16

格林函数初窥

电磁学中的静电势

在 $\vec{r}'$ 处的点电荷，在空间 $\vec{r}$ 的电势：$\varphi(\vec{r}) = \dfrac{q}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}$

电荷分布 $\rho(\vec{r}')$，在空间 $\vec{r}$ 的电势：$\varphi(\vec{r}) = \displaystyle\int \frac{\overbrace{\rho(\vec{r}')\,d\tau'}^{dq}}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}$

物理内涵：叠加原理　　　数学基础：线性问题

隐含的边界条件：$r\to 0$ 时，$\varphi(\vec{r}) = 0$

另一个角度看：

空间电势满足：$\begin{cases} \text{Poisson方程：} \nabla^2\varphi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r}') \\ \text{边界条件：} \quad r\to 0 \text{ 时，} \varphi(\vec{r}) = 0 \end{cases}$ —— 非齐次微分方程

微分方程的 非齐次项 来自：源（外部激发）

求解的问题是 线性问题，应满足 叠加原理：将所有 “源” 的贡献加起来

$$\varphi(\vec{r}) = \int G(\vec{r},\vec{r}')\,\rho(\vec{r}')\,d\tau'$$

对静电势问题：$G(\vec{r},\vec{r}') = \dfrac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}$，　$G(\vec{r},\vec{r}')$ 是一个点电荷的静电势。

一般情况下，问题：

一般非齐次微分方程的解，是否都可以写成：$\varphi(\vec{r}) = \displaystyle\int G(\vec{r},\vec{r}')\,\rho(\vec{r}')\,d\tau'$

其中：$\rho(\vec{r}')$ 为非齐次项。

If so, 紧接着的问题是：

1. 求 $G(\vec{r},\vec{r}')$ 是否比直接求解非齐次微分方程简单

2. 如何求：$G(\vec{r},\vec{r}')$， 或者：$G(\vec{r},\vec{r}')$ 应满足什么微分方程与边界条件？

3. $G(\vec{r},\vec{r}')$ 的物理意义？

在静电势问题上，$G(\vec{r},\vec{r}')$ 是一个点电荷的静电势，

对一般问题，$G(\vec{r},\vec{r}')$ 应该是单位 “源” 导致的响应，效果。

这些问题，导致了 Green 函数理论。

所以， Green 函数理论 是求解非齐次线性微分方程（偏微分方程）的一种方法。

带着这些问题，我们从最简单的一维情况出发来讨论。

16.1 一维情况　toy model

围绕以上三个问题，看最简单的常微分方程，写成Sturm-Liouville形式

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]-q(x)\,y=f(x)\quad \text{—— 注意非齐次项在物理上常来自 “源”}$$

我们已经讨论过，一般的二阶线性常微分方程，总可以化成这种形式。

写成算符形式：

$$\mathcal{L}=\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right]-q(x),\qquad \mathcal{L}\,y(x)=f(x)$$

假设函数定义于：$a\le x\le b$，别忘了还有边条：

$$\text{边界条件：}\begin{cases}\alpha_1\,y(a)+\alpha_2\,y'(a)=0\\ \beta_1\,y(b)+\beta_2\,y'(b)=0\end{cases}\tag{1.1}$$

记得我们是要把解写成以下形式：

$$y(x)=\int_a^b G(x,x')\,f(x')\,dx',\qquad G(x,x')\text{ 称为Green 函数}\tag{1.2}$$

以下我们要求 Green 函数，当让应该导出Green 函数应该满足的微分方程与边界条件。

显然，如果 Green 函数$G(x,x')$ 也满足如下边界条件，则由 (1.2) 给出的 $y(x)$ 必满足边界条件 (1.1)

$$\begin{cases}\alpha_1\,G(a,x')+\alpha_2\,G'(a,x')=0\\ \beta_1\,G(b,x')+\beta_2\,G'(b,x')=0\end{cases}\quad \text{注意此边条与 } x' \text{ 无关，只要 } a\le x'\le b\tag{1.3}$$

