： （1） $w = z + b$ 平移变换

（2） $w = e^{i\alpha} z$ 旋转变换

（3） $w = rz$ 缩放变换

（4） $w = az + b$ 设 $a = re^{i\theta}$，

三步：1/旋转 θ；2/缩放 r；3/平移 b.

（5） $w = R^2/z$ （广义）反演变换。如果 $R = |z|$，则 $w = R^2/z$ 就是 z 的复共轭；如果 R 与 $|z|$ 是相同的量纲（例如长度），则 w 亦具有相同的量纲。

(2) 复变函数的极限：设 z_0 是函数 $f(z)$ 的定义域内的一点，如果对 $\forall\varepsilon>0$，都 $\exists\delta>0$，（隐含 $\delta(\varepsilon)$，$\delta(z_0)$ 和 $\varepsilon(z_0)$）使得对于任意满足条件 $0<|z-z_0|<\delta$ 的复数 z，都有 $|f(z)-A|<\varepsilon$，那么复数 A（有限）称为函数 $w=f(z)$ 当 z 趋于 z_0 时的极限，记为 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$. 如果复数 A 无限，则称函数 $f(z)$ 在 z_0 处发散（divergence）。设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，$A=u_0+iv_0$，$z_0=x_0+iy_0$，则

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0 \end{cases}.$$

(3) 复变函数的连续与一致连续：$\forall\varepsilon$，$\exists\delta>0$，当 $|z-z_0|<\delta$，恒有 $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$，那么称函数 $w=f(z)$ 在点 z_0 连续（在点 z_0 邻域连续） [等价定义：设 z_0 是函数 $f(z)$ 的定义域内的一点，$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$，那么称函数 $w=f(z)$ 在点 z_0 连续]，

如果函数 $w=f(z)$ 在区域 D 上的每一点都连续，则称函数 $w=f(z)$ 在区域 D 上是连续的。

注： $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 $z_0=x_0+iy_0$ 处连续 $\Leftrightarrow \begin{cases} u(x,y) \\ v(x,y) \end{cases}$ 均在 (x_0,y_0) 处连续。

$\forall\varepsilon$， $\exists\delta>0$，对任何 $z_0\in\bar{\mathrm{D}}$，只要 $|z-z_0|<\delta$，且 $z\in\bar{\mathrm{D}}$，恒有 $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$，那么称函数 $w=f(z)$ 在 $\bar{\mathrm{D}}$ 上一致连续

[等价定义：如果 $\forall\varepsilon$， $\exists\delta>0$，只要 $|z_1-z_2|<\delta$， $z_1,z_2\in\bar{\mathrm{D}}$，恒有 $|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$，那么称函数 $w=f(z)$ 在 $\bar{\mathrm{D}}$ 上一致连续]。

注：* 函数 $f(z)$ 在区域 $\bar{\mathrm{D}}$ 上一致连续，一定在 D 上连续。

**连续定义中的δ不仅与ε有关，还与z_0点有关。

一致连续定义中的δ只与ε有关，与z_0点无关。

例如， $f(z)=\dfrac{1}{z}$在区域$0<|z|<\infty$上连续，但不一致连续。

例：求函数$f(z)=2x+iy^2$ 在$z_0=2i$的极限，并判断在该点的连续性。

解：因为，$\begin{cases}\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}u(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}2x=0\\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}v(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}y^2=4\end{cases}$，因此，

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}f(z)=0+i4=4i$，又

$f(z_0)=f(2i)=2x+iy^2=4i$

所以， $f(z)=2x+iy^2$在$z_0=2i$的极限存在，并连续。

例：求函数$f(z)=\dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{z}{\bar{z}}-\dfrac{\bar{z}}{z}\right)$ 在$z_0=0$的极限，并判断在该点的连续性。

解：设$z=x+iy$，则

$f(z)=\dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{z}{\bar{z}}-\dfrac{\bar{z}}{z}\right)=\dfrac{1}{2i}\dfrac{4ixy}{x^2+y^2}=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}=u(x,y)+iv(x,y)$，显然，

$v(x,y)=0$在$(0,0)$点的极限存在并连续，

然而，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}u(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$不存在，事实上，令$y=kx$，有

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=kx\to0}}\dfrac{2x(kx)}{x^2+(kx)^2}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=kx\to0}}\dfrac{2k}{1^2+k^2}=\dfrac{2k}{1^2+k^2}$，对于不同$k$

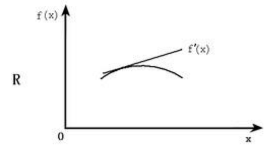
值，极限不同，故知$u(x,y)$在$(0,0)$点的极限不存在。

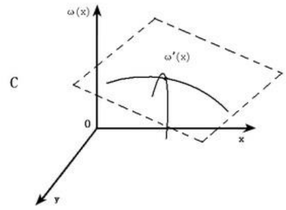
所以， $f(z)=\dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{z}{\bar{z}}-\dfrac{\bar{z}}{z}\right)$在$z_0=0$的极限不存在。

（4） 复变函数的导数：设z_0是函数$f(z)$的定义域内的一点，当z

在z_0的邻域内沿一切方向、按任何方式趋于点z_0时，即当

$\Delta z = z - z_0 \to 0$时，若极限 $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ 具有同一有限值，则称函数 $f(z)$ 在点 z_0 可导，称此极限值为 $f(z)$ 在 z_0 的导数，记为 $f'(z_0)$ 或 $\left.\dfrac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0}$.





注意:* 与 $\Delta z \to 0$ 的方式无关;

**求导 $f'(x)$ 最多有两个方向，而 $w'(z)$ 可有∞多个方向。

*** $\partial u(x,y)/\partial x$ 是偏导， $df(x+iy)/dz$ 是全导。

（5） 复变函数可导的必要条件—Cauchy-Riemann(C-R)条件：

设 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 在

$z_0 = x_0 + iy_0$ 点可导，则 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处必定满足

$$\begin{cases} \left[\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right]_{(x_0,y_0)} \\ \left[\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right]_{(x_0,y_0)} \end{cases} .$$

证明： $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 点可导，根据定义，

$\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ 存在，并且与 $z \to z_0$ 的路径无关。

下面选择两个特殊路径：

首先沿平行于实轴的直线（即 $y = y_0$ 为常数），

$z = x + iy_0$，$\Delta z = \Delta x$，

$$\begin{aligned} &\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i\frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x}\right] \\ &= \left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} + i\left.\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}; \end{aligned}$$

然后沿平行于虚轴的直线（即 $x = x_0$ 为常数），

$z = x_0 + iy$，$\Delta z = i\Delta y$，

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$
$$=\lim_{\Delta y\to 0}\left[\frac{u(x_0,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)}{i\Delta y}+i\frac{v(x_0,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)}{i\Delta y}\right]$$
$$=-i\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}+\left.\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}.$$

