6

二阶线性常微分方程的级数解法

复变函数在解析点邻域或孤立奇点的无心邻域可以展开成 Taylor 或 Laurent 级数，这种级数展开技巧不仅可以用于计算积分，还可用于求解二阶线性常微分方程。

许多物理规律都用微分方程描述，其中最常见的是二阶线性常微分方程，它的一般形式是

$$\frac{d^2 w}{d z^2} + p(z) \frac{d w}{d z} + q(z) w = f(z) \tag{1.1}$$

如果 $f(z) = 0$，则上式称为二阶线性齐次常微分方程。注意常微分方程的“常”是相对于偏微分方程的“偏”而言，指的是自单变量，并非指常系数。

在不同的物理问题中，常遇到的二阶线性常微分方程有：（这里的 x 可看为复变量）

Legendre 方程： $$\left(1 - x^2\right) y'' - 2 x y' + l(l + 1) y = 0 \tag{1.2}$$

Bessel 方程： $$x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - n^2\right) y = 0 \tag{1.3}$$

Laguerre 方程： $$x y'' + (1 - x) y' + a y = 0 \tag{1.4}$$

Hermite 方程： $$y'' - 2 x y' + 2 \alpha y = 0 \tag{1.5}$$

Chebyshev 方程： $$\left(1 - x^2\right) y'' - x y' + n^2 y = 0 \tag{1.6}$$

Hypergeometric 方程： $$x (x - 1) y'' + [(1 + a + b) x - c] y' + a b y = 0 \tag{1.7}$$

Confluent hypergeometric 方程： $$x y'' + (c - x) y' - a y = 0 \tag{1.8}$$

这些方程都是二阶线性常微分方程，因此数学上，每一个方程都有两个线性无关的解，本章要讨论如何求出这两个解。

我们将看到，这些方程的解各对应于一类特殊函数，而这些特殊函数在一般情况下，大都无法表示为简单的初等函数。因此，无法通过传统的求积分方法求解。

但我们知道这些方程在某些区域必有解析解，因此就把解析解在此邻域展开成级数，于是，这些特殊函数解常用级数表示。

我们将以Legendre 方程和 Bessel 方程方程为例，学习二阶线性常微分方程级数解法，

就是求解无穷级数种各项系数之间的关系，从而确定级数。这种解法也称 Frobenius 解法。

6.1 二阶线性常微分方程的常点与奇点

二阶线性齐次常微分方程的一般形式是

$$\frac{d^2 w}{d z^2} + p(z) \frac{d w}{d z} + q(z) w = 0 \tag{1.9}$$

其中 $p(z)$ 和 $q(z)$ 称为方程的系数。显然，方程的性质由其系数确定。特别是，方程解的形式与解的解析性也由系数的解析性确定。

通常，人们并不需要在整个复平面内求解方程，更感兴趣的是求解某点 z_0 邻域的解（邻域可大可小），

因此，若要在某点 z_0 的邻域求解微分方程，系数函数 $p(z)$ 和 $q(z)$ 在 z_0 的性质就显得特别重要，为此，做以下定义。

- 常点：如果在 z_0 点， $p(z)$ 和 $q(z)$ 都解析，则 z_0 称为方程的常点
- 奇点：如果在 z_0 点， $p(z)$ 或 $q(z)$ 不解析，则 z_0 称为方程的奇点
  - 正则奇点：在 z_0 点， $p(z)$ 或 $q(z)$ 不解析，但 $(z-z_0)\,p(z)$ 和 $(z-z_0)^2\,q(z)$ 都解析。
  - 非正则奇点：在 z_0 点，连 $(z-z_0)\,p(z)$ 或 $(z-z_0)^2\,q(z)$ 也不解析。
- 无穷远点的判断：方程做自变量变换 $z=1/\zeta$，则方程 (1.9) 化为

$$\frac{d^2 w}{d\zeta^2}+\left[\frac{2}{\zeta}-\frac{1}{\zeta^2}p\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]\frac{dw}{d\zeta}+\frac{1}{\zeta^4}q\left(\frac{1}{\zeta}\right)w=0 \tag{1.10}$$

```
Clear["Global`*"]
w0 = w[1 / ξ] /. ξ → z;
w1  = D[w[1 / ξ], ξ] /. ξ → z;
w2  = D[w[1 / ξ], {ξ, 2}] /. ξ → z;
eq = (w2 + p[z] w1 + q[z] w0) /. z → 1 / ξ;
c = Coefficient[eq, w''[ξ]];
Expand[eq / c]   (* 将 w''[ξ] 的系数化为1 *)
```

$$\frac{q\left[\frac{1}{\xi}\right] w[\xi]}{\xi^4}+\frac{2\,w'[\xi]}{\xi}-\frac{p\left[\frac{1}{\xi}\right] w'[\xi]}{\xi^2}+w''[\xi]$$

(1.10) 可写成

$$\frac{d^2 w}{d\zeta^2}+P(\zeta)\frac{dw}{d\zeta}+Q(\zeta)\,w=0,\quad P(\zeta)=\frac{2}{\zeta}-\frac{1}{\zeta^2}p\left(\frac{1}{\zeta}\right),\quad Q(\zeta)=\frac{1}{\zeta^4}q\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

显然，当且仅当 $p\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ 和 $q\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ 具有以下形式时， $P(\zeta)$ 与 $Q(\zeta)$ 才解析，

$$p\left(\frac{1}{\zeta}\right)=2\,\zeta+a_2\,\zeta^2+a_3\,\zeta^3+\cdots,\quad q\left(\frac{1}{\zeta}\right)=b_4\,\zeta^4+b_5\,\zeta^5+\cdots, \tag{1.11}$$

因为这时对应于： $P(\zeta)=-a_2-a_3\,\zeta+\cdots,\quad Q(\zeta)=b_4+b_5\,\zeta+\cdots$ 在 $\zeta=0$ 均解析，

从而 $\zeta=0$ 是 (1.10) 的常点，对应地，$z=\infty$ 是 (1.9) 的常点。

若 $p\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ 和 $q\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ 不具有 (1.11) 形式，$\zeta=0$ $(z=\infty)$ 就是微分方程的奇点 。

若 $p\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ 和 $q\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ 具有以下形式，则 $\zeta=0$ 是 (1.10) 的正则奇点，对应地，$z=\infty$ 是 (1.9) 的正则奇点 。

$$p\left(\frac{1}{\zeta}\right)=a_1\,\zeta+a_2\,\zeta^2+a_3\,\zeta^3+\cdots,\quad q\left(\frac{1}{\zeta}\right)=b_2\,\zeta^2+b_3\,\zeta^3+\cdots, \tag{1.12}$$

因为这时对应于： $P(\zeta)=\frac{2-a_1}{\zeta}-a_2-a_3\,\zeta+\cdots,\quad Q(\zeta)=\frac{b_2}{\zeta^2}+\frac{b_3}{\zeta}+\cdots$ 在 $\zeta=0$，$\zeta\,P(\zeta)$ 和 $\zeta^2\,Q(\zeta)$ 均解析。

例：(1.7) 式的超几何方程： $x\,(x-1)\,y''+[(1+a+b)\,x-c]\,y'+a\,b\,y=0$

系数为：$p(x)=\frac{(1+a+b)\,x-c}{x(x-1)},\ q(x)=\frac{a\,b}{x(x-1)}$， 故： $z=0,\ 1,\ \infty$ 是方程的三个正则奇点 。

例：(1.8) 式的合流超几何方程： $x\,y''+(c-x)\,y'-a\,y=0$

系数为：$p(x)=\frac{c-x}{x},\ q(x)=-\frac{a}{x}$， 故： $z=0$ 是方程的正则奇点，$z=\infty$ 则是非正则奇点 。

以下 Mathematica 代码的运算结果与 (1.11) 和 (1.12) 式比较表明：

$z=\infty$ 是超几何方程的正则奇点 （当 $a\,b \neq 0$ 时），是合流超几何方程的非正则奇点 。

```
Clear["Global`*"]
p1 = ((1 + a + b) x - c)/(x (x - 1)) /. x → 1 / y;
q1 = (a b)/(x (x - 1)) /. x → 1 / y;
p2 = (c - x)/x /. x → 1 / y;
q2 = a/x /. x → 1 / y;
Series[p1, {y, 0, 4}]
Series[q1, {y, 0, 4}]
Series[p2, {y, 0, 4}]
Series[q2, {y, 0, 4}]
```

```
(1 + a + b) y + (1 + a + b - c) y^2 + (1 + a + b - c) y^3 + (1 + a + b - c) y^4 + O[y]^5
```

```
a b y^2 + a b y^3 + a b y^4 + O[y]^5
```

```
-1 + c y + O[y]^5
```

```
a y + O[y]^5
```

6.2 二阶线性齐次常微分方程的级数解

Frobenius and Fuchs 定理:

对二阶线性常微分方程 ： $\dfrac{d^2 w}{d z^2}+p(z)\dfrac{d w}{d z}+q(z)\,w=0$

1. 如果 z_0 是微分方程的常点 ， 则在 z_0 的邻域 $|z-z_0|<R$，即：$p(z)$ 和 $q(z)$ 的解析区域，

该微分方程必存在 两个 如下形式的 线性独立解 ：

$$w(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k, \quad \text{其中：} \quad c_0 \neq 0$$

2. 如果 z_0 是微分方程的正则奇点 ， 则在 z_0 的邻域 $|z-z_0|<R$，即：$(z-z_0)\,p(z)$ 和 $(z-z_0)^2\,q(z)$ 的解析区域，

该微分方程至少存在 一个 如下形式的解 ：

$$w(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^{k+\rho}, \quad \text{其中：} \ c_0 \neq 0, \ \rho \text{ 是常数， 称为指标 。}$$

对非正则奇点 ， 求解困难得多 ， 幸亏， 物理上常见的微分方程 (1.2) − (1.8) 的非正则奇点都在 $z=\infty$ 。

正则奇点邻域求解的指标方程

对微分方程的常点，可将级数解代入原微分方程，求出系数之间的递推关系即可。下一节将以 Legendre 方程为例说明。
而对微分方程的正则奇点，必须先求出指标 ρ 。
做法同样是将级数解形式代入原微分方程，但必须先利用 z 的最低幂次的系数为零，