未得到 Green 函数 $G(x,x')$ 满足的微分方程，将算符 $\mathcal{L}$ 作用于 (1.2) 两边，记得 $y(x)$ 满足微分方程：$\mathcal{L}\,y(x)=f(x)$

$$\text{得：}\begin{cases}\text{左边 }=\mathcal{L}\,y(x)=f(x)\\ \text{右边 }=\mathcal{L}\int_a^b G(x,x')\,f(x')\,dx'=\int_a^b[\mathcal{L}\,G(x,x')]\,f(x')\,dx'\quad \text{记得 } \mathcal{L} \text{ 只作用于 } x\end{cases}$$

$$\text{左边 = 右边}\quad\Longrightarrow\quad f(x)\int_a^b[\mathcal{L}\,G(x,x')]\,f(x')\,dx'\quad\Longrightarrow\quad \mathcal{L}\,G(x,x')=\delta(x-x')$$

格林函数$G(x,x')$ 的微分方程与边界条件为：

$$\mathcal{L}\,G(x,x')=\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dG(x,x')}{dx}\right]-q(x)\,G(x,x')=\delta(x-x')$$

$$\begin{cases}\alpha_1\,G(a,x')+\alpha_2\,G'(a,x')=0\\ \beta_1\,G(b,x')+\beta_2\,G'(b,x')=0\end{cases}$$

与原非齐次微分方程问题相比：$\begin{cases}\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]-q(x)\,y=f(x)\\ \alpha_1\,y(a)+\alpha_2\,y'(a)=0\\ \beta_1\,y(b)+\beta_2\,y'(b)=0\end{cases}$　出别在非齐次项（蓝色部分）。

那么，格林函数$G(x,x')$ 的微分方程是否比原问题更容易求解?

首先，格林函数$G(x,x')$ 满足的微分方程在 $x\ne x'$ 时退化为齐次方程！应该比原方程容易求解。

其次，格林函数$G(x,x')$ 与非齐次项 $f(x)$ 无关，

物理上非齐次项表明外界的扰动，因而格林函数 $G(x,x')$ 应该反映系统本身的响应性质。

数学上，只要求出格林函数 $G(x,x')$，不同的非齐次项 $f(x)$，只需将它带入同一个积分即可。

$$y(x)=\int_a^b G(x,x')\,f(x')\,dx'$$

接下来，我们讨论如何求解格林函数$G(x,x')$ 满足的微分方程：$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dG(x,x')}{dx}\right]-q(x)\,G(x,x')=\delta(x-x')$

如前所述，格林函数$G(x,x')$ 的微分方程在 $x\ne x'$ 时退化为齐次方程，相对容易，为此我们假设

$$\left.\begin{array}{l}x<x'\text{ 时：}G(x,x')=G_1(x,x')\\ x>x'\text{ 时：}G(x,x')=G_2(x,x')\end{array}\right\}\quad\text{那么在 } x=x' \text{ 时如何连接？}$$

一个合理的假设是：$G(x,x')$ 在区间 $a\le x\le b$ 连续，即

$$\lim_{x\to x'}G_1(x,x')=\lim_{x\to x'}G_2(x,x')$$

接着，将格林函数 $G(x, x')$ 的微分方程对 x 从 $x'-\epsilon$ 到 $x'+\epsilon$ 积分

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dG(x, x')}{dx}\right] - q(x)\,G(x, x') = \delta(x - x') \qquad \text{两边对 } x \text{ 从 } x'-\epsilon \text{ 到 } x'+\epsilon \text{ 积分}$$

$$\left[p(x)\frac{dG(x, x')}{dx}\right]_{x'-\epsilon}^{x'+\epsilon} = 1 \qquad \text{利用了 } q(x)\text{，} G(x, x') \text{ 在 } x' \text{ 连续，} \quad \lim_{\epsilon\to 0}\int_{x'-\epsilon}^{x'+\epsilon} q(x)\,G(x, x')\,dx = 0$$

$$\lim_{x\to x'}\frac{dG_2(x, x')}{dx} - \lim_{x\to x'}\frac{dG_1(x, x')}{dx} = \frac{1}{p(x')}$$