既然 $f(z)$ 在 z_0 点可导, 那么上面两个极限应相等, 于是

$$\begin{cases}\left[\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right]_{(x_0,y_0)}\\ \left[\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x}=-\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right]_{(x_0,y_0)}\end{cases}\quad \text{简记为}\quad \begin{matrix}u_x=v_y\\ v_x=-u_y\end{matrix}.$$

Cauchy-Riemann 条件不充分，例如：$f(z)=\begin{cases}0 & (z=0)\\ xy^2z/(x^2+y^4) & (z\neq 0)\end{cases}$. 在 $z=0$ 附近，我们有 $u=x^2y^2/(x^2+y^4)$, $v=xy^3/(x^2+y^4)$ [显然 $f(z)=0\,(z=0)$ 的定义多余]。虽然 $u_x=v_y=0, v_x=-u_y=0.$ 这不是固定点的导数，而是严格意义下的 $f'|_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}=0$： $f(z)=zg(x,y)=zxy^2/(x^2+y^4)$.

$$f'(0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)[g(x,y)+g_x'\Delta x+g_y'\Delta y+\cdots]-zg(x,y)}{\Delta z}$$
$$=\lim_{x,y\to 0}[g(x,y)+\frac{z+\Delta z}{\Delta z}(g_x'\Delta x+g_y'\Delta y+\cdots)]=0.$$

而 $f'(0)=\lim\limits_{(x=y^2)z\to 0}\dfrac{y^4}{y^4+y^4}=\dfrac{1}{2}$. 因此，$z=0$ 附近 $f(z)$ 不可导！

(6) 复变函数可导的充要条件：$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 $z_0=x_0+iy_0$ 点可导的充要条件是:

a) $u(x,y)$, $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处具有一阶偏导数且满足 C-R 条件—必要条件;

b) $u(x,y)$, $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处具有一阶连续偏导数且满足 C-R 条件—充分条件.

证明：假设 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处具有一阶连续偏导数，因此 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，即

$$\Delta u = u\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right)-u\left(x_0,y_0\right)$$
$$=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}\Delta x+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}\Delta y+O\left(\left|\Delta z\right|^2\right),$$
$$\Delta v = v\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right)-v\left(x_0,y_0\right)$$
$$=\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}\Delta x+\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}\Delta y+O\left(\left|\Delta z\right|^2\right),$$

其中$O(\varepsilon^2)$是数量级比ε更高阶的无穷小量，即$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{O(\varepsilon^2)}{\varepsilon}=0$. $\Rightarrow$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$
$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\left[\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}\Delta x+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}\Delta y\right]+i\left[\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}\Delta x+\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}\Delta y\right]+O\left(\left|\Delta z\right|^2\right)}{\Delta z}$$
$$\overset{\text{CRCs}}{=}\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\left[\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}+i\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}\right]\left(\Delta x+i\Delta y\right)}{\Delta x+i\Delta y}$$
$$=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}+i\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$$

$\Rightarrow$ (由假设知) 存在$\Rightarrow f(z)$可导。反之，要$f'(z)$存在，则需要u_x, v_x存在并且连续（有极限且邻域可导），同理（反用 CRCs）u_y, v_y存在并且连续—充分条件。

(7)求导法则：与实函数的求导法则、公式相同。

例:判断$w=x^3-iy^3$何处可导。

解：$u(x,y)=x^3$，$v(x,y)=-y^3$，

$u_x=3x^2$，$u_y=0$，$v_x=0$，$v_y=-3y^2$，

由 C-R 条件，$\begin{cases}u_x=v_y\\ v_x=-u_y\end{cases}$ 得，$\begin{cases}3x^2=-3y^2\\ 0=0\end{cases}$.

解得，$x=0, y=0$，表明w除$z=0$点外处处不可导，

其次，四个偏导数在$x=0, y=0$点存在且连续，故w在$z=0$点可导。

三、解析函数（Analytic functions）

1. 定义：$f(z)$在z_0及其某邻域内处处可导，称$f(z)$在z_0点解析。$f(z)$ 在区域 D 内处处解析称为$f(z)$在区域 D 内解析。

* $f(z)$在区域 D 内解析$\Leftrightarrow$ $f(z)$在区域 D 内处处可导。

** 奇点（sinqularity）：函数的不可导点称为该函数的奇点。

如$z=0$是$\frac{1}{z}$的奇点，亦是$\ln z$的奇点。

2. 函数解析的充要条件：如果$u(x,y)$，$v(x,y)$在区域 D 内具有一阶连续偏导数（此条件可放宽为：$f(z)$在区域 D 内连续），且满足 C-R 条件，则$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在 D 内解析。

3. 解析可导的必要条件：$(u,v)_{x,y}$存在且满足 CRCs；充分条件：$(u,v)_{x,y}$存在和连续且满足 CRCs.

例：研究函数$f(z)=e^x\cos y+ie^x\sin y$ 的可导性、解析性。

解：$f(z)=e^x\cos y+ie^x\sin y=u(x,y)+iv(x,y)$，

$u(x,y)=e^x\cos y$，$v(x,y)=e^x\sin y$.

因为 $\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y=\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y=-\frac{\partial v}{\partial x}$，且$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$于全平面连续，故$f(z)$于全平面（当然不包括$z=\infty$，此函数在$z=\infty$无定义）处处可导，处处解析。又

$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\cos y+ie^x\sin y=f(z)$，其导数为其本身。

注：$f(z)=e^x\cos y+ie^x\sin y=e^x(\cos y+i\sin y)=e^xe^{iy}=e^{x+iy}\equiv e^z$.

3. 解析函数的简单性质：

(1) 同一区域 D 上的两个解析函数的和、差、积、商（分母不为 0）仍为解析函数。

(2) 解析函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$的实部等值线$u(x,y)=c$与虚部等

值线$v(x,y)=d$（c,d 为实常数）相互正交。

Grade in 3D real space（x,y,z）: $\nabla\equiv\vec{i}\partial_x+\vec{j}\partial_y+\vec{k}\partial_z$.

$\nabla u\cdot\nabla v=0:(\vec{i}\,u_x+\vec{j}\,u_y)\cdot(\vec{i}\,v_x+\vec{j}\,v_y)=u_xv_x+u_yv_y=-u_xu_y+u_yu_x=0.$

For examples, see below.