得到一个关于指标的一元二次方程（称为指标方程），先求出指标 ρ。

最简单的情况，该一元二次指标方程将给出的两个指标对应的两个解线性无关，

这两个线性无关解的线性组合即构成常微分方程的通解。

但如果不幸遇到：一元二次方程重根或两根之差为整数，情况将复杂化。以下详细讨论。

为简单起见，讨论正则奇点出现于 $x=0$，这里将x 看成复变量。

若 $x=0$ 为正则奇点，微分方程必可改写成如下形式

（思考一下为什么？　　　　　　　　　　　　）：

$$x^2 y'' + x\,g(x)\,y' + h(x)\,y = 0,\quad \text{其中：} g(x) \text{ 和 } h(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 点解析} \tag{1.13}$$

据 Frobenius & Fuchs 定理，该微分方程必定存在一个如下形式的解：

$$y = x^\rho \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,x^k,\quad \text{其中 } a_0 \neq 0 \quad \text{（若为常点，则对应于 } \rho = 0\text{）}$$

对级数形式的 $y(x)$ 求导，

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+\rho)\,a_k\,x^{k+\rho-1},\qquad y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+\rho)\,(k+\rho-1)\,a_k\,x^{k+\rho-2}, \tag{1.14}$$

再将 $g(x)$ 和 $h(x)$ 作 Taylor 展开，

$$g(x) = g_0 + g_1\,x + g_2\,x^2 + \ldots,\qquad h(x) = h_0 + h_1\,x + h_2\,x^2 + \ldots$$

代入微分方程 (1.13) 式，将得到以下形如 $\sum_k c_k\,x^k = 0$ 的幂级数形式，

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+\rho)\,(k+\rho-1) + (k+\rho)\left(g_0 + g_1\,x + g_2\,x^2 + \ldots\right) + \left(h_0 + h_1\,x + h_2\,x^2 + \ldots\right)\right] a_k\,x^{k+\rho} = 0$$

因为是解析函数的展开，由唯一性定理，各幂次的系数 $c_k = 0$。

看最低幂次 x^ρ 项的系数（对应于上式的　$k=0$ 项）：$[\rho(\rho-1) + \rho\,g_0 + h_0]\,a_0 = 0$

由 Frobenius & Fuchs 定理，形式解的系数　$a_0 \neq 0$，故可得到一个关于指标的一元二次方程：

$$\rho(\rho-1) + g_0\,\rho + h_0 = 0 \quad\Longrightarrow\quad \rho^2 + (g_0-1)\,\rho + h_0 = 0 \quad \text{称为指标方程} \tag{1.15}$$

指标方程是一元二次方程，显然有两个根，以下分三种不同情况讨论。

- 指标方程有两个不同的根 $\rho_2 \neq \rho_1$，且两根之差不是整数：$\rho_2 - \rho_1 \neq n$

  由 Frobenius & Fuchs 定理，微分方程的两个解可写成 ：

  $$y_1(x) = x^{\rho_1}\left(a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \ldots\right),\qquad y_2(x) = x^{\rho_2}\left(a_0' + a_1'\,x + a_2'\,x^2 + \ldots\right),$$

  因为 $\rho_2 - \rho_1$ 是非整数，故 $y_2(x)/y_1(x)$ 不可能等于常数，$y_2(x)$ 和 $y_1(x)$ 线性无关，其线性组合构成微分方程的通解 。

  故指标方程 两根之差为非整数 时，微分方程的 两个线性无关解 写成：

  $$y_1(x) = x^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty}a_k\,x^k,\ a_0 \neq 0,\qquad y_2(x) = x^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty}a_k'\,x^k,\quad a_0' \neq 0 \tag{1.16}$$

  其中系数 a_k 与 a_k'，可将 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 代入原微分方程来确定　（见下一节）。

- 指标方程有重根：这时必有：$\rho_2 = \rho_1 = (1-g_0)/2$

  由 Frobenius & Fuchs 定理，微分方程必定有一个解可写成 ：

  $$y_1(x) = x^{\rho_1}\left(a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \ldots\right),\quad a_0 \neq 0 \tag{1.17}$$

  其中系数 a_k 可将 $y_1(x)$ 代入微分方程来确定 。

  由 $y_1(x)$ 的形式，可导得：$\dfrac{y_1'}{y_1} = \dfrac{\rho_1}{x} + q_1(x)$,　（作为练习，不妨试试推导 ）

  这里以 $q_k(x)$ 表示仅含 x 的 0 次或正幂次的函数　（$x=0$ 邻域的解析函数 ）。

由于 $\dfrac{y_1'}{y_1}=\dfrac{\rho_1}{x}+q_1(x)$，故 $x=0$ 是 $\dfrac{y_1'}{y_1}$ 的单极点，且留数为 ρ_1。

现在，如何找另一个线性无关解 ？

设另一个线性无关解为 ：$y_2(x)=u(x)\,y_1(x)$， 则

$$y_2'=u'\,y_1+u\,y_1'\,,\quad y_2''=u''\,y_1+2\,u'\,y_1'+u\,y_1''$$

代入微分方程：$x^2\,y''+x\,g(x)\,y'+h(x)\,y=0$，整理得：

$$x^2\,y_1\,u''+2\,x^2\,y_1'\,u'+x\,g\,y_1\,u'+\overset{y_1\text{是微分方程的解，此项为}0}{\overline{\left[x^2\,y_1''+x\,g\,y_1'+h\,y_1\right]}}\,u=0$$

进而得到关于 u 的微分方程：$u''+\dfrac{2\,y_1'}{y_1}u'+\dfrac{g}{x}u'=0$ （注：此时 $y_1(x)$ 看成已知函数 ）

代入 $g(x)$ 的 Taylor 展开式：$g(x)=g_0+g_1\,x+g_2\,x^2+\ldots$， 可得：

$$u''+\left(2\,\frac{y_1'}{y_1}+\frac{g_0}{x}+q_2(x)\right)u'=0,\quad \text{其中 } q_2(x)=g_1+g_2\,x+\ldots\text{，仅含 } x \text{ 的 0 次或正幂次} \tag{1.18}$$

代入式：$\dfrac{y_1'}{y_1}=\dfrac{\rho_1}{x}+q_1(x)$，并利用指标方程重根 $\rho_2=\rho_1=(1-g_0)/2$，上式化为：

$$u''+\left(\frac{g_0+2\,\rho_1}{x}+2\,q_1(x)+q_2(x)\right)u'=0\quad\xRightarrow{\rho_1=\frac{(1-g_0)}{2}}\quad u''+\left(\frac{1}{x}+q_3(x)\right)u'=0\,, \tag{1.19}$$

$q_3(x)$ 仅含 x 的 0 次或正幂次

$$\frac{u''}{u'}=-\frac{1}{x}-q_3(x)\ \xRightarrow{\text{两边同积分}}\ \ln u'=-\ln x+q_4(x)\,,\ \Longrightarrow\ u'=\frac{1}{x}\,e^{q_4(x)}=\frac{1}{x}\,q_5(x),$$

这里 $q_4(x)$ 和 $q_5(x)$ 都只含 x 的 0 次或正幂次子项，

$q_5(x)$ 是 $e^{q_4(x)}$ 的展开，$q_5(x)=\overset{\eta_0\neq0}{\overline{\eta_0}}+q_6(x)$，其中 $q_6(x)$ 仅含 x 的正幂次项

$$u'=\frac{1}{x}[\eta_0+q_6(x)]\ \Longrightarrow\ u=\eta_0\ln x+\kappa_0+\kappa_1\,x+\kappa_2\,x^2+\ldots$$ （其中：$\eta_0\neq0$，而 κ_0 来自积分常数 ）

$$y_2(x)=u(x)\,y_1(x)=\eta_0\,y_1(x)\ln x+\left(\kappa_0+\kappa_1\,x+\kappa_2\,x^2+\ldots\right)y_1(x)$$

故指标方程重根时，微分方程的两个线性无关解写成 ：（思考：为何 η_0 不见了？ ）

$$y_1(x)=x^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty}a_k\,x^k,\ a_0\neq0,\qquad y_2(x)=y_1(x)\ln x+x^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty}b_k\,x^k \tag{1.20}$$

- 指标方程两根之差为整数：$\rho_2=\rho_1-p$，其中整数 $p>0$

类似上一种情况，我们仍有 (1.17) 及 (1.18)。

把 $\dfrac{y_1'}{y_1}=\dfrac{\rho_1}{x}+q_1(x)$ 代入 (1.18) 式，并利用指标方程 (1.15) 的两根之和满足 ：$\rho_2+\rho_1=1-g_0$，(1.18) 式化为：

$$u''+\left(\frac{g_0+2\,\rho_1}{x}+q_3(x)\right)u'=0\ \xRightarrow{\text{利用：}g_0+2\,\rho_1=1+p}\ \frac{u''}{u'}=-\left(\frac{1+p}{x}+q_3(x)\right)\ \Longrightarrow\ \ln u'=-(1+p)\ln x+q_4(x)$$

$$\Longrightarrow\ u'=\frac{1}{x^{p+1}}\,e^{q_4(x)}=\frac{\kappa_0}{x^{p+1}}+\frac{\kappa_1}{x^p}+\cdots+\frac{\kappa_p}{x}+\kappa_{p+1}+\kappa_{p+2}\,x+\cdots,\qquad \kappa_0\neq0$$

$$\Longrightarrow\ u=-\frac{\kappa_0}{p\,x^p}-\frac{\kappa_1}{(p-1)\,x^{p-1}}+\cdots+\kappa_p\ln x+\kappa_{p+1}\,x+\frac{1}{2}\,\kappa_{p+2}\,x^2+\cdots$$ 注意最低幂次为 x^{-p}

$$\begin{cases} y_2(x)=u(x)\,y_1(x) \\ y_1(x)=x^{\rho_1}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}a_k\,x^k \end{cases}\ \Longrightarrow\ y_2(x)=\kappa_p\,y_1(x)\ln x+x^{\rho_2}\sum_{m=0}^{\infty}b_k\,x^k,$$ 其中利用了 ：$\rho_2=\rho_1-p$

故指标方程两根之差为整数时 ，微分方程的两个解写成 ：

$$y_1(x) = x^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,\ a_0 \neq 0, \qquad y_2(x) = \kappa_p\, y_1(x) \ln x + x^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k,\ b_0 \neq 0 \tag{1.21}$$

其中 κ_p 可能为 零 或 非零。可以猜想：

$\kappa_p = 0$ 时：$x^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 与 $x^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ 可能线性无关，例如：$x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0$

