

自行车上台阶的碰撞模型分析

王禹衡* 邱信明^{†,1)}

* (清华大学机械工程系, 北京 100084)

[†] (清华大学航天航空学院, 北京 100084)

摘要 自行车前车轮与台阶发生斜碰撞以后可能落上台阶, 也可能弹回地面, 后者容易引发侧翻或倾倒的事故。本文将建立一个基于恢复系数的通用薄车轮台阶碰撞模型, 并通过一个实际案例代入具体参数数值, 得出此案例下车轮速度大小与速度方向的安全可行域, 并讨论台阶高度对可行域的影响。

关键词 碰撞模型, 恢复系数

中图分类号: O313.4 文献标识码: A doi: 10.6052/1000-0879-18-044

THE COLLISION MODEL OF THE BICYCLE ROLLING UP A STEP

WANG Yuheng* QIU Xinming^{†,1)}

* (Department of Mechanical Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

[†] (School of Aerospace Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract In colliding with a step, the front wheel of the bicycle may roll up the step or spring back to the ground. In the latter case, a rollover or a dumping accident may happen. In this study, a general collision model based on the coefficient of the restitution (COR) is built. The safe ranges of the wheel speed and the velocity direction are obtained. Besides, the influence of the step height is also discussed.

Key words collision model, coefficient of restitution

自行车已经成为当代大学生经济而方便的必备出行工具, 中国各大高校校园中自行车随处可见。由于建筑设计的考虑, 校园中很多地方都会有一些台阶出现, 如宿舍楼车库、教学楼人行道等。而大多数台阶并没有专门为自行车设计的缓坡。

普通的自行车设计时主要只考虑了其在平整路面上行驶的功能, 当骑行者遇到台阶时, 出于安全考虑应下车推行, 使其平稳安全地越过台阶。但是, 学生们通常为了方便, 选择直接骑行冲上台阶, 而这样的过程实际上存在着安全隐患。

以图 1 清华大学紫荆学生公寓宿舍楼为例, 学生们每天在骑自行车进出宿舍楼时, 多次发生车轮

与台阶的碰撞。在一次由于碰撞角度过大而引发的侧翻事故中, 作者意识到, 车轮速度方向与正碰撞方



图 1 清华大学紫荆学生公寓

2018-01-25 收到第 1 稿, 2018-02-21 收到修改稿。

1) E-mail: qxm@mail.tsinghua.edu.cn

引用格式: 王禹衡, 邱信明. 自行车上台阶的碰撞模型分析. 力学与实践, 2018, 40(4): 362-366

Wang Yuheng, Qiu Xinming. The collision model of the bicycle rolling up a step. *Mechanics in Engineering*, 2018, 40(4): 362-366

向夹角越大时，越难安全平稳地越过台阶。

因此，寻找到一个安全的速度大小和角度范围能够更有效地保障骑行者的安全，使大学生们的学习和生活更加顺利地进行。

本文将着重分析在指定的轮胎、台阶尺寸下，自行车速度大小与速度方向的安全可行域，以及台阶高度对此可行域的影响。

1 碰撞模型

1.1 基本量的定义

当自行车前车轮与台阶发生碰撞并发生小的跳起以后，通常有两种结果，一种是前轮落到了台阶上，另一种是前轮落回了地面。将前者定义为安全，后者则容易引发事故，将其定义为不安全。