(3) 若 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内解析，则在 D 内有

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0,\qquad \frac{\partial^2v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2v}{\partial y^2}=0,$$

即它的实部和虚部都是 D 内的调和函数[具有二阶连续偏导数，且满足 Laplace 方程：$\nabla^2u\equiv(\partial_{xx}^2+\partial_{yy}^2+\partial_{zz}^2)u(x,y,z)=0$]，且称 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 为共轭调和函数。$\because u_x=v_y,u_y=-v_x.\therefore u_{xx}=v_{yx},u_{yy}=-v_{xy}.\oplus:u_{xx}+u_{yy}=0.$

4．已知实部 $u(x,y)$ [或虚部 $v(x,y)$] 求解析函数：

C-R 条件使得解析函数的实部和虚部相互关联。

例：已知某一个解析函数的实部 $u(x,y)=2y(x-1)$，且 $f(2)=-i$，求此解析函数。

解法一：$u(x,y)=2y(x-1)$，因此，由 C-R 条件，$\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=2y$，把 x 作为参数，积分($)得

$$v(x,y)=\int 2y\mathrm{d}y+C(x)=y^2+C(x)\quad [C(x)\text{ 为待定函数}].$$

再由 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}$，得 $C'(x)=-2(x-1)$，积分($)得

$$C(x)=-\int 2(x-1)\mathrm{d}x+C=-(x-1)^2+C\text{（}C\text{ 为待定常数）}.$$

所以 $v(x,y)=y^2-(x-1)^2+C$.

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=2y(x-1)+i\left[y^2-(x-1)^2+C\right].$$

令 $z=2$，即 $\begin{cases}x=2\\y=0\end{cases}$，得 $f(2)=i(C-1)=-i$，$\therefore C=0$.

于是，满足所给条件的解析函数为

$$f(z)=2y(x-1)+i\left[y^2-(x-1)^2\right]=-i(z-1)^2.$$

* ***当 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 为有理函数时，令 $y=0, x=z$，就可以把解析函数 $u(x,y)+iv(x,y)$ 化成 $f(z)$ 的形式。*** 这是因为有理函数总可以写成泰勒级数：$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=\sum_{n,m}(a_{nm}+ib_{nm})x^n y^m$, 反过来用一次二项式展开有，$f(z)=\sum_{n,m}(a_{nm}+ib_{nm})x^n y^m=\sum_n c_n(x+iy)^n=\sum_n c_n z^n$，其中 c_n 与 $a_{nm}+ib_{nm}$ 之间存在二项式展开系数的关系。故 $x=z: f(x)=f(z)$, 并且 $c_n=a_{n0}+ib_{n0}$. 当 $z=z_0\neq 0$ 区域时此定理仍然成立。

解法二：Math：$v(x,y)$ 有全微分形式；Phys：要求 $v(x,y)$ 是态函数。

$$\mathrm{d}v=\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y=-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y=-2(x-1)\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y=\mathrm{d}\left[-(x-1)^2+y^2\right].$$

配成全微分了，故有 $v(x,y)=y^2-(x-1)^2+C$.

($): $v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\left(-2(x-1)\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y\right)+C$，积分与路径无关 [这是因为解析函数有任意阶导数，因此 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 有任意阶偏导数且连续；在此基础上此曲线积分满足与路径无关的条件：$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=0$ (See Adv. Math. Or Chapt 2 Cauchy Theorem，$f(x,y)=\int P(x,y)\mathrm{d}x+\int Q(x,y)\mathrm{d}y$)；这是因为 $\partial^2_{xy}(u,v)=\partial^2_{yx}(u,v)$，所以此条件在这里成立].

5．解析函数的物理解释——空间无源、无旋的平面标量场：

标量场 $\phi: \vec{E}=-\nabla\phi$ (梯度)；矢量场 $\vec{A}: \vec{B}=\nabla\times\vec{A}$ (旋度)；$\nabla\bullet\vec{A}$ (散度).

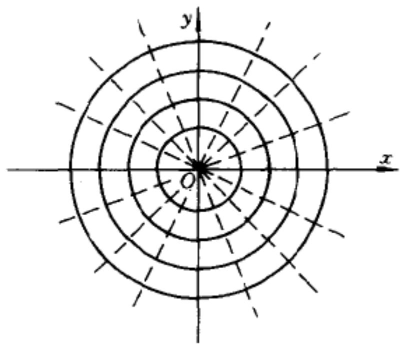
Maxwell's Eqs.: $\nabla\bullet\vec{D}=\rho_{0;}\nabla\times\vec{E}=-\partial\vec{B}/\partial t; \nabla\bullet\vec{B}=0; \nabla\times\vec{H}=\vec{j}+\partial\vec{D}/\partial t.$

线性各向同性介质：$\vec{D}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}, \vec{B}=\mu\mu_0\vec{H}, \vec{j}=\sigma\vec{E}$. 物理问题：无源、无旋平面标量场。例如，静电场、温度场和流场等，它的势 $\varphi(x,y,z)=\varphi(x_1,x_2,x_3)$ 满足 Laplace 方程（see part II），$\nabla^2\varphi=0$. 如果

它与三维空间的某一方向（如 $z=x_3$ 方向）无关，那么，这种场称为平面场。此时 $\varphi(x,y)$ 满足二维 Laplace 方程，$\nabla^2\varphi\equiv\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$. 梯度、散度和旋度的定义 see chapter 12.

解析函数的实部（或虚部）可以解释为某无源平面静电场的势。解析函数的实部和虚部之梯度是相互正交的，而我们知道平面静电场的等势线簇和电力线簇是相互正交的，$\nabla u\cdot\nabla v=0$. 因此，如果我们将解析函数的实部 $u(x,y)$ [或虚部 $v(x,y)$] 解释为某平面静电场的势，则其虚部 $v(x,y)$ [或实部 $u(x,y)$] 将描述它的电力线。这些等势线族和电力线族是无旋的射线族，磁力线族才是有旋的同心圆族。

例 1：考虑解析函数 $f(z)=\ln z$（其中 $z=\rho e^{i\varphi},\rho\neq 0,0<\varphi<2\pi$）所对应的平面静电场，即问它是什么样平面静电场的复势？



解： $f(z)=\ln z=\ln\rho+i\varphi,$

$u=\ln\rho, v=\varphi, \nabla u\cdot\nabla v=0.$

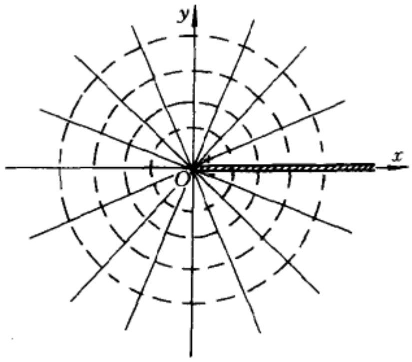
1） 如果将它的实部 $u=\ln\rho$ 看作静电场的势，那么其虚部 $v=\varphi=C$ 则表示电力线簇（$\vec{E}=-\nabla u=-\vec{\rho}/\rho^2$），这是以原点为端点的一组射线（如图中的虚线所示）。等势线簇为 $u=\ln\rho=C'$，即 $\rho=e^{C'}$，它是以原点为圆心的一组同心圆（如图中的实线所示）。