$\kappa_p \neq 0$ 时：$x^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 与 $x^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ 可能线性相关，例如整数阶Bessel方程 （见下一节）

综合以上的讨论，对正则奇点，Frobenius & Fuchs 定理告诉我们必然有一个解为如下形式

$$y_1(x) = x^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,\ a_0 \neq 0, \tag{1.22}$$

另一个线性无关解的形式由指标方程两个根的关系确定，可能仍然是上式形式，也可能如 (1.20) 或 (1.21) 的是带对数形式。这就给实际应用带来不便，因而，对正则奇点，通常是利用Frobenius & Fuchs 定理，求形如上式的第一个解，再利用 Wronskian 行列式，由第一个解，求另一个线性无关的解。而不是直接求解带对数形式的解。

如何求出形如 (1.22) 的第一个解？代入微分方程，求出各系数 a_k 之间的关系。将在下两节讨论。

解的解析延拓

通常，对二阶线性齐次常微分方程，人们总是在常点或正则奇点的邻域求解，为求方程在更大区域的解，需要做解析延拓。

这就需要解决两个问题:

1. 一个解 w_1 经解析延拓成为 $\tilde{w}_1$，后者还是不是原微分方程的解？ ✓

2. 两个线性无关解 w_1, w_2 经解析延拓成为 $\tilde{w}_1$, $\tilde{w}_2$，是否依然是线性无关？ ✓

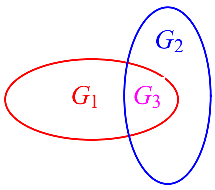
以下例题回答着两个问题。

例题：设 w_1 是二阶线性齐次常微分方程在区域 G_1 内的解，$\tilde{w}_1$是 w_1 在区域 G_2 内的解析延拓，试证 $\tilde{w}_1$仍是原微分方程的解。（可看成微分方程在区域 G_2 内的解）

证明：为叙述简便，仅对 $z = 0$ 邻域进行讨论。二阶线性齐次常微分方程可写成

$z^2 w'' + z\, g(z)\, w' + h(z)\, w = 0$, 因 $z = 0$ 是常点或正则奇点，故 $g(z)$ 和 $h(z)$ 在 $z = 0$ 点解析。

设 $\tilde{w}_1$ 满足：$z^2 \tilde{w}_1'' + z\, g(z)\, \tilde{w}_1' + h(z)\, \tilde{w}_1 = q(z)$，需要证明 $z \in G_2$ 时，$q(z) = 0$



$G_3 = G_1 \cap G_2$

因为 $\tilde{w}_1$ 是 w_1 在 G_2 的解析延拓，故 $\tilde{w}_1$ 在 G_2 除孤立奇点之外解析，

而 $g(z)$, $h(z)$ 也在 G_2 除孤立奇点之外解析，故：$q(z)$ 在 G_2 除孤立奇点之外解析。

又由于 $\tilde{w}_1$ 是 w_1 在 G_2 的解析延拓，必存在 $G_3 = G_1 \cap G_2$，在 G_3 内，$\tilde{w}_1 = w_1$

因 $G_3 = G_1 \cap G_2 \in G_1$，

故对 $z \in G_3$：w_1 是微分方程的解，$z^2 w_1'' + z\, g(z)\, w_1' + h(z)\, w_1 = 0$

对 $z \in G_3$，$\tilde{w}_1 = w_1 \quad \Longrightarrow \quad z^2 \tilde{w}_1'' + z\, g(z)\, \tilde{w}_1' + h(z)\, \tilde{w}_1 = 0$

即：对 $z \in G_3$，$q(z) = 0$，由解析函数的唯一性，对 $z \in G_2$，$q(z) = 0$

即：对 $z \in G_2$，$z^2 \tilde{w}_1'' + z\, g(z)\, \tilde{w}_1' + h(z)\, \tilde{w}_1 = q(z) = 0 \implies \tilde{w}_1$ 仍是原齐次微分方程的解。

例题：设 w_1 和 w_2 是二阶线性齐次常微分方程在区域 G_1 内的两个线性无关解，$\tilde{w}_1$ 和 $\tilde{w}_2$ 分别是 w_1 和 w_2 在区域 G_2 内的解析延拓，试证 $\tilde{w}_1$ 和 $\tilde{w}_2$ 仍然线性无关。

证明：为叙述简便，仅对 $z=0$ 邻域进行讨论。二阶线性齐次常微分方程可写成

$z^2 w'' + z\, g(z)\, w' + h(z)\, w = 0$，因 $z=0$ 是常点或正则奇点，故 $g(z)$ 和 $h(z)$ 在 $z=0$ 点解析。

由上例知，$\tilde{w}_1$ 和 $\tilde{w}_2$ 仍原齐次微分方程的解。如何判断两个函数线性无关？

若 w_1 与 w_2 线性相关，则 $w_2 = c\, w_1$，从而 w_1 和 w_2 的 Wronskian 行列式为 0。证明如下：

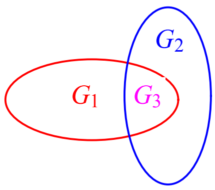
$$W(w_1, w_2) \equiv \begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1' & w_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_1 & c\, w_1 \\ w_1' & c\, w_1' \end{vmatrix} = 0$$

若 w_1 和 w_2 的 Wronskian 行列式为 0，则 w_1 与 w_2 线性相关，证明如下：

$$\begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1' & w_2' \end{vmatrix} = w_1\, w_2' - w_2\, w_1' = 0 \implies \frac{w_2'}{w_2} = \frac{w_1'}{w_1} \implies \ln w_2 = \ln w_1 + \tilde{c} \implies w_2 = c\, w_1$$

故 Wronskian 行列式为 0 是线性相关的充要条件（对 2 个以上的函数也是如此）。

现在需要从 $W(w_1, w_2) \neq 0$ 证明 $W(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2) \neq 0$。利用解析函数唯一性定理。



$G_3 = G_1 \cap G_2$

令 $W(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2) = q(z)$，显然 $q(z)$ 在 G_2 内是解析函数。现需要证明 $z \in G_2$ 时，$q(z) \neq 0$

用反证法：（与上一例题不同，这里要证明 $q(z) \neq 0$，而非 $q(z) = 0$，故用反证法）

由于在 $G_3 = G_1 \cap G_2 \in G_1$，$w_1$ 与 w_2 线性无关，$\tilde{w}_1 = w_1$，$\tilde{w}_2 = w_2 \implies W(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2) = W(w_1, w_2) \neq 0$，

若 $\tilde{w}_1$ 和 $\tilde{w}_2$ 线性相关，只能在区域 $G_2 \setminus G_1$ 内线性相关。（$G_2 \setminus G_1$ 表示 G_2 挖去 G_3 剩下的部分）

现在就设 $\tilde{w}_1$ 和 $\tilde{w}_2$ 在区域 $G_2 \setminus G_1$ 线性相关，即：$z \in G_2 \setminus G_1$ 时，$q(z) \equiv W(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2) \equiv 0$

由于 $q(z)$ 在 G_2 内是解析函数，在 $G_2 \setminus G_1$ 区域 $q(z) \equiv 0$ 必导致在整个 G_2 区域 $q(z) \equiv 0$

从而在 $G_3 = G_1 \cap G_2 \in G_1$，$q(z) \equiv 0$，这与在 G_3 区域 $W(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2) = W(w_1, w_2) \neq 0$ 矛盾。

故：$W(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2)$ 在整个 G_2 区域不为零，即 $\tilde{w}_1$ 和 $\tilde{w}_2$ 在整个 G_2 区域线性无关。

这两个例题表明，可以在一个小区域求微分方程的（线性无关）解，再通过解析延拓，得到大区域的（线性无关）解。当然，前提是微分方程在大区域内存在解析解。

6.3 方程常点邻域的级数解

上一节讨论了微分方程解的存在性以及解的形式，本节与下一节通过一些例子讨论常点与正则奇点如何求解。

求以下 Legendre 方程在 $x=0$ 邻域的解，l 为已知常数。

$$\left(1-x^2\right) y'' - 2\, x\, y' + l(l+1)\, y = 0, \quad p(x) = -\frac{2\, x}{1-x^2}, \quad q(x) = \frac{l(l+1)}{1-x^2} \tag{1.23}$$

显然：$x=0$ 是方程的常点。由 Frobenius and Fuchs 定理，常点邻域存在两个如下形式的线性独立解

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, x^k, \quad 其中：c_0 \neq 0，在 x_0 = 0 点的邻域 |x| < 1$$

如何确定解？把上式代入微分方程，求得各系数 c_k 之间的关系。

为此，上式求导，可得：（把出现在微分方程的每一项均化为 $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ 形式，以便比较系数）

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} k\, c_k\, x^{k-1}, \quad x\, y' = \sum_{k=0}^{\infty} k\, c_k\, x^k$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\, c_k\, x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2)\, c_{k+2}\, x^k, \qquad x^2\, y'' = \sum_{k=0}^{\infty} k\,(k-1)\, c_k\, x^k$$

各项均以 $\sum_{k=0}^{\infty} b_k\, x^k$ 的形式出现，代入微分方程：

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k+1)(k+2)\, c_{k+2} - k(k-1)\, c_k - 2\, k\, c_k + l(l+1)\, c_k]\, x^k = 0$$

据 Taylor 展开的唯一性知各幂次系数为 0

$$(k+1)(k+2)\, c_{k+2} - [k(k+1) - l(l+1)]\, c_k = 0$$

从而得到系数之间的递推关系

$$c_{k+2} = \frac{k(k+1) - l(l+1)}{(k+1)(k+2)}\, c_k = \frac{(k-l)(k+l+1)}{(k+1)(k+2)}\, c_k$$

利用这个递推关系，可得：

$$c_{2n} = \frac{(2n-l-2)(2n+l-1)}{2n(2n-1)}\, c_{2n-2} = \frac{(2n-l-2)(2n+l-1)(2n-l-4)(2n+l-3)}{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}\, c_{2n-4}$$

$$= \frac{\overbrace{(2n-2-l)(2n-4-l)\cdots(-l)}^{\text{总共有}n\text{项相乘}}\ \ \overbrace{(2n-2+l+1)(2n-4+l+1)\cdots(l+1)}^{\text{总共有}n\text{项相乘}}}{(2n)!}\, c_0$$