小结：构造格林函数

1. 由齐次方程：$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dG(x, x')}{dx}\right] - q(x)\,G(x, x') = 0$ 构造：$\begin{cases} x < x'\text{：} & G(x, x') = G_1(x, x') \\ x > x'\text{：} & G(x, x') = G_2(x, x') \end{cases}$

2. 由边界条件：$\begin{cases} \alpha_1\,G(a, x') + \alpha_2\,G'(a, x') = 0 \\ \beta_1\,G(b, x') + \beta_2\,G'(b, x') = 0 \end{cases}$ 及 $\begin{cases} \lim\limits_{x\to x'} G_1(x, x') = \lim\limits_{x\to x'} G_2(x, x') \\ \lim\limits_{x\to x'}\dfrac{dG_2(x, x')}{dx} - \lim\limits_{x\to x'}\dfrac{dG_1(x, x')}{dx} = \dfrac{1}{p(x')} \end{cases}$ 确定4个待定常数

例：构造以下非齐次微分方程和边界条件的格林函数

$$\begin{cases} y'' - k^2\,y = f(x), & 0 \le x \le L \\ y(0) = y(L) = 0, \end{cases}$$

解：格林函数满足的方程 ：$\dfrac{d^2\,G(x, x')}{dx^2} - k^2\,G(x, x') = \delta(x - x')$

$x \ne x'$ 时，退化为齐次方程 ：$\begin{cases} x < x'\text{：} & G_1(x, x') = A_1\,e^{-kx} + A_2\,e^{kx} \\ x > x'\text{：} & G_2(x, x') = B_1\,e^{-kx} + B_2\,e^{kx} \end{cases}$

由边界条件：$G_1(0, x') = G_2(L, x') = 0 \quad \Longrightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 = 0 \\ B_1\,e^{-kL} + B_2\,e^{kL} = 0 \end{cases}$

$$\Longrightarrow \quad G(x, x') = \begin{cases} G_1(x, x') = A\,e^{-kx} - A\,e^{kx} & 0 < x < x' \\ G_2(x, x') = B\,e^{-kx} - B\,e^{kx-2kL} & x' < x < L \end{cases}$$

利用：$\begin{cases} \lim\limits_{x\to x'} G_1(x, x') = \lim\limits_{x\to x'} G_2(x, x') \\ \lim\limits_{x\to x'}\dfrac{dG_2(x, x')}{dx} - \lim\limits_{x\to x'}\dfrac{dG_1(x, x')}{dx} = \dfrac{1}{p(x')} = 1 \end{cases}$ 解得

$$G(x, x') = \begin{cases} G_1(x, x') = -\dfrac{\sinh(kx)\sinh(kL - kx')}{k\,\sinh(kL)} & 0 < x < x' \\ G_2(x, x') = -\dfrac{\sinh(kx')\sinh(kL - kx)}{k\,\sinh(kL)} & x' < x < L \end{cases}$$

- 格林函数可改写成如下形式

  $G(x, x') = \begin{cases} u(x)\,v(x') & 0 < x < x' \\ u(x')\,v(x) & x' < x < L \end{cases}$ 分离变量？