物理意义：这是与 $z=x_3$ 轴重合的无穷长均匀带电直导线周围的静电场。

由高斯定理 $\frac{Q}{\varepsilon_0}=\oint\!\!\oint \vec{E}\cdot d\vec{S}$ 和 $\vec{E}=-\nabla u=-\frac{1}{\rho}\vec{e}_\rho$，容易求得线电荷密度为

$\lambda\equiv Q/L_z=-2\pi\varepsilon_0.[\because \nabla=\vec{i}\partial_x+\vec{j}\partial_y+\vec{k}\partial_z=\vec{e}_r\partial_r+r^{-1}\vec{e}_\theta\partial_\theta+(r\sin\theta)^{-1}\vec{e}_\varphi\partial_\varphi$

$=\vec{e}_\rho\partial_\rho+\rho^{-1}\vec{e}_\varphi\partial_\varphi+\vec{e}_z\partial_z, d\vec{S}=2\pi\rho\vec{e}_\rho dz, \therefore Q=-2\pi\varepsilon_0 z|_{z=L_z}.]$



2）如果将它的虚部$v=\varphi$看作静电场的势，那么其实部$u=\ln\rho=C$，即$\rho=C$则表示电力线簇，（$\vec{E}=-\nabla v=-\hat{\varphi}/\rho$,如图中的虚线所示），等势线簇为$\varphi=C'$，（如图中的实线所示）。这是以正实轴为割线，上岸电势为 0，而下岸电势为2π时的平面静电场。（Home Work）

例 2：已知一平面静电场的电力线簇$\{C\}$是抛物线簇$y^2=C^2+2Cx\quad(C>0)$，求等势线簇，并求此电场的复势。（见习题 1.11）

解：从电力线方程解出参数$C=-x+\sqrt{x^2+y^2}$，（$\because C>0$，因此取“+”）。

不可以直接令$v(x,y)=-x+\sqrt{x^2+y^2}$，这是因为$-x+\sqrt{x^2+y^2}$不是调和函数，即它不满足 Laplace 方程$\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$，而解析函数要求$v(x,y)$是调和函数。

那么，如何寻找$v(x,y)$呢？做法如下：

令$v(x,y)=F(t)$，$t=-x+\sqrt{x^2+y^2}$，[取$v\neq t$而是t的函数，C是参数，t是参数方程的解；正因为如此，如果满足$v(x,y)=F(t)=C'$（即等值线簇），那么一定有$t=-x+\sqrt{x^2+y^2}=C$（另外一个等值线簇），此正好是题意给定的电力线簇---一种新方法]。这样

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\frac{\partial t}{\partial x}=F'(t)\frac{x-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=F''(t)\left[\frac{x-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]^2+F'(t)\frac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}.$$

同理，$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=F''(t)\left[\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]^2+F'(t)\frac{x^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}},$$

于是，$0=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=2\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}}F''(t)+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}F'(t)$，

即 $2\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)F''(t)+F'(t)=0$，或 $2tF''(t)+F'(t)=0$.

解之得，$F(t)=C_1\sqrt{t}+C_2$. 因此

$v(x,y)=F(t)=C_1\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}-x}+C_2$.

下面求 $u(x,y)$，改用极坐标系 $(\sqrt{1-\cos\varphi}=\sqrt{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}=\sqrt{2}\sin\frac{\varphi}{2},\frac{\varphi}{2}[0,\pi])$

$v(\rho,\varphi)=C_1\sqrt{2\rho}\sin\frac{\varphi}{2}+C_2$，又极坐标下的 C-R 条件（Home Work），

$\frac{\partial u}{\partial\rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\varphi}=\frac{1}{\rho}\cdot C_1\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{2}}\cos\frac{\varphi}{2}=\frac{C_1}{\sqrt{2\rho}}\cos\frac{\varphi}{2}$,

$\frac{\partial u}{\partial\varphi}=-\rho\frac{\partial v}{\partial\rho}=-\rho\cdot C_1\frac{1}{\sqrt{2\rho}}\sin\frac{\varphi}{2}=-\frac{C_1\sqrt{\rho}}{\sqrt{2}}\sin\frac{\varphi}{2}$. 于是，

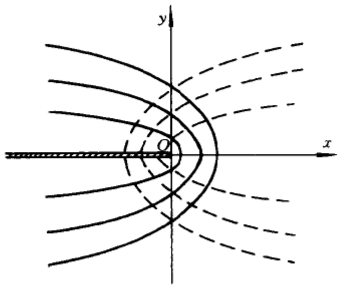
$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial\rho}\mathrm{d}\rho+\frac{\partial u}{\partial\phi}\mathrm{d}\phi=\frac{C_1}{\sqrt{2\rho}}\cos\frac{\phi}{2}\mathrm{d}\rho-\frac{C_1\sqrt{\rho}}{\sqrt{2}}\sin\frac{\phi}{2}\mathrm{d}\phi=\mathrm{d}\left(C_1\sqrt{2\rho}\cos\frac{\phi}{2}\right)$.

所以 $u=C_1\sqrt{2\rho}\cos\frac{\varphi}{2}+C_3$，即 $u(x,y)=C_1\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}+x}+C_3$. 由此解得

$u=C$"等势线族: $y^2=C^2-2Cx \quad (C>0)$;

$v=C$' 电力线族: $y^2=C^2+2Cx \quad (C>0)$.

复势为 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=C_1\sqrt{2z}+iC_2+C_3$.



三、初等函数（Elementary functions）

1. 整数幂函数：z^n （$n=0,\pm1,\pm2\cdots$）.

当 $n=-1,-2,-3,\cdots$ 时，z^n 在除了 $z=0$ 点外处处解析；当 $n=0$ 时，$z^n=1$，为常数，在闭平面全解析（在闭平面解析的函数一定为常数，$\because 0\le|z|\le\infty$，并且一般函数总是可以展开成级数的，$\therefore$ 只能为常数）；当 $n=1,2,\cdots$ 时，z^n 在全平面解析，奇点：$z=\infty$ (z^n 在 $z=\infty$ 不可导，φ 不定)。

2. 指数函数：

$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$，在全平面解析，奇点：$z=\infty$.

和实函数形式一样，其导数为，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}e^z = e^z$，它是周期为$2\pi i$的周期函数，即$e^{z+2k\pi i} = e^z\ (k=0,\pm1,\pm2\cdots)$, $e^z \neq 0$.