在此问题中，主要关心车前轮的运动行为，因此将此过程抽象为一个质量分布均匀且厚度较薄的车轮与一个高度均匀的台阶的碰撞模型。

如图 2 所示，以正碰撞方向为 x 轴，台阶延伸方向为 y 轴，竖直方向为 z 轴，建立三维笛卡尔坐标系。

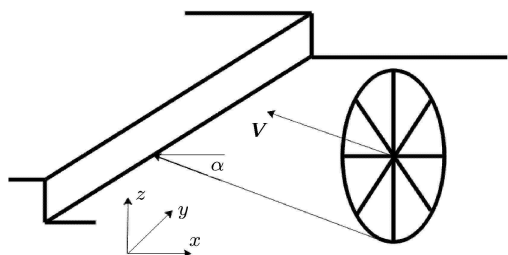


图 2 碰撞示意图

如图 3 所示，定义车轮质心速度为 V ，大小为 V ，与 x 轴负方向夹角为 α 。 V 可以表示为

$$V = (-V \cos \alpha, V \sin \alpha, 0) \quad (1)$$

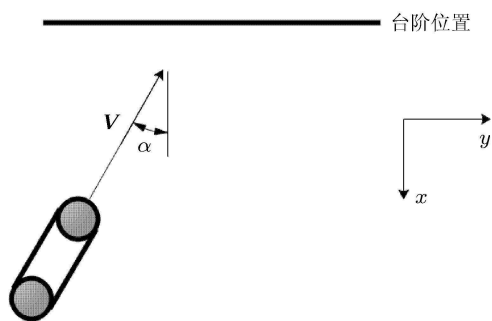


图 3 俯视图

碰撞瞬间，车轮与部分台阶沿车轮平面的截面如图 4 所示，定义台阶高度为 h ，车轮半径为 R ，车轮质心到台阶的垂直距离为 X ，台阶给车轮的冲量为 S ，碰撞过程的恢复系数为 e 。

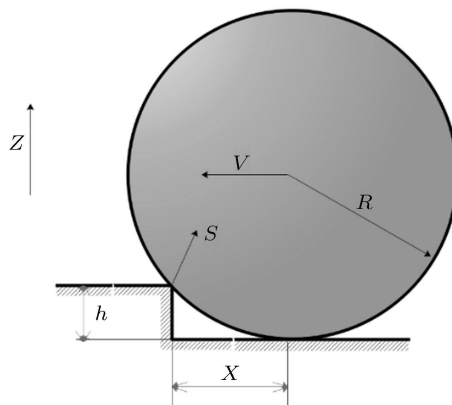


图 4 车轮平面截面图

如图 5 所示，定义冲量方向为 S_e ， S_e 为单位向量，可以表示为

$$S_e = (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi) \quad (2)$$

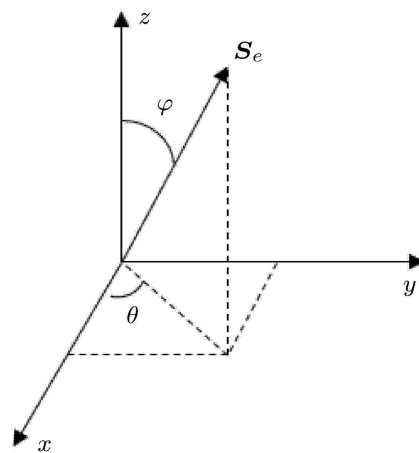


图 5 冲量方向

1.2 碰后速度

碰撞恢复系数 e 通常有基于速度、冲量、能量的 3 种定义方式^[1]，在本模型中，取关于速度的定义方式，即

$$e = \frac{|V_{n0} - V_{n2}|}{|V_{n0} - V_{n1}|} \quad (3)$$

V_{n0} 为台阶速度， V_{n1} 为碰前车轮质心速度在冲量方向上的投影， V_{n2} 为碰后车轮质心速度在冲量方向上的投影。

其中

$$V_{n0} = 0 \tag{4}$$

$$V_{n1} = \frac{|\mathbf{V} \cdot \mathbf{S}_e|}{|\mathbf{S}_e|} \tag{5}$$

由式(3)~式(5)可以得到

$$V_{n2} = -eV_{n1} \tag{6}$$

设碰撞结束瞬间车轮质心的速度为 V_2 , 则有

$$V_2 = V + (-V_0) + V_{n2} \tag{7}$$

1.3 安全可行域

设 $V_2 = (V_x + V_y + V_z)$, 碰撞结束瞬间至车轮落地时间为 t_0 , 重力加速度为 g , 则车轮能够安全地落到台阶上的条件为

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{t_0} (V_z - gt) dt &= h \\ -V_x t_0 &\geq X \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

由式(8)可以得到一个关于变量 α 和 V 的不等式

$$F(\alpha, V) = -V_x \left(V_z + \sqrt{V_z^2 - 2gh} \right) - gX \geq 0 \tag{9}$$