$c_{2n} = \frac{2^{2n}}{(2n)!}\left(-\frac{l}{2}\right)_n \left(\frac{l+1}{2}\right)_n c_0$， 其中 $(a)_n$ 为 Pochhammer 符号，可表为 Γ 函数：$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = \overbrace{a(a+1)\ldots(}^{\text{从}a\text{开始,}}$

$c_{2n+1} = \frac{2^{2n}}{(2n+1)!}\left(-\frac{l-1}{2}\right)_n \left(\frac{l}{2}+1\right)_n c_1$， 与 c_{2n} 类似地推导

所有的偶次幂项均由 c_0 确定，奇次幂项由 c_1 确定，Legendre 方程的通解 为：

$y(x) = c_0\, y_0(x) + c_1\, y_1(x)$， 其中 $y_0(x)$ 只含偶次幂项， $y_1(x)$ 只含奇次幂项 。

$$y_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(2k)!}\left(-\frac{l}{2}\right)_k \left(\frac{l+1}{2}\right)_k x^{2k}, \qquad y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(2k+1)!}\left(-\frac{l-1}{2}\right)_k \left(\frac{l}{2}+1\right)_k x^{2k+1},$$

所以，Legendre 方程 (1.23) 有两个线性无关的解，一个是奇次幂级数，一个是偶次幂级数。

对于一般的 l，级数无法化简为初等函数形式，也就是说，Legendre 方程的解是Legendre 函数（特殊函数）。

由于Legendre 方程 (1.23) 是线性齐次微分方程， $y_0(x)$ 是解，任意常数与$y_0(x)$ 的乘积，依然是解。

```
eq = (1 - x^2) D[y[x], {x, 2}] - 2 x D[y[x], x] + n (n + 1) y[x];
DSolve[eq == 0, y[x], x]
```

```
{{y[x] → C[1] LegendreP[n, x] + C[2] LegendreQ[n, x]}}
```

更多关于Legendre 方程的解的性质，将在后面的章节讨论。本章的内容主要是：微分方程的级数解法（ Frobenius 解法）。

6.4 方程正则奇点邻域的级数解

Beseel 方程的解

求以下 Bessel 方程在 $x=0$ 邻域的解，ν 为已知常数

$$x^2 y'' + x y' + (x^2-\nu^2) y = 0, \quad p(x) = \frac{1}{x}, \quad q(x) = \frac{(x^2-\nu^2)}{x^2} \tag{1.24}$$

显然：$x=0$ 是方程的正则奇点。由 Frobenius and Fuchs 定理，正则奇点邻域 必定存在一个如下形式的解

$$y(x) = x^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad \text{其中：} \ c_0 \neq 0，\text{在 } x_0 = 0 \text{ 点的邻域 } |x| > 0$$

比之于常点，求解过程多了一步：要推导并求解指标方程，若需要求解第二个解，还要看指标方程是否重根等等。

先求指标方程 。形式解求导 ，可得：（把出现在微分方程的每一项均化为 $\sum_k b_k x^{k+\rho}$ 形式）

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\rho) c_k x^{k+\rho-1}, \quad x y' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\rho) c_k x^{k+\rho}$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\rho)(k+\rho-1) c_k x^{k+\rho-2}, \quad x^2 y'' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\rho)(k+\rho-1) c_k x^{k+\rho}$$

$$x^2 y = x^{\rho+2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\rho+2} \xrightarrow{\text{化为 } \sum_k^{\infty} b_k x^{k+\rho} \text{ 形式}} \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2} x^{k+\rho}$$

代入微分方程：

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+\rho)(k+\rho-1) + (k+\rho) - \nu^2\right] c_k x^{k+\rho} + \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2} x^{k+\rho} = 0 \tag{1.25}$$

由最低幂次 x^ρ（对应于 $k=0$）的系数为 0 导出指标方程

$$(\rho^2-\nu^2) c_0 = 0 \xrightarrow{c_0 \neq 0} \boxed{\rho^2 - \nu^2 = 0} \Longrightarrow \rho_1 = \nu, \quad \rho_2 = -\nu$$

再由 $x^{\rho+1}$项（对应于 $k=1$ 项）的系数为 0，导出

$$\left[(\rho+1)^2 - \nu^2\right] c_1 = 0 \xrightarrow{\text{利用指标方程}} (2\rho+1) c_1 = 0 \xrightarrow{\boxed{\text{若 } \rho \neq -1/2}} c_1 = 0$$

最后，由 $k \geq 2$ 项的系数为 0，得递推关系

$$c_k = -\frac{c_{k-2}}{\left[(k+\rho)^2 - \nu^2\right]} \xrightarrow{\text{利用指标方程}} c_k = -\frac{1}{k(k+2\rho)} c_{k-2} \tag{1.26}$$

故对于 $\rho = \nu$，取 $c_1 = 0$，故

$$c_{2n} = -\frac{1}{2^2} \frac{1}{n(n+\nu)} c_{2n-2} = (-1)^2 \frac{1}{2^4} \frac{1}{n(n+\nu)} \frac{1}{(n-1)(n+\nu-1)} c_{2n-4}$$

$$= (-1)^n \frac{1}{2^{2n}} \frac{1}{n!} \frac{1}{(\nu+1)_n} c_0, \qquad \text{其中 } (a)_n \text{ 为 Pochhammer 符号，} (a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$$

$$c_{2n+1} = (-1)^n \frac{1}{2^{2n}} \frac{1}{(3/2)_n} \frac{1}{(\nu+3/2)_n} c_1 = 0$$

从而，Bessel 方程有解：

$$y_1(x) = c_0 x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(\nu+1)_k} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = c_0 x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

取 $c_0 = \dfrac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$，则

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \equiv J_\nu(x) \quad \text{Bessel 函数} \tag{1.27}$$

对于 $\rho = -\nu$，仍取 $c_1 = 0$，同时取 $c_0 = \dfrac{1}{2^{-\nu}\,\Gamma(-\nu+1)}$，则第二个解为：

$$y_2(x) = c_0\, x^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(-\nu+1)_k} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu} \equiv J_{-\nu}(x) \tag{1.28}$$

那么，我们是否求得了 Bessel 方程的两个线性独立解：$y_1(x)$ 与 $y_2(x)$？还有三个问题：

1. 求解过程分别对指标 $\rho = \pm\nu$ 时取 $c_0 = \dfrac{1}{2^{\pm\nu}\,\Gamma(\pm\nu+1)}$，若 $c_0 = 0$，是否对应于平庸解？（即 0 解）

因为我们将所有系数都表示为一些常数乘以 c_0

2. 讨论中，我们总是取 $c_1 = 0$。实际上仅当指标 $\rho \neq -1/2$ 时才保证 $c_1 = 0$，讨论中总是取 $c_1 = 0$ 是否会导致“漏掉”一个解。

当然在求得两个线性独立解时，不可能漏解，但若求得的两个解线性相关，是否是因为取 $c_1 = 0$ 导致的漏解？

3. 最重要的，这两个解是否线性无关？因为对正则奇点，Frobenius and Fuchs 定理只保证能求得一个解，

并不能保证求出的两个解线性无关。实际上，当 $\rho_2 - \rho_1$ 为整数时，两个解很可能是线性相关的。

■ 先回答第一个问题，$c_0 = \dfrac{1}{2^{\pm\nu}\,\Gamma(\pm\nu+1)} = 0$ 是否对应于平庸解？（对线性齐次微分方程，零是方程的平庸解。）

因为指标解以 $\pm\nu$ 形式成对出现，不失一般性，可假设 $\mathrm{Re}\,\nu > 0$。

当 ν 为正整数 $p > 0$ 时，Gamma 函数的宗量可能为负整数或 0，$c_0 = 0$，是否对应于平庸解？非也！

看 $\rho = -\nu = -p$ 时 系数之间的递推关系 (1.26)，设 $k > p$ 并令 $k - p = m$，从而：$p = k - m$

$$c_{2k} = -\frac{1}{2^2}\,\frac{1}{k(k-p)}\,c_{2(k-1)} = (-1)^2\,\frac{1}{2^4}\,\frac{c_{2(k-2)}}{k(k-1)\,(k-p)\,(k-p-1)}$$

$$= (-1)^m\,\frac{1}{2^{2m}}\,\frac{\overset{c_{2p}}{c_{2(k-m)}}}{k(k-1)\cdots(k-m+1)\times(k-p)\,(k-p-1)\cdots\underbrace{(k-p-m+1)}_{\text{此项等于1}}}$$

$$= (-1)^{m+1}\,\frac{1}{2^{2(m+1)}}\,\frac{c_{2(p-1)}}{k(k-1)\cdots(k-m+1)\,(k-m)\times(k-p)\,(k-p-1)\cdots(k-p-m+1)\,\underbrace{(k-p-m)}_{\text{此项等于0}}}$$

上式最后一行的分母为 0，表明递推至 c_{2p} 为止，$c_{2(p-1)} = c_{2(p-2)} = \cdots = c_0 = 0$，这样求和就不能从 $k = 0$ 项开始。

即：当 ν 等于正整数 p 时，对应于 $\rho = -\nu$ 的级数解的写法就复杂了，求和必须从 $k = p$ 而非从 $k = 0$ 项开始。

为规避这个复杂性，利用 Gamma 函数，并令 $c_0 = \dfrac{1}{2^{-\nu}\,\Gamma(-\nu+1)}$，把对应于 $\rho = -\nu$ 的级数解之系数 c_{2k} 写成

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}\,k!\,\Gamma(k-\nu+1)} \qquad \text{记得 } \rho = -\nu$$

$$= -\frac{1}{2k(2k+2\rho)}\,\frac{(-1)^{k-1}}{2^{2(k-1)}\,(k-1)!\,\Gamma(k-\nu)} = -\frac{c_{2k-2}}{2k(2k+2\rho)}$$

此式（紫色表达式）满足系数之间的递推关系 (1.26)，同时

此式还自动保证在 ν 等于正整数 p 时，$c_{2(p-1)} = c_{2(p-2)} = \cdots = c_0 = 0$，从而求和仍可从 $k = 0$ 项开始。

■ 再回答第二个问题，当指标方程给出的解是 $\rho = -\dfrac{1}{2}$ 时，c_1 可以不为 0，取 $c_1 = 0$ 是否会导致”漏掉”解

对 Bessel 方程，当有一个指标为 $-\dfrac{1}{2}$ 时，另一个指标必为 $+\dfrac{1}{2}$，两个解 (1.27) 和 (1.28) 分别退化为

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1/2}, \quad y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1/2}$$