3. 三角函数：

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}.$$（并非e^{iz} & e^{-iz^*}之线性组合）

因为e^{iz}, e^{-iz}在全平面解析，所以，$\cos z$和$\sin z$也在全平面解析，

$z=\infty$是它们唯一的奇点。

和实三角函数一样，$\cos z$和$\sin z$都是周期为2π的周期函数。

和实三角函数不同，$\cos z$和$\sin z$的模可以大于1:

$$|\cos z|^2 = \frac{1}{4}(e^{iz}+e^{-iz})(e^{-iz^*}+e^{iz^*}) = \frac{1}{4}[e^{i(z-z^*)}+e^{-i(z-z^*)}+e^{i(z+z^*)}+e^{-i(z+z^*)}]$$
$$= \frac{1}{4}(\mathrm{e}^{-2y}+\mathrm{e}^{2y}+\mathrm{e}^{i2x}+\mathrm{e}^{-i2x}) \overset{x=0\text{时}}{=} \frac{1}{2}+\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{-2y}+\mathrm{e}^{2y}) \overset{y\to\pm\infty}{\approx} \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2|y|} \to \infty.$$

其他三角函数，$\tan z, \cot z, \sec z, \csc z$可以用$\cos z$和$\sin z$定义，形式和实数时一样。如 $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$等等。

实三角函数中的各种恒等式对于复三角函数仍成立，如

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1,$$
$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2.$$

4. 双曲函数：$\cosh z = \dfrac{e^z+e^{-z}}{2}$，$\sinh z = \dfrac{e^z-e^{-z}}{2}$，全平面解析，奇点：$z=\infty$.

双曲函数和三角函数之间可互化, 如

$\sinh z = -i\sin iz$，$\cosh z = \cos iz$，

它们的导数为：$(\sinh z)' = \cosh z$，$(\cosh z)' = \sinh z$.

四、多值函数(Multi-value functions)：

1. 根式函数——正整数幂函数的反函数（实数$\sqrt{a^2}=|a|$，复数$\sqrt{z}=\sqrt{|z|}e^{i\theta/2}$）

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}}\ (n=2,3,4\cdots),\ w = z^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\mathrm{Arg}z}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\arg z+2k\pi}{n}}, (k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

多值函数$z^{\frac{1}{n}}$, 对任意z（$z=0, z=\infty$除外），有n个w与之对应。

为了更清楚地看出多值函数的性质，现在仔细分析一下函数$w=\sqrt{z-a}$.

如果记$w=\rho e^{i\phi}$， $z-a=re^{i\theta}$ $(0\le\theta<2\pi)$，根据定义有$\rho^2 e^{i\cdot 2\phi}=re^{i\theta}$，

所以$\rho^2=r$， $2\varphi=\theta+2k\pi$， $\rho=\sqrt{r}$， $\varphi=\dfrac{\theta}{2}+k\pi.$

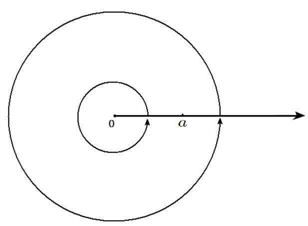
因此，对于给定的一个z值，有两个w值与之对应：

$$w_1(z)=\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} \qquad \text{（相当于上面的}k=0,\pm2,\pm4,\cdots\text{）；}$$

$$w_2(z)=-\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} \qquad \text{（相当于上面的}k=\pm1,\pm3,\cdots\text{）．}$$

这里，函数的多值性来源于幅角的多值性，准确地说，来源于宗量$z-a$（而不是自变量z）幅角的多值性。多值性的表现则是w的幅角。为明确起见，可以把$w=\sqrt{z-a}$表示为：$|w|=\sqrt{|z-a|}$， $\arg w=\dfrac{1}{2}\arg(z-a)$.

为了更进一步说明多值函数$w=\sqrt{z-a}$的性质，现在不妨规定好z平面上某一点$\arg(z-a)$的值，而后研究z沿一定曲线连续变化时，相应的w值的连续变化。当z沿一定简单闭曲线运行一周回到原处时，我们发现，可能出现两种情形。一种是闭曲线内不包含a点，当z运行一周回到原处时， $\arg(z-a)$也还原，因此对应的w值不变；另一种情形是闭曲线内包含a点，当z运行一周回到原处时， $\arg(z-a)$增加2π，而在w平面上， w值并不还原。



现象 1：从上面的分析可以看出，a点在多值函数$w=\sqrt{z-a}$中具有特殊的地位：当z绕a点转一圈回到原处时，对应的函数值不还原；而当z不绕a点转一圈回到原处时，函数值还原。因此我们把a点称为多值函数$w=\sqrt{z-a}$的**支点**(这里是一阶支点，因为绕两圈后w还原)。

现象 2：同样可以看出，$z=\infty$也是多值函数$w=\sqrt{z-a}$的支点。这是因为，如果作一个足够大的闭曲线，当z沿这个闭曲线变化一周回到

原处时，w 值一定不还原（只要这个闭曲线足够大，就一定会把 a 点包含在内）。而这样的闭曲线，又可以看成是绕 ∞ 点转一圈。也就是说，当 z 绕 ∞ 点转一圈回到原处时，函数值也不还原。因此 ∞ 点也是 $w=\sqrt{z-a}$ 的**支点**。

解决办法：这样看来，为了完全确定多值函数 $w=\sqrt{z-a}$ 的函数值与自变量 z 值之间的对应关系，我们可以采用规定宗量 $z-a$ 的幅角变化范围。当宗量 $z-a$ 的幅角限制在某个周期内时，$w=\sqrt{z-a}$ 的幅角也就唯一地确定，因而 w 值也就唯一的确定了。例如，规定 $0\le\arg(z-a)<2\pi$ 或 $2\pi\le\arg(z-a)<4\pi$，等等。

作为一个例子，设 $w(z)=\sqrt{z-1}$，规定 $0\le\arg(z-1)<2\pi$，

求 $w(2)$，$w(i)$，$w(0)$ 和 $w(-i)$.

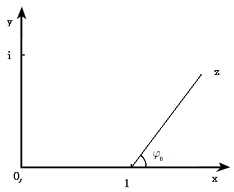
解：$\arg w=\frac{1}{2}\arg(z-1)$. 因为 $0\le\varphi_0=\arg(z-1)<2\pi$，所以

$$\arg(z-1)\big|_{z=2}=0, \qquad w(2)=1.$$

$$\arg(z-1)\big|_{z=i}=\frac{3\pi}{4}, \qquad w(i)=\sqrt[4]{2}e^{i\frac{3\pi}{8}}.$$

$$\arg(z-1)\big|_{z=0}=\pi, \qquad w(0)=e^{i\frac{\pi}{2}}=i.$$

$$\arg(z-1)\big|_{z=-i}=\frac{5\pi}{4}, \qquad w(-i)=\sqrt[4]{2}e^{i\frac{5\pi}{8}}.$$