通过数值方法, 可以得到满足不等式的 α 与 V 的取值范围, 即得到了车轮质心速度 \mathbf{V} 方向和大小安全可行域。

2 实例

上文给出了一种通用的薄车轮与台阶碰撞的模型, 下文将利用此模型, 以最为常见的山地自行车 700C 轮胎^[2]与清华大学紫荆学生公寓宿舍楼台阶碰撞为例(如图1), 给出代入式中涉及各实际参数后, 得到 \mathbf{V} 方向和大小可行域。

2.1 恢复系数的估测

由于恢复系数除了最主要由材料决定以外还和碰撞体形状有关, 因此为了减小误差, 不通过查表获得恢复系数, 而是用一个简易的车轮自由下落实验估测山地自行车 700C 轮胎的恢复系数。

如图6所示, 将车轮从距地面高度为 h_{\max} 处自由释放, 其第一次回弹的最大回弹高度为 h_0 。设碰前质心速度为 V_a , 碰后质心速度为 V_b , 则有

$$V_a = -\sqrt{2gh_{\max}} \tag{10}$$

$$V_b = \sqrt{2gh_0} \tag{11}$$



图6 车轮自由下落实验

$$e = -\frac{V_b - 0}{V_a - 0} \tag{12}$$

由式(10)~式(12)得到

$$e = \sqrt{\frac{h_{\max}}{h_0}} \tag{13}$$

由于直接测量 h_{\max} 与 h_0 比较困难, 而式(13)中又只需要二者的比值, 因此用摄像机记录整个过程, 由于轮心、轮底、接触点均在同一平面内, 因此我们认为拍摄视频中缩放后的高度比例即为实际的 h_{\max} 与 h_0 二者比例。

据此, 进行了 10 组实验, 取其中完成质量较好 6 组, 记录所测 e 数据如表 1 所示。

表 1 恢复系数测量值

测次	1	2	3	4	5	6
数值	0.527	0.543	0.559	0.550	0.535	0.528

在置信概率 95% 的条件下

$$e = 0.540 \pm 0.013 \tag{14}$$

需要指出的是, 根据近几年来的一些研究^[3-4]的发现, 碰撞恢复系数除了和碰撞体材料和形状有关以外, 还直接受到法向碰撞速度的影响, 但影响的幅度不大。因此, 上述所测恢复系数仅为估测值, 与台阶碰撞过程的恢复系数仍有小范围的偏差。

2.2 冲量方向的估计

有摩擦的斜碰撞问题是一个尚未完全解决的力学难题^[5-7]。而在本文中, 由于切向碰撞冲量对所研究的碰撞后自行车落地位置问题影响不大, 在一定的误差允许的范围内, 将接触瞬间正碰撞冲量的方向作为冲量方向。

为便于说明, 给出如图 7 和图 8 所示两个剖视图(剖切位置已在图中互相标出)。

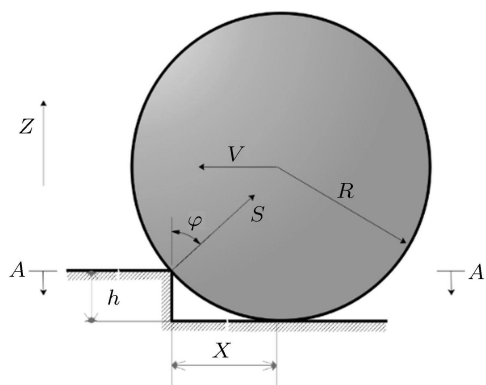


图 7 A-A 截面剖视图

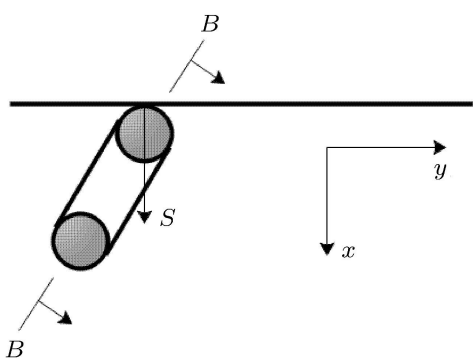


图 8 B-B 截面剖视图

在车轮与台阶接触的瞬间，从 A-A 截面剖视图中可以看出，由于车轮前缘的类半圆的弧形形状，正碰撞冲量的方向应当沿两接触平面的法向（如图 6 所示），即冲量方向 S_e 中