  这其实反映了互易性质 (reciprocity)：$G(x, x') = G(x', x)$

  从物理上理解 ：

  $G(x, x')$ 其实是在空间 x' 处的点源， 在空间另一点 x 的效应

  $G(x', x)$ 其实是在空间 x 处的点源， 在空间另一点 x' 的效应

  对一般体系， 两者当然满足互易性质 。

- 格林函数仅依赖于微分方程与边条，与非齐次项（外源）无关
- 一旦求得格林函数，非齐次微分方程的解表为：

$$y(x) = \int_0^L G(x, x')\,f(x')\,dx'$$

```
g1 = A e^(-k x) - A e^(k x);
g2 = B e^(-k x) - B e^(k x-2 k L);
eq1 = (g1 /. x → t) - (g2 /. x → t);
eq2 = (D[g2, x] /. x → t) - (D[g1, x] /. x → t) - 1;
sol = Solve[{eq1 == 0, eq2 == 0}, {A, B}];
sol = Simplify[%[[1]]];
g1s = Simplify[g1 /. sol];
g2s = Simplify[g2 /. sol];
g1s = Simplify[ExpToTrig[g1s]];
g2s = Simplify[ExpToTrig[g2s]];
g1s // TraditionalForm
g2s // TraditionalForm

DSolve[y''[x] - k^2 y[x] == DiracDelta[x - t], y, x];
G = Simplify[y[x] /. %[[1]]];
G1 = Simplify[G, x < t];
G2 = Simplify[G, x > t];
eq1 = (G1 /. x → 0);
eq2 = (G2 /. x → L);
sol = Solve[{eq1 == 0, eq2 == 0}, {C[1], C[2]}];
sol = Simplify[%[[1]]];
G = Simplify[G /. sol];
G1s = Simplify[G1 /. sol];
G2s = Simplify[G2 /. sol];
G1s = Simplify[ExpToTrig[G1s]];
G2s = Simplify[ExpToTrig[G2s]];
Simplify[g1s - G1s]
Simplify[g2s - G2s]
```

$$-\frac{\operatorname{csch}(k L) \sinh(k x) \sinh(k (L-t))}{k}$$

$$-\frac{\operatorname{csch}(k L) \sinh(k t) \sinh(k (L-x))}{k}$$

0

0

```
Clear[f]
f[x_] := x;
DSolve[y''[x] - k^2 y[x] == f[x], y, x];
ys = Simplify[y[x] /. %[[1]]];
eq1 = ys /. x → 0;
eq2 = ys /. x → L;
sol = Solve[{eq1 == 0, eq2 == 0}, {C[1], C[2]}];
ys = Simplify[ys /. sol[[1]]]
yt = Integrate[ G f[t], {t, 0, L}];
Simplify[ys - yt, {0 < x < L}]
```

$$\frac{-e^{k\,(L-x)}\,L + e^{k\,(L+x)}\,L + x - e^{2\,k\,L}\,x}{\left(-1 + e^{2\,k\,L}\right)\,k^2}$$

```
0
```

16.2 偏微分方程的格林函数

现在，再进一步，来看偏微分方程。多变量

$$\mathcal{L}\,u(\vec{r}) = -4\,\pi\,\rho(\vec{r})$$

这里 $\mathcal{L}$ 是微分算符，暂时认为 $\vec{r}$ 代表偏微分方程的 3 个空间变量。

假设函数定义于区域 D，边界为 B。满足一定的边界条件。

例如：

$\mathcal{L} = \nabla^2 + k^2$　　Helmholtz 算符

$\mathcal{L} = \nabla^2$　　Laplace算符

现在，我们假设这些算符的格林函数 $G(\vec{r}, \vec{r}\,')$ 为：

$$\mathcal{L}'\,G(\vec{r}, \vec{r}\,') = -4\,\pi\,\delta\left(\vec{r} - \vec{r}\,'\right)$$

故，对应到微分方程与格林函数满足的微分方程改写为

$$\begin{cases} \mathcal{L}'\,u(\vec{r}\,') = -4\,\pi\,\rho(\vec{r}\,') & (1) \\ \mathcal{L}'\,G(\vec{r}, \vec{r}\,') = -4\,\pi\,\delta\left(\vec{r} - \vec{r}\,'\right) & (2) \end{cases}$$

这里认为算符 $\mathcal{L}'$ 所用于空间变量 $\vec{r}\,'$。$4\,\pi$ 因子仅为讨论方便。

$G(\vec{r}, \vec{r}\,') \times (1) - u(\vec{r}\,') \times (2)$ 并对 $\vec{r}$ 积分，得：

$$\int_D \left[G(\vec{r}, \vec{r}\,')\,\mathcal{L}'\,u(\vec{r}\,') - u(\vec{r}\,')\,\mathcal{L}'\,G(\vec{r}, \vec{r}\,')\right] d^3\vec{r}\,' = -4\,\pi \int_D G(\vec{r}, \vec{r}\,')\,\rho(\vec{r}\,')\,d^3\vec{r}\,' + 4\,\pi \int_D \delta\left(\vec{r} - \vec{r}\,'\right) u(\vec{r})\,d^3\vec{r}\,'$$

$$\Longrightarrow\quad u(\vec{r}) = \int_D G(\vec{r}, \vec{r}\,')\,\rho(\vec{r}\,')\,d^3\vec{r}\,' + \frac{1}{4\,\pi} \int_D \left[G(\vec{r}, \vec{r}\,')\,\mathcal{L}'\,u(\vec{r}\,') - u(\vec{r}\,')\,\mathcal{L}'\,G(\vec{r}, \vec{r}\,')\right] d^3\vec{r}\,'$$