$y_1(x)$ 的最低幂次项为：$x^{1/2}$；$y_2(x)$ 的最低幂次项为：$x^{-1/2}$，二者之比显然不会是常数，线性无关。

因为二阶微分方程只有两个线性无关解（见下一节的证明），

所以，在 $\rho=-1/2$ 时，即使取 $c_1\neq 0$，求出的解也必然是 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 的线性组合，

也就是说，讨论中在 $\rho=-1/2$ 时，也取 $c_1=0$，并没有漏掉线性无关解。

有兴趣的同学不妨试试在 $\rho=-\frac{1}{2}$ 时，取 $c_1\neq 0$，看看求出的解是否能表为 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 的线性组合。

- 现在我们来讨论最后一个问题，两个解 (1.27) 和 (1.28) 是否线性无关。

实际上，由 §6.2 的讨论可知，当两个指标之差 $\rho_1-\rho_2=2\nu$ 不为整数时，两个解必然线性无关。

对 Bessel 方程，只要 ν 不为整数，由以下两式的最低幂次项可知

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \quad 和 \quad J_{-\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}$$

也是线性无关的。但是，当 $\nu=n$ 为整数时

$$y_1(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,(m+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m}=J_n(x)$$

$$y_2(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m-n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n}=\sum_{m=n}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,(m-n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n}=J_{-n}(x),\ \text{利用了 } m<0 \text{ 时，} \frac{1}{\Gamma(m)}=0$$

由第三章：$J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x)$，故 $y_2(x)$ 与 $y_1(x)$ 线性相关。

由 §6.2 的讨论，另一个解可以为含有对数项的 (1.21) 形式：$y_2(x)=\kappa_p\, y_1(x)\ln x+x^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty}b_k x^k$，$b_0\neq 0$。

那么是否需要将含对数项的 (1.21) 形式解代入微分方程，确定各系数 b_k 间的关系以求得第二个线性无关解？

太麻烦了，假道伐虢。

寻求第二个（线性无关）解

对正则奇点，无论指标方程的解如何，据 Frobenius and Fuchs 定理，总有一个解是可以确定的，就是如下形式：

$$y(x)=x^\rho\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k,\quad 其中：\ c_0\neq 0,$$

至于另一个线性无关解，当两个指标只差为整数时，

Frobenius and Fuchs 定理告诉我们，解可能含有含对数项，显然不易直接代入微分方程求解系数。

据常微分方程理论，对二阶线性齐次常微分方程，最多只有两个线性无关解，并且可以从一个解求出另一个线性无关解。

1. 二阶线性齐次常微分方程最多只有两个线性无关解

这个性质可以用反证法证明。假设二阶线性齐次常微分方程有 3 个不同的解，证明这三个解必线性相关。

设 y_1, y_2, y_3 为如下微分方程的解

$$y''+p(x)\,y'+q(x)\,y=0 \implies \frac{y''}{y}+p(x)\frac{y'}{y}=-q(x)$$

任意两个解的Wronskian行列式为

$$W_{ij}=y_i y_j'-y_j y_i' \implies W_{ij}'=(y_i y_j'-y_j y_i')'=y_i y_j''-y_j y_i''$$

由于 y_i 与 y_j 是微分方程的解，故

$$\frac{y_i''}{y_i}+p(x)\frac{y_i'}{y_i}=-q(x)=\frac{y_j''}{y_j}+p(x)\frac{y_j'}{y_j} \implies y_i y_j''-y_j y_i''+p(x)\,(y_i y_j'-y_j y_i')=0$$

整理上两个等式，得到Wronskian行列式 W_{ij} 满足的微分方程

$$\boxed{W'_{ij} = -p(x)\, W_{ij}}$$，对任意一对解都成立 。

另一方面，三个解是否线性相关的判据是以下 Wronskian 行列式是否为 0

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ y''_1 & y''_2 & y''_3 \end{vmatrix} = -y'_1\, W'_{23} + y'_2\, W'_{13} - y'_3\, W'_{12},$$ （其中行列式以第二行展开 ）

利用Wronskian行列式 W_{ij} 满足的微分方程并写成行列式形式

$$W = p(x)\,[y'_1\, W_{23} - y'_2\, W_{13} + y'_3\, W_{12}] = -p(x) \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \end{vmatrix} = 0$$

因此，若二阶线性齐次常微分方程有 3 个不同的解，这三个解必线性相关。

2. 从一个解求出另一个线性无关解

从 $y_1(x)$ 出发求 $y_2(x)$，看Wronskian行列式 W_{12} 满足的微分方程

$$W'_{12} = -p(x)\, W_{12} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\, W_{12}}{W_{12}} = -p(x)\, dx \quad \Longrightarrow \quad W_{12} = e^{-\int p(x)\, dx}$$

另一方面

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{y'_2\, y_1 - y_2\, y'_1}{y_1^2} = \frac{W_{12}}{y_1^2} = \frac{e^{-\int p(x)\, dx}}{y_1^2},$$

等式两边同时积分 $\Longrightarrow$ $\boxed{y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)\, dx}}{y_1^2}\, dx}$

这种求解方法在求解 Lengendre 方程时会用到。

但是，对 Bessel 方程的解，依然太过麻烦。

寻求Bessel方程的第二个线性无关解

对 Bessel 方程，我们总可以求出两个解

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\, \Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}, \quad J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\, \Gamma(k-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu} \tag{1.29}$$

只不过，当 $\nu =$ 整数 时，这两个解线性相关。

直接求解 (1.21) 形式（含对数项的级数）的线性无关解较为复杂，通过上一小节 利用 Wronskian 行列式来求解也不方便。

我们看不上 Frobenius and Fuchs，也抛弃 Wronskian 行列式法。

对 Bessel 方程，还可以有第三种解法。为介绍之，先从 Wronskian 行列式探讨这两个解何时线性相关。

从 Wronskian 行列式满足的微分方程出发：

$$W' = -p(x)\, W = -\frac{W}{x} \quad \Longrightarrow \quad W = \frac{C}{x},$$

其中利用了 Bessel 方程 (1.24) 中 $p(x) = \frac{1}{x}$： $x^2\, y'' + x\, y' + \left(x^2 - \nu^2\right) y = 0$

另一方面，把级数 (1.29) 代入 Wronskian 行列式，求 x 负一幂次的系数

$$W = W[J_\nu, J_{-\nu}] = \begin{vmatrix} J_\nu & J_{-\nu} \\ J'_\nu & J'_{-\nu} \end{vmatrix} = J_\nu\, J'_{-\nu} - J'_\nu\, J_{-\nu}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\, \Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l\, (2\,l-\nu)/2}{l!\, \Gamma(l-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l-\nu-1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, (2\,k+\nu)/2}{k!\, \Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!\, \Gamma(l-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l-\nu}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+l}\, (2\,l-\nu)/2}{k!\, \Gamma(k+\nu+1)\, l!\, \Gamma(l-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2l-1} - \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+l}\, (2\,k+\nu)/2}{k!\, \Gamma(k+\nu+1)\, l!\, \Gamma(l-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2l-1}$$ 仅 $k = l = 0$ 项对含 x^{-1}

$$= -\frac{2\,\nu}{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(1-\nu)}\,x^{-1} + h(x), \quad \text{其中 } h(x) \text{ 仅含 } x \text{ 的正、奇幂次项}$$

从而

$$C = -\frac{2\,\nu}{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(1-\nu)} = -\frac{2}{\Gamma(\nu)\,\Gamma(1-\nu)} = -\frac{2}{\pi}\sin\nu\pi \quad \text{（利用了 } \Gamma \text{ 函数的互余宗量定理 ）}$$

$$\Longrightarrow W = -\frac{2}{\pi\,x}\sin\nu\pi$$

原来，当 ν 为整数时，$W[J_\nu, J_{-\nu}] = 0$，J_ν 与 $J_{-\nu}$ 线性相关。

注意此线性相关来自 $\sin\nu\pi$ 因子，若取两个解为

$$y_1(x) = J_\nu，\ y_2(x) = -\frac{J_{-\nu}}{\sin\nu\pi}, \quad \text{则} \quad W[y_1, y_2] = \frac{2}{\pi\,x} \quad \Longrightarrow \text{无论 } \nu \text{ 是否整数，} y_1 \text{ 与 } y_2 \text{ 都线性无关 。}$$

但，当 ν 为整数时，y_2 分母为 0，而分子不为 0。因此，进一步改取（这里利用线性齐次方程解的叠加原理）

$$y_2(x) = \frac{c\,J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}，\text{这时仍有：} W[y_1, y_2] = \frac{2}{\pi\,x}, \quad y_1 \text{ 与 } y_2 \text{ 依然线性无关}$$

引入参数 c 之后，我们有了个自由度，可通过调节 c，使得当 ν 为整数时，y_2 的分子也趋于 0，但存在不恒为 0 的极限。

如何才能保证当 ν 趋于整数时，分子也为 0？当 n 为整数时：$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad \Longrightarrow \quad c = (-1)^n = \cos n\pi$，从而选取

$$y_2(x) = \frac{(\cos\nu\pi)\,J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} \equiv N_\nu(x) \quad \text{称为 Neumann 函数或第二类 Bessel 函数}$$

这样既能保证 y_1 与 y_2 都线性无关，又保证 $\nu \to n$ 时，分子分母同时趋于 0，可望用洛必达法则求其极限 。

以上定义的 y_2 无论 ν 是否整数，都是 Bessel方程的第二个线性无关解，并且对 $\nu \to$ 整数，分子分母同时趋于 0。

然而，分子分母同时趋于 0 并不意味着极限一定存在，因此还需用 L'Hospital 法则求 $\nu \to$ 整数时的极限。

$$N_n(x) = \lim_{\nu\to n} N_\nu(x) = \lim_{\nu\to n}\frac{d[(\cos\nu\pi)\,J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)]/d\nu}{d(\sin\nu\pi)/d\,\nu} = \frac{1}{\pi}\lim_{\nu\to n}\left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial\nu} - (-1)^n\frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial\nu}\right]$$