$$\theta = 0 \tag{15}$$

从 B-B 截面剖视图中可以看出，正碰撞冲量的方向应当沿车轮接触平面的法向，即过轮心，则冲量方向 S_e 中

$$\varphi = \arccos \frac{R-h}{R} \tag{16}$$

2.3 速度可行域

根据式 (14)，取恢复系数 $e = 0.540$ ，根据参考文献 [2] 中提到的法式轮胎尺寸系统，取 700C 轮胎半径 $R = 0.33\text{m}$ 。取重力加速度 $g = 9.8\text{m/s}$ 。不同的宿舍楼台阶高度略有差别，范围大致在 $[0.10\text{m}, 0.13\text{m}]$ ，下面以 $h = 0.10\text{m}$ 为例进行计算。

利用 MATLAB 进行数值模拟，解出满足不等式 (9) 的 α 与 V 可行域如图 9 所示。由于本文仅考虑切向碰撞分量可忽略的小角度碰撞问题，因此图 9 只展示 $\alpha \in [0, 60^\circ]$ 时的情形。图中曲线以上的区

域为安全的取值范围，曲线以下的区域为不安全的取值范围。

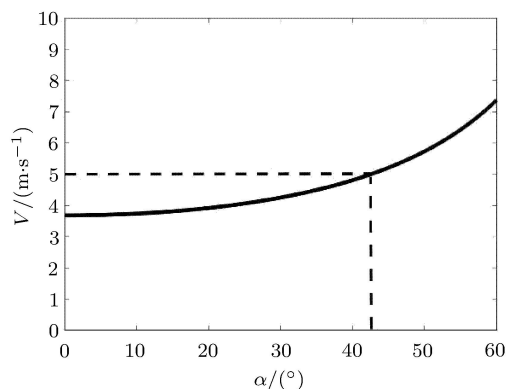


图 9 速度 V 和角度 α 的可行域

从图 9 中可以看出，随着 α 的增加， V 的最小安全取值不断增大，并且增长得越来越快。普通自行车慢速行驶时，速度大小一般在 $2\text{m/s} \sim 5\text{m/s}$ 左右，从图中可以看出骑行冲上台阶时 α 超过 40° 以后就比较危险了，骑行者应尽量减小 α 角以保证安全。

2.4 台阶高度的影响

进一步考虑，由于不同的宿舍楼台阶高度略有差别，需要分析台阶高度带来的影响，将 $h = 0.10\text{m}, 0.11\text{m}, 0.12\text{m}, 0.13\text{m}$ 的数值分别代入不等式 (9)，得到如图 10 所示 4 条曲线。

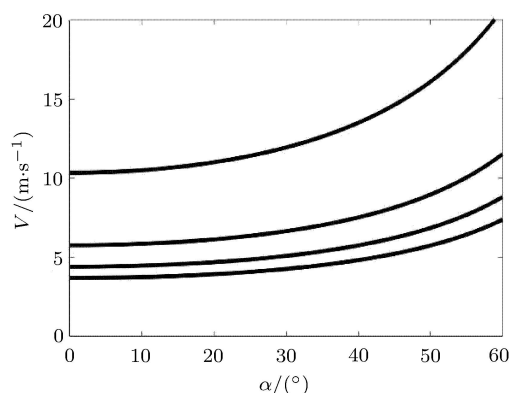


图 10 速度-角度曲线

图 10 中由下至上 4 条曲线分别对应 $h = 0.10\text{m}, 0.11\text{m}, 0.12\text{m}, 0.13\text{m}$ 。可以看出，当 h 不断增大时， α 与 V 的可行域范围将变得更小，即同一碰撞角度 α 所对应的最小安全速度取值 V 将变得更大。因此，在轮胎尺寸不变的条件下，越高的台阶所带来

的危险性越大。

3 结论

通过上文的分析,可以得出,骑行通过台阶时,应尽量减小碰撞时的 α 角或下车推行,避免因碰撞角度过大而引起的车轮回弹甚至侧翻的事故。

本文针对厚度较薄的自行车车轮与高度均匀的台阶的碰撞问题进行建模,给出了一个基于恢复系数的通用碰撞模型。并利用此模型,结合一个实例的具体参数,得到了具体问题中 α 与 V 的可行域。