显然，在规定幅角 $0\le\arg(z-a)<2\pi$ 下，w 的幅角一定限制在 $0\le\arg w<\pi$，即被限制在 w 平面的上半平面。在这样的限制下，$w=\sqrt{z-a}$ 的值与自变量 z 值之间存在一一对应关系。如果规定 $2\pi\le\arg(z-a)<4\pi$，则 $\pi\le\arg w<2\pi$，w 将限制在下半平面，w 值与自变量 z 值之间又有新的一一对应关系。在 $4\pi\le\arg(z-a)<6\pi$，$6\pi\le\arg(z-a)<8\pi$，… 或 $-2\pi\le\arg(z-a)<0$，$-4\pi\le\arg(z-a)<-2\pi$，…的规定下，还会重复出现这些结果。由于它们并不给出新结果，所以就不必讨论了。

这样看来，只要适当规定宗量的幅角变化范围，就可以将多值函数单值化。幅角变化的各个周期，给出多值函数的各个单值分支。每个单值分支都是单值函数，整个多值函数就是它的各个单值分支的总和。在上面的讨论中，多值函数 $w=\sqrt{z-a}$ 有两个单值分支，分别是 w 的上半平面和下半平面：

$0\le\arg(z-a)<2\pi$ 给出单值分支 I：$0\le\arg w<\pi$，

$2\pi\le\arg(z-a)<4\pi$ 给出单值分支 II：$\pi\le\arg w<2\pi$.

将多值函数划分为若干个（甚至无穷个）单值分支，其实质就是限制 z 的变化方式，在上面的例子中，就是限制 z 不得绕 a 点或 ∞ 点转圈。这种规定可以用几何方法形象化地表现出来（**Riemann 面**）：在 z 平面上平行于实轴从 $z=a$ 点向右作一条割线，一直延续到 ∞ 点。如果规定在割线的上岸（接近这个实轴）$\arg(z-a)=0$，就给出单值分支 I；如果规定在割线的下岸 $\arg(z-a)=2\pi$，就给出单值分支 II。这两个单值分支合起来，就得到一个完整的 w 平面，即整个多值函数 w。割线的作用就是限制 z 的变化方式。由于割线连接了多值函数的两个支点，$z=a$ 和 ∞，因此，z 不再能够绕一个支点转圈了（这时，绕两个支点转一圈还是允许的）。更进一步地，我们可以将两个割开的 z 平面粘接起来，第一个面的割线下岸（$\arg(z-a)=2\pi$）和第二个面的割线上岸（$\arg(z-a)=2\pi$）相连，第一个面的割线上岸（$\arg(z-a)=0$）和第二个面的割线下岸（$\arg(z-a)=4\pi$）相连。这就构成了二叶 Riemann 面。对于函数 $w=\sqrt{z-a}$ 来说，二叶 Riemann 面上的 z 点和 w 平面上的点是一一对应的。这种做法的好处是，z 的变化路线不受限制，可以从一个单值分支运动到另一个单值分支。因此，只要规定了 w 在某一点 z_0 的值，并明确说明 z 的连续变化路线，我们就可以得到唯一确定的 w 值。

注意：* 单值分支的划分不是唯一的，或者说，宗量幅角变化范围的规定不是唯一的。例如，也可以规定：$-\pi\le\arg(z-a)<\pi$ 和 $\pi\le\arg(z-a)<3\pi$，

（即相当于从 a 点沿负实轴方向到 ∞ 点作割线），或

$-\dfrac{3\pi}{2}\le\arg(z-a)<\dfrac{\pi}{2}$ 和 $\dfrac{\pi}{2}\le\arg(z-a)<\dfrac{5\pi}{2}$，

（即相当于从 a 点沿虚轴正方向到 ∞ 点作割线）。

**割线的做法多种多样，甚至不必是直线。在一般情况下，割线可能不止一条，也不一定需要用一条割线把全部支点都连接起来。

*** 支点必为奇点。这是因为在支点的邻域内无法把各单值分支分开，支点对各单值分支来说是共有的，这点的导数无法定义。

****奇点不见得是支点。例如$1/z=e^{-i\varphi}/r, z=0$是奇点但不是支点。

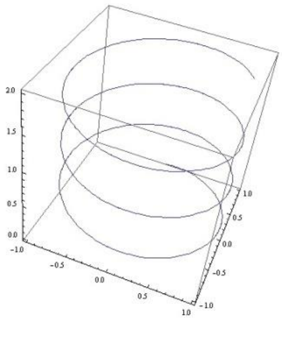
多值复变函数不能象实分析中那样分解为多个独立的单值函数，而是通过 Riemann 曲面单值化。关于 Riemann 曲面，可以用“时钟面”来帮助理解。即问当长针指在“1-12”圈的“3”时短针指在“0-12”的何处？这一关系可理解为多值（12 个值）函数。为指出短针的确切位置，可如此分析：长针走 12 圈，短针走一圈。假定长针从“12”开始走完第一圈进入第二圈时不是原来的平面，而是第二个平面。再第三、第四圈...亦如此，直至十二个平面。长针走第 13 圈时才进入第一个平面，这时短针也回到原来的位置。虽然实际上长针所走的这十二个平面是重叠的，但不是孤立的，而成螺旋状，中心点（以及∞点）为这十二个面所共有。同时想象第十二平面的终了与第一平面的开始连接起来，这样一个几何实体（从正面看是一个平面，从侧面看有十二叶）就是一个 Riemann 曲面。中心点（与∞点）称为支点，且为$12-1=11$阶支点，在 Riemann 曲面上函数单值。例如，长针指在第 5 叶的“3”上，则短针必然在“4”与“5”间的某处。

2．对数函数——指数函数的反函数

对给定的$z(z\neq 0)$，满足方程$e^w=z$的w称为对数函数，记为$w=\mathrm{Ln}z$.

令$w=u+iv$，$z=re^{i\theta}$，就得到$e^u\cdot e^{iv}=re^{i\theta}$. 所以，

$u=\ln r=\ln|z|$，$v=\theta+2n\pi$（$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$）.



多值函数，$\mathrm{Ln}z=\ln|z|+i\mathrm{Arg}z$，有时也称

$\ln z=\ln|z|+i\arg z$为其主值。

其多值性的来源是宗量z幅角的多值性，多值性的表现则是函数值w的虚部。对应每一个z值，有无穷多个w值，它们的实部相同，虚部相差2π的整数倍。

$w=\mathrm{Ln}z$的支点是$z=0$和∞. 作割线连接0和∞，并规定割线一侧的$\arg z$值，即可得到$w=\mathrm{Ln}z$的单值分支。

$w=\mathrm{Ln}z$ 有无穷多个单值分支，相应地，$w=\mathrm{Ln}z$ 的 Riemann 面是无穷多叶的。每个单值分支内，都有 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\mathrm{Ln}z)=\dfrac{1}{z}$.