利用 (1.29) 式 Bessel 函数的定义可求得（不失一般性，设整数 $n > 0$）

$$\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial\nu} = \frac{\partial}{\partial\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \quad \text{利用在对数函数的主值分枝 } |\arg a| < \pi\text{，有 } \frac{d\,a^z}{d\,z} = a^z\ln a$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}\left[\ln\frac{x}{2} - \psi(k+\nu+1)\right],$$

$$\text{其中digamma 函数 （终于派上用处了 ）} \quad \psi(k+\nu+1) = \frac{\Gamma'(k+\nu+1)}{\Gamma(k+\nu+1)}$$

$$\lim_{\nu\to n}\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial\nu} = J_n(x)\ln\frac{x}{2} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(k+n)!}\psi(k+n+1)\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \quad \text{果真出现 (1.21) 形式的对数项}$$

类似地

$$\frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial\nu} = \frac{\partial}{\partial\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu} \quad \text{利用在对数函数的主值分枝 } |\arg a| < \pi\text{，有 } \frac{d\,a^z}{d\,z} = a^z\ln a$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}\left[-\ln\frac{x}{2} + \psi(k-\nu+1)\right], \quad \text{其中} \quad \psi(k-\nu+1) = \frac{\Gamma'(k-\nu+1)}{\Gamma(k+\nu+1)}$$

$$\lim_{\nu\to n}\frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial\nu} = -J_{-n}(x)\ln\frac{x}{2} + \lim_{\nu\to n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{\psi(k-\nu+1)}{\Gamma(k-\nu+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}, \quad \text{令：} l = k-n$$

$$= -J_{-n}(x)\ln\frac{x}{2} + \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{l+n}}{l!\,(l+n)!}\psi(l+1)\left(\frac{x}{2}\right)^{2l+n} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}\lim_{\nu\to n}\frac{\psi(k-\nu+1)}{\Gamma(k-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}$$

$$= -(-1)^n J_n(x)\ln\frac{x}{2} + \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{l+n}}{l!\,(l+n)!}\psi(l+1)\left(\frac{x}{2}\right)^{2l+n} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}(-1)^{n-k}(n-k-1)!\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}$$

最后一步利用了：$\lim\limits_{\nu\to n}\frac{\psi(-\nu)}{\Gamma(-\nu)}=-(-1)^n n!$（见上一章 Psi 函数一节的例题，或以下证明）。从而，对 $|\arg x|<\pi$ 有：

$$N_n(x)=\frac{2}{\pi}J_n(x)\ln\frac{x}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(k+n)!}[\psi(k+n+1)+\psi(k+1)]\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

由Wronskian行列式：$W[J_\nu(x),N_\nu(x)]=\frac{2}{\pi x}$ 知 Neumann 函数与 Bessel 函数线性无关，无论 ν 是否为整数。

与 Bessel 函数线性无关的 Neumann 函数的确出现 (1.21) 形式的对数项。这里只是取巧求出其具体形式。

- $\lim\limits_{z\to -n}\frac{\psi(z)}{\Gamma(z)}=-(-1)^n n!$ 的证明

```
Limit[PolyGamma[z]/Gamma[z], z → -n, Assumptions → {n > 0, n ∈ Integers}]
```

```
-(-1)^n n!
```

由 digamma函数的定义易证：$\psi(z+1)\equiv\frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)}=\frac{1}{z}+\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=\frac{1}{z}+\psi(z)$ 递推关系

从而：$\psi(z)=\psi(z+n+1)-\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}-\cdots-\frac{1}{z+n-1}-\frac{1}{z+n}$,

这里因为 $z\to -n$，故把 $\psi(z)$ 写成上式，以保证 $\psi(z+n+1)$ 在 $z\to -n$ 时趋于 $\psi(1)$ 是解析的。

类似于 $\Gamma(z)$，$\psi(z)$ 在 $\mathrm{Re}\,z>0$ 解析，在 z 为 0 或负整数时是单极点，但留数为 -1，与 $\Gamma(z)$ 不同。

```
Residue[Gamma[z], {z, -n}, Assumptions → {n ≥ 0, n ∈ Integers}]
Residue[PolyGamma[z], {z, -n}, Assumptions → {n ≥ 0, n ∈ Integers}]
```

```
(-1)^-n / n!
```

```
-1
```

另一方面：$\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}$，这里也因为 $z\to -n$ 而把 $\Gamma(z)$ 表为：$\Gamma(z+n+1)$

从而

$$\lim_{z\to -n}\frac{\psi(z)}{\Gamma(z)}=\lim_{z\to -n}\frac{\psi(z+n+1)-\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}-\cdots-\frac{1}{z+n}}{\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}}$$

$$=\lim_{z\to -n}\frac{z(z+1)\cdots(z+n-1)\left[(z+n)\,\psi(z+n+1)-\frac{z+n}{z}-\frac{z+n}{z+1}-\cdots-1\right]}{\Gamma(z+n+1)},$$ 其中：$\psi(z)$ 在 $\mathrm{Re}\,z>0$ 解析

$$=(-n)(-n+1)\cdots(-1)=-(-1)^n n!$$

6.5 非齐次微分方程的解

对二阶线性齐次常微分方程，据 Frobenius & Fuchs 定理，在常点邻域，可以直接求出如下形式的两个线性独立解

$$w(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k,\ \text{其中：}\ c_0\neq 0$$

在正则奇点邻域，可求出如下形式的一个解

$$y_1 = w(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^{k+\rho}, \quad \text{其中：} c_0 \neq 0$$

再利用 Wronskian 行列式，求出第二个线性无关解

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx = y_1 \int \frac{W[y_1, y_2]}{y_1^2}\,dx$$

当然，对 Bessel 方程，可使用 特别技巧得到第二个线性无关解 Neumann 函数（也称第二类 Bessel 函数）。

因而原则上，二阶线性齐次常微分方程在常点或正则奇点邻域已可求解。（当然对具体问题，还可以有一些不同技巧。）

二阶线性齐次常微分方程两个线性无关解的线性组合，构成齐次方程的通解。

本节讨论非齐次方程如何求解。

从微分方程理论可知，要求非齐次方程的通解，只需求齐次方程的通解再加上非齐次方程的一个特解。

因而，问题就归结为如何求非齐次方程的一个特解。

还是利用Wronskian行列式

设 y_1, y_2 是齐次方程的两个线性无关解，而 y_3 是非齐次方程的一个特解，即：

$$y_1'' + p(x)\,y_1' + q(x)\,y_1 = 0, \qquad y_2'' + p(x)\,y_2' + q(x)\,y_2 = 0,$$

$$y_3'' + p(x)\,y_3' + q(x)\,y_3 = f(x)$$

上述第一式乘 y_3，第三式乘 y_1，然后两式相减，得：

$$\frac{d\,W[y_1, y_3]}{dx} + p(x)\,W[y_1, y_3] = f(x)\,y_1(x), \quad \text{（若 } y_1 \text{ 与 } y_3 \text{ 均为齐次方程的解，则右边为零）}$$

其中 Wrongskian 行列式 $W[y_1, y_3] = \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ y_1' & y_3' \end{vmatrix} = y_1\,y_3' - y_1'\,y_3$

现令 $W[y_1, y_3] = W[y_1, y_2]\,u(x)$，上式可化为

$$u\,\frac{d\,W[y_1, y_2]}{dx} + W[y_1, y_2]\,\frac{du}{dx} + p(x)\,W[y_1, y_2]\,u = f(x)\,y_1(x) \implies \frac{du}{dx} = \frac{f(x)\,y_1}{W[y_1, y_2]}$$

其中利用了 Wronskian 行列式 $W[y_1, y_2]$ 满足微分方程：$d\,W[y_1, y_2]/dx = -p(x)\,W[y_1, y_2]$，故上式蓝色部分为零。

$$\frac{du}{dx} = \frac{f(x)\,y_1}{W[y_1, y_2]} \implies u = \int \frac{f(x)\,y_1(x)}{W[y_1, y_2]}\,dx \implies W[y_1, y_3] = W[y_1, y_2] \int \frac{f(x)\,y_1(x)}{W[y_1, y_2]}\,dx$$

另一方面，

$$\frac{d(y_3/y_1)}{dx} = \frac{W[y_1, y_3]}{y_1^2}$$

$$\implies y_3 = y_1 \int \frac{W[y_1, y_3]}{y_1^2}\,dx = y_1 \int \frac{W[y_1, y_2]}{y_1^2} \left[\int \frac{f(x)\,y_1(x)}{W[y_1, y_2]}\,dx \right] dx$$

因而，在求得齐次方程的两个线性无关解之后，原则上就可得非齐次方程的一个特解。

从而，非齐次方程的通解原则上就解决了。

利用分部积分，上式还可以化成较为对称的形式

$$y_3 = y_1 \int \overbrace{\left[\int \frac{f(x)\,y_1(x)}{W[y_1, y_2]}\,dx \right]}^{\text{此式视为}u} d \overbrace{\left[\int \frac{W[y_1, y_2]}{y_1^2}\,dx \right]}^{\text{此式视为}v} \qquad \text{看成} \int u\,d\,v = u\,v - \int v\,d\,u$$

$$= y_1 \overbrace{\left[\int \frac{f(x)\,y_1(x)}{W[y_1, y_2]}\,dx \right]}^{\text{此式视为}u} \overbrace{\left[\int \frac{W[y_1, y_2]}{y_1^2}\,dx \right]}^{\text{此式视为}v} - y_1 \int \left[\frac{f(x)\,y_1(x)}{W[y_1, y_2]} \overbrace{\int \frac{W[y_1, y_2]}{y_1^2}\,dx}^{\text{此式视为}v} \right] dx$$

$$=y_2\int\frac{f(x)\,y_1(x)}{W[y_1,y_2]}\,dx-y_1\int\frac{f(x)\,y_2(x)}{W[y_1,y_2]}\,dx,$$

其中利用了从 第一个解通过 Wronskian 行列式求解第二个线性无关解 的公式：$y_2=y_1\int\frac{W[y_1,y_2]}{y_1^2}\,dx$

因为 y_3 的两个不定积分已包含两个待定常数，故 y_3 本身就是非齐次方程的通解。

常数变易法

设 y_1, y_2 是齐次方程的两个线性无关解，即：

$$y_1''+p(x)\,y_1'+q(x)\,y_1=0,\quad y_2''+p(x)\,y_2'+q(x)\,y_2=0$$

令非齐次方程

$$y''+p(x)\,y'+q(x)\,y=f(x)$$

的解为：

$y_3=c(x)\,y_1(x)+d(x)\,y_2(x)$，（注意若 c、d 为常数，y_3 仍然是齐次方程的解 ）

从而：

$y_3'=c\,y_1'+d\,y_2'+c'\,y_1+d'\,y_2$，令 $c'\,y_1+d'\,y_2=0$, $\Longrightarrow$ $y_3'=c\,y_1'+d\,y_2'$