假设算符具有 Sturm-Liouville 形式：

$$\mathcal{L} = \nabla \cdot \left[p(\vec{r})\,\nabla\right] - q(\vec{r}) \quad \text{或} \quad \mathcal{L}' = \nabla' \cdot \left[p(\vec{r}\,')\,\nabla'\right] - q(\vec{r}\,')$$

$$u(\vec{r}) = \int_D G(\vec{r}, \vec{r}\,')\,\rho(\vec{r}\,')\,d^3\vec{r}\,' + \frac{1}{4\,\pi} \int_D \left[G(\vec{r}, \vec{r}\,')\,\mathcal{L}'\,u(\vec{r}\,') - u(\vec{r}\,')\,\mathcal{L}'\,G(\vec{r}, \vec{r}\,')\right] d^3\vec{r}\,'$$

$$= \int_D G\,\rho\,d^3\vec{r}\,' + \frac{1}{4\,\pi} \int_D \left[G\,\nabla' \cdot (p\,\nabla' u) - u\,\nabla' \cdot (p\,\nabla' G)\right] d^3\vec{r}\,'$$

$$= \int_D G\rho\, d^3\vec{r}\,' + \frac{1}{4\pi}\int_D \nabla'\cdot[G\,p\,\nabla' u - u\,p\,\nabla' G]\, d^3\vec{r}\,'$$

$$u(\vec{r}) = \int_D G\rho\, d^3\vec{r}\,' + \frac{1}{4\pi}\int_B \vec{n}\cdot[p\,G\,\nabla' u - p\,u\,\nabla' G]\, d\sigma'$$

上式表明只要按：$\mathcal{L}'\, G(\vec{r}, \vec{r}\,') = -4\pi\,\delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$ 求出格林函数，

则原非齐次微分方程：$\mathcal{L}\, u(\vec{r}) = -4\pi\,\rho(\vec{r})$ 的解$u(\vec{r})$可由格林函数及边界条件确定。

但同时，上式似乎表明，要求得非齐次微分方程：$\mathcal{L}\, u(\vec{r}) = -4\pi\,\rho(\vec{r})$ 的解 $u(\vec{r})$，

不仅需要非齐次项 $\rho(\vec{r})$，还需要 $u(\vec{r})$ 在边界上的值并且其边界上的法向导数 $\vec{n}\cdot\nabla' u$

这似乎有点超定了，因为对这类椭圆形偏微分方程，我们知道定解条件是

Dirichlet 或 Neumann 条件，二选一即可

这个佯谬实际上来自我们并没有给格林函数指定边界条件。格林函数还未完全确定。

$$u(\vec{r}) = \int_D G\rho\, d^3\vec{r}\,' + \frac{1}{4\pi}\int_B \vec{n}\cdot[p\,G\,\nabla' u - p\,u\,\nabla' G]\, d\sigma'$$

实际上，如果定解问题中 $u(\vec{r})$ 给定边界上的值（Dirichlet 条件），

我们可以令 $G(\vec{r}, \vec{r}\,')$ 边界上的值为 0 来确定格林函数；

如果定解问题中 $u(\vec{r})$ 给定边界上法向导数（Neumann 条件），

我们可以令 $G(\vec{r}, \vec{r}\,')$ 边界上法向导数为 0来确定格林函数。

例如，$u(\vec{r})$ 在边界上的值给定时，我们令格林函数在边界上为 0，即：

$u(\vec{r})\big|_B$ 已知，令 $G\big|_B = 0$ 确定格林函数 G，从而

$$u(\vec{r}) = \int_D G\rho\, d^3\vec{r}\,' - \frac{1}{4\pi}\int_B p\,u\,\vec{n}\cdot[\nabla' G]\, d\sigma'$$