双曲函数还有 $\tanh z=\dfrac{\sinh z}{\cosh z}=\dfrac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}}$，奇点：$e^z+e^{-z}=0\Rightarrow e^{2z}=-1$

$\Rightarrow z_n=\dfrac{1}{2}\ln(-1)=\dfrac{1}{2}i(2n+1)\pi=i(n+\dfrac{1}{2})\pi\ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，

以及 $\mathrm{sech}\, z=\dfrac{1}{\cosh z}=\dfrac{2}{e^z+e^{-z}}$，奇点：$z_n=i(n+\dfrac{1}{2})\pi$.

3. 一般幂函数：$z^\alpha=e^{\alpha \mathrm{Ln}z}$（$z\neq0,\alpha$ 任意复常数），多值函数，支点：$z=0,\infty$.

4. 反三角函数：$\arcsin z=-i\mathrm{Ln}\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)$;

$\arccos z=-i\mathrm{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)$;（双多值函数，$\pm\sqrt{z^2-1}$ 只能取一个）

$\arctan z=\dfrac{1}{2i}\mathrm{Ln}\dfrac{1+iz}{1-iz}$. （单多值函数）

例 1. 判断函数 $w=\ln(z-a)(z-b)$ 的支点，其中 a,b 是不同的复常数。

解：分析：可能的支点为 $z=a,b,0,\infty$.

常用方法：设 γ 是其内部包含 a 点而不包含 b 点的简单曲线，当 z 沿 γ 绕 a 一圈时，$z-a$ 的幅角增量为 2π .

常用技巧：设 $z-a=\rho e^{i\varphi}$，即 $z=a+\rho e^{i\varphi}$（$\rho<<1$，且 $0\le\varphi<2\pi$），则

$$\begin{aligned}w&=\ln(z-a)(z-b)=\ln(a+\rho e^{i\varphi}-a)(a+\rho e^{i\varphi}-b)\\&\approx\ln\rho e^{i\varphi}(a-b)=\ln\rho+i\varphi+\ln(a-b).\end{aligned}$$

当 z 沿 γ 绕 a 一圈后，即 φ 增加 2π 后，w 不还原，说明 a 点为 w 的支点（其实为超越支点---无穷阶支点）。同理，b 点也是 w 的超越支点。

对 $z=0$ 点，$z=\rho e^{i\varphi}$，$\rho<<1$，此时，

$w=\ln(z-a)(z-b)=\ln(\rho e^{i\varphi}-a)(\rho e^{i\varphi}-b)\approx\ln ab=\ln a+\ln b$，当 z 绕原点转一圈后，即 φ 增加 2π 后，w 值还原，说明 $z=0$ 点不是 w 的支点。

对于 ∞ 点，$z=\rho e^{i\varphi}$，$\rho>>1$，此时，

$w=\ln(z-a)(z-b)=\ln(\rho e^{i\varphi}-a)(\rho e^{i\varphi}-b)\approx\ln\rho^2e^{i2\varphi}=2\ln\rho+i2\varphi$，

当z绕∞点转一圈后，即φ增加2π后，w值不还原，说明∞点是w的支点，而且也是超越支点。

例 2．判断函数 $f(z)=\sqrt{\frac{(1-z)^3}{z}\cdot\frac{1}{z+1}}$ 的支点，求 $f_0(x)$，$f_0(-i)$？

解：可能的支点为$z=0,1,\infty$.（$1/(z+1)=e^{-i\varphi}/\rho, z=-1$是奇点但不是支点。）

1）$z=0$点邻域，$z=\rho e^{i\varphi}$，$\rho<<1$，

$$f(z)=\sqrt{\frac{\left(1-\rho e^{i\varphi}\right)^3}{\rho e^{i\varphi}}\cdot\frac{1}{\rho e^{i\varphi}+1}}\approx\frac{1}{\sqrt{\rho}}e^{-i\varphi/2}，一阶支点；$$

2）$z=1$点邻域，$z=1+\rho e^{i\varphi}$，$\rho<<1$，

$$f(z)=\sqrt{\frac{\left(1-1-\rho e^{i\phi}\right)^3}{1+\rho e^{i\phi}}\cdot\frac{1}{1+\rho e^{i\phi}+1}}\approx\frac{1}{2}\sqrt{\rho^3}e^{i3\phi/2+i3\pi/2}，一阶支点；$$

3）$z=\infty$点邻域，$z=\rho e^{i\varphi}$，$\rho>>1$，

$$f(z)=\sqrt{\frac{\left(1-\rho e^{i\varphi}\right)^3}{\rho e^{i\varphi}}\cdot\frac{1}{\rho e^{i\varphi}+1}}\approx e^{i3\pi/2}，不是支点；$$

因此，$z=0, z=1$是$f(z)$的两个支点。

从$0\to1$作割线，$f(z)$有两个单值分支。我们选定$f(z)$的一个单值分支$f_0(z)$如下：规定在割线的上岸 I：$\theta=\arg z=0$，$\varphi=\arg(1-z)=0\,[\varphi'=\arg(z-1)=\pi]$, 则在割线的上岸有 $z=|z|e^{i0}=xe^{i0}$，$1-z=|1-z|e^{i0}=(1-x)e^{i0}, x[0,1]$，因此，

$$f_0(x)=\sqrt{\frac{(1-x)^3}{x}\cdot\frac{1}{x+1}}\quad（上岸 I）.$$

当 I 上的点$z=x$绕过左端点（$z=0$）回到下岸 II 上具有相同坐标x点时，$\theta=\arg z=2\pi$，$\varphi=\arg(1-z)=0$，即在割线的下岸 II 上，有

$z=|z|e^{i2\pi}=xe^{i2\pi}$，$1-z=|1-z|e^{i0}=(1-x)e^{i0}$.

因此，$$f_0(x)=\sqrt{\frac{(1-x)^3}{xe^{i2\pi}}\cdot\frac{1}{x+1}}=-\sqrt{\frac{(1-x)^3}{x}\cdot\frac{1}{x+1}}\quad（下岸 II）.$$

练习：当然，我们也可以从 I 上的x点绕过割线的右端点$z=1$回到 II 上的x

点。这时，$\theta=\arg z=0$，$\varphi=\arg(1-z)=-2\pi$. 即有

$$z=|z|e^{i0}=xe^{i0}，\quad 1-z=|1-z|e^{-i2\pi}=(1-x)e^{-i2\pi}.$$

因此，$f_0(x)=\sqrt{\dfrac{\left[(1-x)e^{-i2\pi}\right]^3}{xe^{i0}}}\cdot\dfrac{1}{x+1}=-\sqrt{\dfrac{(1-x)^3}{x}}\cdot\dfrac{1}{x+1}$ （下岸 II）. 结果一样。