$y_3''=c'\,y_1'+d'\,y_2'+c\,y_1''+d\,y_2''$，把 y_3' 与 y_3'' 代入非齐次方程得

$$c\,\overbrace{[y_1''+p(x)\,y_1''+q(x)\,y_1]}^{y_1\text{ 是齐次方程的解　此项为0}}+d\,\overbrace{[y_2''+p(x)\,y_2''+q(x)\,y_2]}^{y_2\text{ 是齐次方程的解　此项为0}}+c'\,y_1'+d'\,y_2'=f(x)$$

从而我们得到两个关于 c' 和 d' 的方程（上面之两蓝色等式）

$$\begin{cases}c'\,y_1+d'\,y_2=0\\ c'\,y_1'+d'\,y_2'=f(x)\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}c'=-\dfrac{y_2\,f(x)}{W[y_1,y_2]}\\ d'=\dfrac{y_1\,f(x)}{W[y_1,y_2]}\end{cases}$$

其中 Wrongskian 行列式 $W[y_1,y_2]=\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}\neq 0$

通过积分求出 c 和 d，得到 y_3

$$y_3=y_2\overbrace{\int\frac{f(x)\,y_1(x)}{W[y_1,y_2]}\,dx}^{\text{此式为}d(x)}-y_1\overbrace{\int\frac{f(x)\,y_2(x)}{W[y_1,y_2]}\,dx}^{\text{此式为}c(x)}$$

与上一小节用Wronskian行列式求出的结果完全相同。从齐次方程的两线性无关解，也可求得非齐次方程的一特解。

例题：求方程 $x^2\,y''-2\,x\,y'+2\,y=x\ln x$ 的通解

解：$p(x)=-\frac{2}{x}$, $q=\frac{2}{x^2}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, $x=0$ 为正则奇点， 由 Frobenius & Fuchs 定理

齐次方程有解：$y=x^\rho\sum_{k=0}^{\infty}c_k\,x^k$， 代入齐次方程得：

$\sum_{k=0}^{\infty}c_k[(k+\rho)\,(k+\rho-1)-2\,(k+\rho)+2]\,x^k=0$，各 x^k 的系数为 0。

令 $k=0$ 项的系数为 0 得指标方程：$\rho\,(\rho-1)-2\,\rho+2=0\Longrightarrow\rho=1,\ 2$

$\rho=\rho_1=1$ 代入上方程，有：$\left(k^2-k\right)c_k=0\Longrightarrow$ 仅当 $k=0,1$ 时，$c_k\neq 0\Longrightarrow y_1=x^{\rho_1}(c_0+c_1\,x)=c_0\,x+c_1\,x^2$

$\rho=\rho_2=2$ 代入上方程，有：$\left(k^2+k\right)c_k=0\Longrightarrow k\neq 0$，$c_k=0\Longrightarrow y_2=c_0'\,x^{\rho_2}=c_0'\,x^2$

y_1 与 y_2 为齐次方程的线性无关解 ，令 y_1 中的 $c_1=0$（为何可以这样做 ？） 得到两个新函数：

$y_1 = x$, $y_2 = x^2$ 仍然是齐次方程的线性无关解 。

Wronskian 行列式 $W[y_1, y_2] = x^2$

$$y_3 = y_2 \int \frac{f(x)\, y_1}{W[y_1, y_2]} dx - y_1 \int \frac{f(x)\, y_2}{W[y_1, y_2]} dx$$

解出：$y_3 = c_1 x + c_2 x^2 - x\left(\frac{1}{2}\ln^2 x + \ln x + 1\right)$

```
Clear["Global`*"]
y1 = x;   y2 = x^2;    W = Wronskian[{y1, y2}, x];
fx = Log[x]/x;
y3 = y2 Integrate[fx y1/W, x] - y1 Integrate[fx y2/W, x];
y3 = Simplify[%]
ys = c1 y1 + c2 y2 + y3

DSolve[x^2 y''[x] - 2 x y'[x] + 2 y[x] - x Log[ x] == 0, y[x], x]
```

$$-\frac{1}{2} x \left(2 + 2\,\mathrm{Log}[x] + \mathrm{Log}[x]^2\right)$$

$$c1\, x + c2\, x^2 - \frac{1}{2} x \left(2 + 2\,\mathrm{Log}[x] + \mathrm{Log}[x]^2\right)$$

$$\left\{\left\{y[x] \to x\, C[1] + x^2 C[2] + \frac{1}{2}\left(-2x - 2x\,\mathrm{Log}[x] - x\,\mathrm{Log}[x]^2\right)\right\}\right\}$$

6.5 超几何方程与合流超几何方程

物理问题中常见的常微分方程除：Legendre方程、Bessel方程外，还有

Laguerre方程、Hermite方程、Chebyshev方程、Hypergeometric方程和 Confluent hypergeometric 方程。

前面的方程，可看成 Hypergeometric方程或 Confluent hypergeometric 方程的特殊情况，因此有必要简要了解。

超几何方程

如下形式的二阶常微分方程称为超几何方程，也称为高斯方程。

$$x(1-x)\,y'' + [c - (1+a+b)\,x]\,y' - a\,b\,y = 0, \quad p(x) = \frac{c-(1+a+b)\,x}{x(1-x)}, \quad q(x) = -\frac{a\,b}{x(1-x)} \tag{1.30}$$

其中 a, b, c 为实数。显然 $x = 0$, 1 和 ∞ 是方程的正则奇点。

1. 高斯方程在$x = 0$邻域的解

因为 $x = 0$ 是正则奇点，据 Frobenius and Fuchs定理，方程必有一解为如下形式：

$$y = x^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad 其中\ c_0 \neq 0$$

代入微分方程，

$$\sum_{k=0}^{\infty} \{(k+\rho)(k+\rho-1)(1-x) + [c-(1+a+b)\,x](k+\rho) - x\,a\,b\}\, c_k\, x^{k+\rho-1} = 0$$

由 $x^{\rho-1}$ 的系数为 0，可得指标方程为： $\rho(\rho-1)+c\,\rho=0 \implies \rho_1=0,\ \ \rho_2=1-c$

取 $\rho=0$，可导出 c_k 的递推关系：

$$(k+1)\,k\,c_{k+1}-k(k-1)\,c_k+c\,(k+1)\,c_{k+1}-(1+a+b)\,k\,c_k-a\,b\,c_k=0$$

$$\implies \quad c_{k+1}=\frac{(k+a)\,(k+b)}{(k+1)\,(k+c)}\,c_k \quad \implies \quad c_k=\frac{(a)_k\,(b)_k}{(c)_k\,k\,!}\,c_0$$

从而得解：

$$y_1(x)=\ {}_2F_1\,(a,\ b;\ c;\ x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k\,(b)_k}{(c)_k}\,\frac{x^k}{k\,!}\qquad c\neq 0,\ -1,\ -2,\ -3,\ \ldots,\ \ \text{称为超几何函数 。}$$

超几何函数使用了左、右两个下标 m 和 n，分别代表分子和分母中Pochhammer符号的个数。

前 m 个参数用于分子的Pochhammer符号，后 n 个参数用于分母的Pochhammer符号，最后一个是自变量 x。

更一般的“广义”超几何函数写成，

$$_pF_q\,(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_p;\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_q;\ x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_1)_k\,(a_2)_k\cdots(a_p)_k}{(b_1)_k\,(b_2)_k\cdots(b_q)_k}\,\frac{x^k}{k\,!}$$

其中左、右下标分别表示分子和分母中Pochhammer符号的个数。

可以证明，这种形式的函数可以表示任何相邻系数之比为有理式的级数，即

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\,x^k,\quad \frac{\alpha_k}{\alpha_{k-1}}=\frac{A(k)}{B(k)},\quad \text{其中 } A(k) \text{ 和 } B(k) \text{ 为 } k \text{ 的多项式 。}$$

许多初等函数及特殊函数都可以用这种“广义”超几何函数表示。例如：

指数函数： $e^x={}_0F_0\,(\,;;\,x)$，　对数函数： $\ln\,(1+x)=x\,{}_2F_1\,(1,\ 1;\ 2;\ -x)$

因此，某种意义上，“广义”超几何函数在数学分析中完成了像物理学中的大统一理论。

超几何函数与合流超几何函数作为超几何方程 (1.30) 和合流超几何方程的解，是“广义”超几何函数的两个物理上常用的特例。

再回到超几何方程 (1.30)，我们已得到一个解 ${}_2F_1\,(a,\ b;\ c;\ x)$，另一个解可以由另一个指标 $\rho_2=1-c$ 求出。

这里再用一点数学技巧，设：

$y_2(x)=x^{1-c}\,g(x)$，其中 $g(x)$ 为 $x=0$ 邻域的解析函数 ，代入高斯方程 (1.30) 可得 $g(x)$ 满足的方程

```
Clear["Global`*"]
eq = x (1 - x) y''[x] + (c - (1 + a + b) x) y'[x] - a b y[x];
eqg = eq /. {y[x] → x^(1-c) g[x], y'[x] → D[x^(1-c) g[x], x], y''[x] → D[x^(1-c) g[x], {x, 2}]};
Simplify[eqg / x^(1-c)] // TraditionalForm
```

$$-g'(x)\,(x\,(a+b+3)-2\,c\,x+c-2)+(a-c+1)\,(-b+c-1)\,g(x)-(x-1)\,x\,g''(x)$$

$$(1-x)\,x\,g''(x)+g'(x)\left[\overbrace{(2-c)}^{c'}-x\,\overbrace{(a+b+3-2\,c)}^{1+a'+b'}\right]-\overbrace{(a-c+1)}^{a'}\,\overbrace{(b-c+1)}^{b'}\,g(x)=0$$

这个方程又是超几何方程 (1.30)，故可解得：$g(x)={}_2F_1\,(a-c+1,\ b-c+1;\ 2-c;\ x)$

$$y_2(x)=x^{1-c}\,{}_2F_1\,(a-c+1,\ b-c+1;\ 2-c;\ x),\qquad c\neq 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,$$

比较：$y_1(x)={}_2F_1\,(a,\ b;\ c;\ x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k\,(b)_k}{(c)_k}\,\frac{x^k}{k\,!}$ 可知，以上所求之 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 在 c 为非整数时线性无关 。