此碰撞模型利用恢复系数进行讨论,避免了复杂的受力分析,并简单有效地得到了合理结论,为其他研究人员对有摩擦的斜碰撞问题及恢复系数的更加深入的研究提供了参考。

参考文献

- 1 吕茂烈. 碰撞恢复系数及其测定. 固体力学学报, 1984(3): 318-329
- 2 金李伟, 胡志彭, 彭卫军. 自行车轮胎尺寸体系的发展历史及现状. 中国橡胶, 2014, 30(1): 27-29
- 3 刘才山. 碰撞恢复系数的物理意义及其表征. 第十五届全国非线性振动暨第十二届全国非线性动力学和运动稳定性学术会议, 长沙, 2015
- 4 Jackson R, Green L, Marghitu I. Predicting the coefficient of restitution of impacting elastic-perfectly plastic spheres. *Nonlinear Dynamics*, 2010, 60(3): 217-229
- 5 秦志英, 陆启韶. 基于恢复系数的碰撞过程模型分析. 动力学与控制学报, 2006(4): 294-298
- 6 刘延柱. 关于摩擦碰撞的 Kane 难题. 力学与实践, 2012, 34(1): 91-94
- 7 刘延柱. 再论 Kane 难题. 力学与实践, 2013, 35(3): 77-79

(责任编辑: 胡漫)

(上接第 397 页)

参考文献

- 1 Campanella RG, Mitchell JK. Influence of temperature variation on soil behavior. *Journal of the Soil Mechanics & Foundations Division*, 1968, 94(3): 609-734
- 2 Lewis RW, Majorana CE, Schrefler BA. A coupled finite element model for the consolidation of nonisothermal elastoplastic porous media. *Transport in Porous Media*, 1986, 1(2): 155-178
- 3 Modaressi H, Bruce Milne A, Hill GA. Hydrodynamic behavior of a liquid-lift, external-loop bioreactor using a spinning sparger. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 1997, 36(11): 4681-4687
- 4 Bardet JP. Finite element analysis of rockburst as surface instability. *Computers & Geotechnics*, 1989, 8(3): 177-193
- 5 Booker JR, Savvidou C. Consolidation around a point heat source. *International Journal for Numerical & Analytical Methods in Geomechanics*, 1985, 9(2): 173-184
- 6 Smith DW, Rowe RK, Booker JR. Decontamination of a polluted aquifer using an interception/sorption trench: dispersion-advection analysis with linear hereditary sorption. *Computers & Geotechnics*, 1993, 15(3): 163-186
- 7 Seneviratne HN, Carter JP, Airey DW, et al. A review of models for predicting the thermomechanical behaviour of soft clays. *International Journal for Numerical & Analytical Methods in Geomechanics*, 2010, 17(10): 715-733
- 8 Bolton MD, Britto AM, Powrie W, et al. Finite element analysis of a centrifuge model of a retaining wall embedded in a heavily overconsolidated clay. *Computers & Geotechnics*, 1989, 7(4): 289-318
- 9 吴瑞潜. 饱和土一维热固结解析理论研究. [博士学位论文]. 杭州: 浙江大学, 2008
- 10 白冰. 饱和土体圆柱形热源热固结问题的一个近似解. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(6): 1004-1009
- 11 Bai B, Shi XY. Experimental study on the consolidation of saturated silty clay subjected to cyclic thermal loading. *Geomechanics and Engineering*, 2017, 12(4): 707-721
- 12 Akrouch GA, Sanchez M, Briaud JL. An experimental, analytical and numerical study on the thermal efficiency of energy piles in unsaturated soils. *Computers and Geotechnics*, 2016, 71: 207-220
- 13 Bai B. Thermal response of saturated porous spherical body containing a cavity under several boundary conditions. *Journal of Thermal Stresses*, 2013, 36(11): 1217-1232
- 14 Bai B, Li T. Irreversible consolidation problem of a saturated porothermoelastic spherical body with a spherical cavity. *Applied Mathematical Modelling*, 2013, 37(4): 1973-1982

(责任编辑: 胡漫)