现在来求 $f_0(-i)$ 的值。在点 $z=-i$ 处，$\theta=\arg z=\dfrac{3\pi}{2}$，$\varphi=\arg(1-z)=\dfrac{\pi}{4}$（从上岸绕过点 $z=0$ 到 $z=-i$）. 因此，$z=1\cdot e^{i\frac{3\pi}{2}}$，$1-z=|1-z|e^{i\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

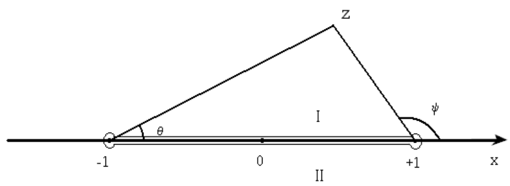
因此，$$f_0(-i)=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3}{1\cdot e^{i\frac{3\pi}{2}}}}\cdot\frac{1}{-i+1}=2^{\frac{3}{4}}e^{-i\frac{3\pi}{8}}\cdot\frac{1}{1-i}=2^{\frac{1}{4}}e^{-i\frac{\pi}{8}}.$$

[练习：如果从上岸绕过点 $z=1$ 到 $z=-i$，则有 $\theta=\arg z=-\dfrac{\pi}{2}$，$\varphi=\arg(1-z)=-\dfrac{7\pi}{4}$. 因此，$z=1\cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$，$1-z=|1-z|e^{-i\frac{7\pi}{4}}=\sqrt{2}e^{-i\frac{7\pi}{4}}$.

因此，$$f_0(-i)=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{7\pi}{4}}\right)^3}{1\cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}}}\cdot\frac{1}{-i+1}=2^{\frac{3}{4}}e^{-i\frac{3\pi}{8}}\cdot\frac{1}{1-i}=2^{\frac{1}{4}}e^{-i\frac{\pi}{8}}.]$$

例 3．判断函数 $f(z)=z+\sqrt{z^2-1}=z+\sqrt{(z+1)(z-1)}$ 的支点，并求 $f_0(z)=?$

解：可能的支点为 $z=0,-1,+1,\infty$.



1） $z=0$ 点邻域，$z=\rho e^{i\varphi}$，$\rho<<1$，

$$f(z)=\rho e^{i\varphi}+\sqrt{(\rho e^{i\varphi}+1)(\rho e^{i\varphi}-1)}\approx\rho e^{i\varphi}+e^{i\frac{\pi}{2}},$$

不是支点；

2） $z=-1$ 点邻域，$z=-1+\rho e^{i\varphi}$，$\rho<<1$，

$$f(z)=-1+\rho e^{i\varphi}+\sqrt{\left(-1+\rho e^{i\varphi}+1\right)\left(-1+\rho e^{i\varphi}-1\right)}$$
$$\approx-1+\rho e^{i\varphi}+\sqrt{2\rho e^{i\varphi/2+i\pi/2}},$$

一阶支点；

绕一圈，z_1的 $\Delta\psi=2\pi$；但z_2之$\Delta\psi=0$

3） $z=+1$ 点邻域，$z=1+\rho e^{i\varphi}$，$\rho<<1$，

$$f(z)=1+\rho e^{i\varphi}+\sqrt{\left(1+\rho e^{i\varphi}+1\right)\left(1+\rho e^{i\varphi}-1\right)} \qquad \text{一阶支点；}$$
$$\approx 1+\rho e^{i\varphi}+\sqrt{2\rho}e^{i\varphi/2},$$

4）　$z=\infty$ 点邻域，$z=\rho e^{i\varphi}$，$\rho>>1$，

$$f(z)=\rho e^{i\varphi}+\sqrt{\left(\rho e^{i\varphi}+1\right)\left(\rho e^{i\varphi}-1\right)}\approx \rho e^{i\varphi}+\rho e^{i\varphi}，\text{不是支点；}$$

因此，$z=-1, z=+1$ 是 $f(z)$ 的两个支点。从 $-1\to 1$ 作割线，$f(z)$ 有两个单值分支。我们选定 $f(z)$ 的一个单值分支 $f_0(z)$ 如下：

规定在割线的上岸 I：$\theta=\arg(z+1)=0$，$\varphi=\arg(z-1)=\pi$，则在割线的上岸有，$z+1=|z+1|e^{i0}=(x+1)e^{i0}$，$z-1=|z-1|e^{i\pi}=(1-x)e^{i\pi}$. 因此，

$$f_0(z)=x+\sqrt{(x+1)e^{i0}(1-x)e^{i\pi}}=x+\sqrt{1-x^2}e^{i\frac{\pi}{2}}=x+i\sqrt{1-x^2} \quad \text{（上岸 I）}.$$

当 I 上的点 $z=x$ 绕过左端点（$z=-1$）回到下岸 II 上具有相同坐标 x 点时，$\theta=\arg(z+1)=2\pi$（转 2π），$\varphi=\arg(z-1)=\pi$（不变），即在割线的下岸 II 上，有　$z+1=|z+1|e^{i2\pi}=(x+1)e^{i2\pi}$，$z-1=|z-1|e^{i\pi}=(1-x)e^{i\pi}$. 因此，

$$f_0(z)=x+\sqrt{(x+1)e^{i2\pi}(1-x)e^{i\pi}}=x+\sqrt{1-x^2}e^{i\frac{3\pi}{2}}=x-i\sqrt{1-x^2} \quad \text{（下岸 II）}.$$

练习：当然，我们也可以从 I 上的 x 点绕过割线的右端点 $z=1$ 回到 II 上的对应点，这时，$\theta=\arg z=0$，$\varphi=\arg(1-z)=-\pi$，即有，

$$z+1=|z+1|e^{i0}=(x+1)e^{i0}，\quad z-1=|z-1|e^{-i\pi}=(1-x)e^{-i\pi}. \text{ 因此，}$$

$$f_0(z)=x+\sqrt{(x+1)e^{i0}(1-x)e^{-i\pi}}=x+\sqrt{1-x^2}e^{-i\frac{\pi}{2}}=x-i\sqrt{1-x^2} \quad \text{（下岸 II）}.$$

再当然，绕过两个支点转一圈亦是允许的，这相当于绕无穷远点转一圈（此例中没有留下效果）。

$$1^n=1,(n=0,\pm1,\pm2,\cdots，\text{实数空间});$$

$$a^\alpha=\begin{cases}\pm\sqrt{|a|}e^{i\frac{1}{2}\arg a},(\alpha=1/2，+: n=\text{even}，-: n=\text{odd}); \\ |a|^\alpha\ e^{i(2\pi n+\arg a)\alpha},(\alpha=\text{任意实数}, n=0,\pm1,\pm2,\cdots，\text{复数空间}).\end{cases}$$

Home work: 1.1(2), (3) ; 1.4(6);1.5; 1.8(4).

链接：http://pan.baidu.com/s/1gf1AbSZ 密码：pcfx