当 $c=1$ 时，$y_2(x)=y_1(x)$；当 c 为不等于 1 的整数时， $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 有一个可能出现分母为 0，舍去。

因而，当 c 为整数时， $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 中仅剩一个解，方程的另一个解含对数项，形如 (1.21) 中的 $y_2(x)$ 形式。

通常说的超几何函数指的是 ${}_2F_1\,(a,\ b;\ c;\ x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k\,(b)_k}{(c)_k}\,\frac{x^k}{k\,!}$。

2. 超几何函数的收敛性

高斯方程：$x(1-x)y'' + [c-(1+a+b)x]y' - a\,b\,y = 0$ 的一个解可写成如下无穷级数形式：

$$ {}_2F_1(a,\,b;\,c;\,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k\,(b)_k}{(c)_k}\frac{x^k}{k!} \qquad c \neq 0,\,-1,\,-2,\,-3,\,\ldots, \text{ 称为超几何函数 。}$$

其相邻系数之比

$$c_{k+1} = \frac{(k+a)(k+b)}{(k+1)(k+c)}c_k \quad \Longrightarrow \quad \lim_{k\to\infty}\frac{c_{k-1}}{c_k} = 1，\text{收敛半径 } R = 1$$

可以证明，当 a, b, c 和 x 均为实数时，

如 $c > a+b$, 级数在 $-1 \le x \le 1$ 收敛

如 $a+b-1 < c \le a+b$, 级数在 $-1 \le x < 1$ 收敛

```
Clear[a, b, c, x];
Series[Hypergeometric2F1[a, b, c, x], {x, 0, 4}]
```

$$1 + \frac{a\,b\,x}{c} + \frac{a\,(1+a)\,b\,(1+b)\,x^2}{2\,c\,(1+c)} + \frac{a\,(1+a)\,(2+a)\,b\,(1+b)\,(2+b)\,x^3}{6\,c\,(1+c)\,(2+c)} + \frac{a\,(1+a)\,(2+a)\,(3+a)\,b\,(1+b)\,(2+b)\,(3+b)\,x^4}{24\,c\,(1+c)\,(2+c)\,(3+c)} + O[x]^5$$

3. 用超几何函数表示其它特设函数—— 超几何函数表示

超几何方程通过变量代换，可化为许多微分方程。因而许多微分方程的解（对应于特殊函数），即可表为超几何函数。

作为例子，看Legendre方程 (1.2) 和 Gauss方程 (1.7)

Legendre 方程： $(1-x^2)y'' - 2\,x\,y' + l(l+1)\,y = 0$

Hypergeometric 方程： $x\,(x-1)\,y'' + [(1+a+b)\,x - c]\,y' + a\,b\,y = 0$，也称为Gauss方程 。

对Gauss方程做变量变换 $x = \frac{(1-t)}{2}$，并令：$g(t) = y(x)$，方程化为

```
hypgx = x (x - 1) y''[x] + ((a + b + 1) x - c) y'[x] + a b y[x];
sol = Solve[x == (1 - t) / 2, t];
sim = {y[x] → g[t], y'[x] → D[g[t] /. sol[[1]], x],
          y''[x] → D[g[t] /. sol[[1]], {x, 2}]}
hypgt = hypgx /. sim /. x → (1 - t) / 2;
Simplify[hypgt] // TraditionalForm
```

{y[x] → g[t], y′[x] → -2 g′[1 - 2 x], y″[x] → 4 g″[1 - 2 x]}

$$g'(t)\,(a\,(t-1) + b\,(t-1) + 2\,c + t - 1) + a\,b\,g(t) + (t^2-1)\,g''(t)$$

$$(1-t^2)\,g''(t) + [a+b-2\,c+1-(a+b+1)\,t]\,g'(t) - a\,b\,g(t) = 0 \tag{1.31}$$

与Legendre方程：$(1-x^2)y'' - 2\,x\,y' + l(l+1)\,y = 0$ 比较，

$$\text{当}\begin{cases} a+b-2\,c+1=0 \\ (a+b+1)=2 \\ a\,b = -l(l+1)\end{cases}\text{时，}\Longrightarrow\ \text{当}\begin{cases} a=-l，\ b=l+1，\ c=1 \\ \text{或} \\ a=l+1，\ b=-l，\ c=1\end{cases}\text{时}$$

$g(t)$ 所满足的方程 (1.31) 即为 Legendre方程，但是，

$$g(t) = {}_2F_1(-l, l+1; 1; x) = {}_2F_1\left(-l, l+1; 1; \frac{1-t}{2}\right)$$

从而 $g(x) = {}_2F_1\left(-l, l+1; 1; \frac{1-x}{2}\right) = P_n(x)$

满足Legendre方程。即：Legendre方程的解必可表为超几何函数 或 Legendre函数可以用超几何函数表示。

可以用超几何函数表示的特殊函数还有：超求函数 (ultraspherical functions)，连带 Legendre函数，Chebyshev 函数等等。

```
Clear[n]; Hypergeometric2F1[-n, n + 1, 1, (1 - x) / 2]
LegendreP[n, x]
FullSimplify[% - %%]
```

```
Hypergeometric2F1[-n, 1 + n, 1, (1 - x)/2]
```

```
LegendreP[n, x]
```

```
0
```

合流超几何方程

如下形式的二阶常微分方程称为合流超几何方程，也称为库默尔 (Kummer) 方程。

$$x\,y'' + (c - x)\,y' - a\,y = 0, \quad p(x) = \frac{c-x}{x}, \quad q(x) = -\frac{a}{x} \tag{1.32}$$

其中 a, c 为实数。显然 $x = 0$ 是方程的正则奇点，而 $x = \infty$ 是方程的非正则奇点。

1. 为何称为合流超几何方程？

对超几何方程做变量代换：$x = \frac{t}{\beta}$，有

$$x(x-1)\,y'' + [(1+a+b)\,x - c]\,y' + a\,b\,y = 0 \xrightarrow{x=\frac{t}{\beta},\ g(t)=y\left(\frac{x}{\beta}\right)} t\left(\frac{t}{\beta} - 1\right)g'' + \left[(1+a+b)\frac{t}{\beta} - c\right]g' + a\frac{b}{\beta}y = 0$$

这个方程的奇点为：$t = 0$, β 和 ∞，均为正则奇点。

现令 $\beta = b \to \infty$，方程退化为：$-t\,g'' + (t-c)\,g' + a\,y = 0 \implies x\,y'' + (c-x)\,y' - a\,y = 0$，此即 Kummer方程

而超几何方程的两个正则奇点 $t = \beta$ 和 ∞ 就"同流合污"为一个非正则奇点 ∞，故称为合流超几何方程。

2. Kummer方程在 $x = 0$ 邻域的解

因为 $x = 0$ 是正则奇点，据 Frobenius and Fuchs定理，方程必有一解为如下形式：

$$y = x^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k\,x^k, \quad \text{其中 } c_0 \neq 0$$

类似于超几何方程，可解得两个指标为：$\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 1 - c$，对应的两个解为（解法与超几何方程类似）

$$y_1(x) = {}_1F_1(a; c; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(c)_k}\frac{x^k}{k!} = M(a, c, x) \qquad c \neq 0, -1, -2, -3, \ldots,$$ 称为合流超几何函数 、Kummer函数 。

$$y_2(x) = x^{1-c}\,{}_1F_1(a-c+1; 2-c; x) = x^{1-c}\,M(a-c+1, 2-c, x) \quad c \neq 2, 3, 4, \ldots,$$

显然，这两个解继承了超几何方程两个阶段缺陷：c 为整数时，两个解要么线性相关，要么有一个分母出现 0。

仿照 Bessel 方程中引入线性无关解 Neumann函数的方法，对 Kummer方程，第二个解取为

$$U(a, c, x) = \frac{\pi}{\sin c\,\pi}\left[\frac{M(a, c, x)}{\Gamma(a-c+1)\,\Gamma(c)} - \frac{x^{1-c}\,M(a-c+1, 2-c, x)}{\Gamma(a)\,\Gamma(-c)}\right]$$

3. Kummer函数的收敛性

Kummer方程的一个解可写成如下无穷级数形式：

$$M(a,\ c,\ x) = {}_1F_1\,(a;c;x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k}{(c)_k}\frac{x^k}{k!} \qquad c \neq 0,\ -1,\ -2,\ -3,\ \ldots,\ \text{称为合流超几何函数 。}$$

其相邻系数之比

$$c_{k+1} = \frac{(k+a)}{(k+1)\,(k+c)}\,c_k \quad \Longrightarrow \lim_{k\to\infty}\frac{c_{k-1}}{c_k} = \infty\text{，收敛半径 } R = \infty$$

一个很好的级数，c 为 0 或负整数除外。

4. 合流超几何函数表示

类似于高斯方程（超几何方程），通过变量代换，Kummer方程也可化为许多微分方程。

因而许多微分方程的解（对应于特殊函数），即可表为合流超几何函数（Kummer 函数）。

典型的有 Bessel函数、Hermite函数、Laguerre函数等。

$$\text{Bessel 函数：} J_v(x) = \frac{e^{-i\,x}}{\Gamma(v+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^v M\!\left(v+\frac{1}{2},\ 2\,v+1,\ 2\,i\,x\right)$$

$$\text{Hermite 函数：} H_{2\,n}(x) = (-1)^2\,\frac{(2\,n)\,!}{n\,!}\,M\!\left(-n,\ \frac{1}{2},\ x^2\right),\quad H_{2\,n+1}(x) = (-1)^2\,\frac{(2\,n+1)\,!}{n\,!}\,2\,x\,M\!\left(-n,\ \frac{3}{2},\ x^2\right),$$

$$\text{Laguerre 函数：} L_n(x) = M(-n,\ 1,\ x)$$

由两个Kummer函数 $M(a,\ b,\ x)$ 和 $U(a,\ b,\ x)$，可定义两个Whittaker 函数：

$$M_{\kappa\mu}(x) = e^{-x/2}\,x^{\mu+1/2}\,M\!\left(\mu-\kappa+\frac{1}{2},\ 2\,\mu+1,\ x\right)$$

$$W_{\kappa\mu}(x) = e^{-x/2}\,x^{\mu+1/2}\,U\!\left(\mu-\kappa+\frac{1}{2},\ 2\,\mu+1,\ x\right)$$

它们满足自伴方程：$y'' + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\kappa}{x} + \frac{\frac{1}{4}-\mu^2}{x^2}\right)y = 0$