横波引起的转动及其孪生剪切变形 1)

胡恒山 2)

(哈尔滨工业大学航天科学与力学系，哈尔滨 150001)

摘要 弹性介质中局部刚性转动的传播服从波动方程，其速度取决于介质的剪切模量和密度. 但是刚性转动不是介质的变形，为什么其速度依赖于表征形状变形恢复能力的剪切模量？本文证明横波传播过程中局部刚性旋转与剪切变形一一对应，互为依存. 发生刚性转动与剪切变形之后，微元体凭借剪切模量恢复其扰动前的形状，同时转回到扰动前的位置，这是转动可以传播且速度依赖于剪切模量的原因.

关键词 局部刚性转动，剪切变形，横波速度，剪切模量

中图分类号：O347, O42, P315, P631 **文献标识码**：A

doi：10.6052/1000-0879-17-331

各向同性线性弹性介质中，纵波是无旋的而横波是有旋的 [1-2]. 在弹性波理论中，旋转指微元体的刚性转动 [2-4]，而横波速度取决于剪切模量和密度 [1-2]. 转动不是变形，剪切模量是介质抵抗变形并企图恢复到零偏应变状态的能力 [3-4]，旋转为什么能按横波速度传播呢？教材与文献均未解释. 横波与纵波是最基本的弹性波动形式，导波、面波是以纵波和横波两种体波复合而成的. 鉴于横波在弹性波理论 [1-2]、地震学 [5]、地震勘探 [6]、声波测井 [7]、超声检测 [8] 和爆炸与冲击 [9] 中占有重要地位，有必要弄清楚横波引起转动的机制.

1 位移场的旋度及转动的传播

弹性力学告诉我们，变形固体中一点的位移可分解为平移、局部刚性转动和变形 3 个独立的部分 [1,3-4]. 变形又分为体积变形和形状变形. 剪切模量反映介质抵抗形状变化的能力. 一点形状变形的程度，可用偏应变来表征. 一点的切应变不为零，该点的偏应变就一定不为零；另一方面，只要某点 3 个主应变方向上的线应变不完全相等，该点就存在偏应变 [10-11]，这种情况下，主方向之外的任意两个正交方向之间的切应变都不为 0. 因此，一点存在切应变和存在偏应变在本质上是相同的，以下不再区分.

微元体上一点 B 绕 A 点转动所产生的位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{u}$，可用旋转矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 和从 A 点到 B 点的矢径 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 表示为 [3-4]

$$(\mathrm{d}\boldsymbol{u})_{\mathrm{rot}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{1}$$

而转动矢量为可用位移场的旋度表示 [3-4]

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \boldsymbol{u} \tag{2}$$

与物体的整体刚体转动不同，微元体的转动是局部的刚性转动，下面简称为转动.

弹性波教材给出了如下转动矢量满足的波动方程 [2,11]

$$\nabla^2\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{c^2}\ddot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{0}, \quad c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{3}$$

式中 $\ddot{\boldsymbol{\omega}}$ 为角加速度. 式 (3) 表明，转动按横波速度 c 传播，该速度取决于介质的剪切模量 μ 和密度 ρ.

弹性波能在弹性介质中传播，是因为弹性介质具有两个特点：一是密度不为 0，运动的微元体有继续运动的惯性；二是具有弹性恢复能力，即微元体有恢复原有形态的能力. 打个比喻来说明吧, 将许多块砖沿一条直线排列，让每一块砖立起来，砖与砖的距离小于砖的高度. 现在以一定的水平速度推第一块砖的顶部，这块砖由于惯性就向前方倾斜，在打击相邻的砖后倒下；第二块砖也由于惯性而向前方倾斜，在打击第三块砖后倒下；依次，直到最后一块砖倾倒. 但这样的多米诺效应不是弹性波，因为这些砖倾倒后没有能力恢复到直立状态，不能在平衡位置来回摆动. 令人不解的是，剪切模量表征介质抵抗偏应变 (或切应变) 并企图恢复形状的能力，而转

本文于 2017–09–25 收到.

1) 国家自然科学基金资助项目 (11734017,11372091).

2) 胡恒山，教授，长期从事弹性动力学的教学与应用研究. E-mail: hhs@hit.edu.cn

引用格式： 胡恒山. 横波引起的转动及其孪生剪切变形. 力学与实践, 2018, 40(2): 207-209

Hu Hengshan. On the twin motions of rotation and shearing in a transverse wave. *Mechanics in Engineering*, 2018, 40(2): 207-209

动是局部的刚性运动而不是变形，转动的传播速度为什么依赖于剪切模量呢？

2 平面横波引起的旋转及其孪生的剪切变形

本节针对各向同性线弹性介质中的平面横波，证明局部转动的传播必然伴生偏应变. 或者说，横波不可能只产生转动而不引起偏应变. 图 1(a) 显示横波在某点 A 附近引起的位移. 按定义，横波传播时，位移方向与传播方向垂直. 设均匀平面横波沿 x 方向传播，那么图中各点均只有 y 方向位移，且波阵面 (x 等于常数的平面，它与 xy 平面的交线为一条竖直线) 上各点的位移相同. 考察闭合路径 $ABCDA$，记 $\Delta x = x^B - x^A$，$\Delta y = y^D - y^A$. 位移沿该路径的环量为 $u_y^B\Delta y - u_y^A\Delta y$，该路径包围的面积为 $\Delta x\Delta y$，其上的位移环量面密度即为该点的旋度，其值为