边界积分仅需要：$u(\vec{r})\big|_B$（给定）与 $\vec{n}\cdot[\nabla' G] = \dfrac{\partial G}{\partial n}$，后者由格林函数确定

16.3 一些二阶偏微分方程的格林函数

以下通过一些例子，介绍一些二阶偏微分方程的格林函数。

例 1. Poisson方程的格林函数

解：格林函数方程，∇' 作用于 $\vec{r}\,'$，函数定义于整个空间（自由空间）

$$\nabla'^2 G(\vec{r}, \vec{r}\,') = -4\pi\,\delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$$

δ 函数对点 $\vec{r}$ 是旋转对称的，故，$G(\vec{r}, \vec{r}\,')$ 对点 $\vec{r}$ 是旋转对称，

从而：$G(\vec{r}, \vec{r}\,') = G(|\vec{r} - \vec{r}\,'|)$

为此，不失一般性，可假设 $\vec{r}\,' - \vec{r} = \vec{R}$，$\nabla'^2 = \nabla_R^2$

格林函数的方程变为：$\nabla_R^2\, G(R) = -4\pi\,\delta(\vec{R})$

而：$\nabla_R^2 = \dfrac{1}{R^2}\dfrac{\partial}{\partial R}\left(R^2\dfrac{\partial}{\partial R}\right) - \dfrac{\hat{\boldsymbol{L}}^2}{R^2}$，$\hat{\boldsymbol{L}}$ 为轨道角动量算符，仅作用于角度

$$\nabla_R^2\, G(R) = -4\pi\,\delta(R) \implies \frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left(R^2\frac{dG(R)}{dR}\right) = -4\pi\,\delta(\vec{R})$$

对空间积分：$R^2\dfrac{dG(R)}{dR} = -1$，其中利用了：$\int \delta(\vec{R})\, d^3\vec{R} = 1$

再做积分：$R^2\dfrac{dG(R)}{dR} = -1 \implies G(R) = \dfrac{1}{R} \implies G(\vec{r}, \vec{r}\,') = \dfrac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$

$G(\vec{r}, \vec{r}')$ 实际上就是在 $\vec{r}'$ 处的单位正电荷在 $\vec{r}$ 处的静电势

Poisson方程：$\nabla'^2 u(\vec{r}') = -4\pi\rho(\vec{r}')$ 的解：

$$u(\vec{r}) = \int G(\vec{r}, \vec{r}')\rho(\vec{r}')\, d^3\vec{r}' = \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, d^3\vec{r}' \quad \text{—— 熟知的结果}$$

例 2. Helmholtz方程的格林函数

解：格林函数方程，∇' 作用于 $\vec{r}'$，函数定义于整个空间 （自由空间）

$$\left(\nabla'^2 + k^2\right) G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi\,\delta\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)$$

δ 函数对点 $\vec{r}$ 是旋转对称的，故，$G(\vec{r}, \vec{r}')$ 对点 $\vec{r}$ 是旋转对称，

从而：$G(\vec{r}, \vec{r}') = G(|\vec{r}-\vec{r}'|)$

为此，不失一般性，可假设 $\vec{r}' - \vec{r} = \vec{R}$，$\nabla'^2 = \nabla_R^2$

格林函数的方程变为：$\left(\nabla_R^2 + k^2\right) G(R) = -4\pi\,\delta(\vec{R})$

而：$\nabla_R^2 = \dfrac{1}{R^2}\dfrac{\partial}{\partial R}\left(R^2\dfrac{\partial}{\partial R}\right) - \dfrac{\hat{L}^2}{R^2}$，　$\hat{L}$ 为轨道角动量算符，仅作用于角度

$$\left(\nabla_R^2 + k^2\right) G(R) = -4\pi\,\delta(R) \implies \frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left(R^2\frac{dG(R)}{dR}\right) + k^2 G(R) = -4\pi\,\delta(\vec{R})$$

$$\implies \frac{1}{R}\frac{d^2}{dR^2}[R\,G(R)] + k^2 G(R) = -4\pi\,\delta(\vec{R})$$

$R \neq 0$ 时，微分方程变为齐次方程：

$$\frac{d^2}{dR^2}[R\,G(R)] + k^2 R\,G(R) = 0 \implies R\,G(R) = A_+ e^{ikR} + A_- e^{-ikR}$$

$$G(R) = A_+\frac{e^{ikR}}{R} + A_-\frac{e^{-ikR}}{R} \xrightarrow[\text{向外辐射的球面波}]{\text{Sommerfeld 辐射条件}} G(R) = A_+\frac{e^{ikR}}{R}$$

方程：$\dfrac{1}{R^2}\dfrac{d}{dR}\left(R^2\dfrac{dG(R)}{dR}\right) + k^2 G(R) = -4\pi\,\delta(\vec{R})$

两边积分：$\lim\limits_{R\to 0} R^2\dfrac{dG(R)}{dR} = -1 \implies A_+ = 1$

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

例 3. 波动方程的格林函数

解：格林函数方程，∇' 作用于 $\vec{r}'$，函数定义于整个空间 （自由空间）

$$\nabla'^2 G(\vec{r}, \vec{r}', t-t') - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} G(\vec{r}, \vec{r}', t-t') = -4\pi\,\delta\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)\delta(t-t')$$

δ 函数对点 $\vec{r}$ 是旋转对称的，故，$G(\vec{r}, \vec{r}')$ 对点 $\vec{r}$ 是旋转对称，

从而：$G(\vec{r}, \vec{r}', t-t') = G(|\vec{r}-\vec{r}'|, t-t')$

为此，不失一般性，可假设 $\vec{r}' - \vec{r} = \vec{R}$，$\nabla'^2 = \nabla_R^2$

同时，这里以假设线性系统满足时间平移不变性 （解与时间原点无关）

微分方程先对 $t-t'$ 做Fourier变换：

$$\tilde{G}(\vec{r}, \vec{r}', \omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\vec{r}, \vec{r}', t)\, e^{i\omega t}\, dt$$

格林函数的方程变为：$\left(\nabla_R^2+k^2\right)G(R)=-2\,\delta(\vec{R})$

而：$\nabla_R^2=\dfrac{1}{R^2}\dfrac{\partial}{\partial R}\left(R^2\dfrac{\partial}{\partial R}\right)-\dfrac{\hat{\boldsymbol{L}}^2}{R^2}$，　$\hat{\boldsymbol{L}}$ 为轨道角动量算符，仅作用于角度

用上一例结果：$\tilde{G}\left(\vec{r},\vec{r}',\omega\right)=\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{e^{ik\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}$

$k=\dfrac{\omega}{c}$，　$\dfrac{1}{2\pi}$ 因子来自方程的改变

做反Fourier变换：

$$G\left(\vec{r},\vec{r}',\tau\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{G}\left(\vec{r},\vec{r}',\omega\right)e^{-i\omega\tau}d\omega$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\frac{e^{ik\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}e^{-i\omega\tau}d\omega$$

$$=\frac{\delta\left(\tau-\frac{R}{c}\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}$$　　其中 $R=|\vec{R}|=\left|\vec{r}'-\vec{r}\right|$

故：

$$G\left(\vec{r},\vec{r}',t-t'\right)=\frac{\delta\left(t-t'-\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|/c\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}$$

物理意义：

- ▲ t 时刻 $\vec{r}$ 处的效应，源自 $\vec{r}'$ 处在早一点的时刻 $t'=t-\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|/c$ 的扰动

  —— 波是以速度 c 传播的

- ▲ 格林函数的意义：在 $\vec{r}'$ 处 t' 时刻的一个尖脉冲，在 $\vec{r}$ 处 t 时刻的响应

  —— δ 函数表示转瞬即逝

- ▲ 转瞬即逝是在三维情况，思考：对二维情况如何？

■ 以上三例，不管是对 Poisson方程、Helmholtz方程，还是对波动方程，均为自由空间格林函数，

隐含着边界条件：$\lim_{r\to\infty}G=0$ 甚至Sommerfled 辐射边条，这样才能确定出格林函数。

对有限区域给定边条问题，格林函数的求解会困难得多。可能要用到不同的方法，

如：镜像法、模式展开法等。