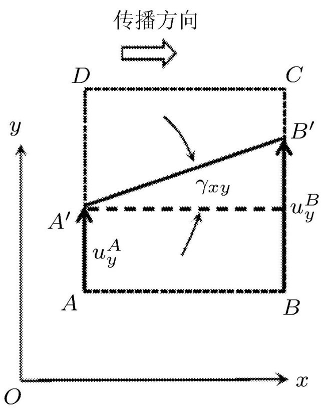
$$(\nabla\times\boldsymbol{u})_z = \lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}\left(u_y^B\Delta y - u_y^A\Delta y\right)/(\Delta x\Delta y) = \lim_{\Delta x\to 0}(u_y^B - u_y^A)/\Delta x \tag{4}$$

注意到原来的直角 $\angle BAD$ 变形后成为斜角 $\angle B'A'D$. 按照定义 [10]，这个角度减小量就是切应变，其值正好等于式 (4) 的右侧表达式. 另一方面，按式 (2) 的定义，式 (4) 的左端等于平面内转动量的 2 倍. 可见

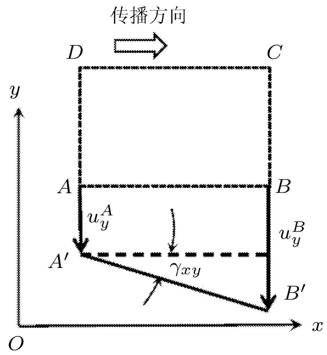
$$\gamma_{xy} = 2\omega_z \tag{5}$$

此式表明：平面横波引起转动时，一定引起切应变. 对于 $u_y^B < u_y^A$ 的情况，切应变 γ_{xy} 将为负值，而转动量也是负值，式 (5) 仍然成立.

波的传播引起微团振动，前半个周期的位移与后半个周期的位移指向可以不同. 图 1(b) 显示横波



(a) 向上位移时



(b) 向下位移时

图 1 平面横波引起的位移

在某点 A 附近引起向下的位移. 沿闭合路径 $ABCDA$，位移的环量仍为 $u_y^B\Delta y - u_y^A\Delta y$，但这里 u_y^B 和 u_y^A 都是负数. 该路径包围的面积为 $\Delta x\Delta y$. 计算位移环量面密度，得到该点的旋度，其值仍可用式 (4) 表达，而图中切应变也为负值. 式 (5) 依然成立.

以上为图示方便，按均匀平面横波进行了推导. 但式 (5) 对于非均匀平面横波也成立. 事实上, 对于沿 x 方向传播的横波, 必有 $u_x = 0$, 于是切应变 $\gamma_{xy} = \dfrac{\partial u_y}{\partial x} + \dfrac{\partial u_x}{\partial y} = \dfrac{\partial u_y}{\partial x}$, 局部刚体转动为 $\omega_z = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_y}{\partial x} - \dfrac{\partial u_x}{\partial y}\right) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u_y}{\partial x}$, 即得 $\gamma_{xy} = 2\omega_z$, 这正是式 (5).

式 (5) 是针对平面横波推导出来的，一般的横波不一定满足该式. 不过，由于任一横波总可以表达成平面横波的组合，而每个平面横波引起孪生的切应变与转角，可得出结论：弹性横波一定既引起旋转又引起剪切变形.

纵波引起切应变，但不引起转动. 因此，式 (5) 揭示了横波特有的一种关系：转动与切应变一一对应，相互依存.

既然横波引起转动时必然引起切应变，局部转动发生后，要恢复到转动前的状态，就必须同时将微元体恢复到零切应变状态，即恢复到原来的形状. 转动是局部的刚性运动，它自身不是变形，介质似乎没有恢复转动的因素；但转动与剪切变形是孪生的，介质能否恢复到转动前的状态，就取决于形状能否恢复，即取决于介质的剪切模量. 这就解释了转动为什么可以传播，且传播速度依赖于剪切模量.

3 纵波引起的剪切变形

在作者的前一篇文章 [12] 中, 证明并举例说明

了纵波一定引起偏应变. 而一点出现偏应变就意味着该点发生了形状的改变，除主应变方向外的其他任意两个正交方向之间的切应变都不为 0. 在本文的这个姊妹篇中作者还指出，纵波速度之所以不仅依赖于体积模量而且依赖于剪切模量，是因为纵波扰动引起了体积变形和形状改变. 纵波可在弹性固体介质中传播是因为介质既有恢复体积变形的能力，又有恢复剪切变形的能力，前者由体积模量表征，后者由剪切模量表征. 传播速度依赖于介质受扰动后的恢复能力，所以纵波速度公式中既出现了体积模量又出现了剪切模量.

体积变形与剪切变形同时发生于纵波. 纵波引起扰动后，介质必须既恢复体积又恢复形状才能回复到平衡位置，这就决定了纵波速度公式必须同时含有体积模量和剪切模量. 即使单独考察体应变的传播，其速度也等于既依赖于体积模量又依赖于剪切模量的纵波速度. 类似地，形状变化与刚性转动都发生于横波. 横波引起扰动后，介质必须既恢复形状又使转角消失，才能回复到平衡位置. 因横波引起的形状变化与刚性转动同步发生也同步消失，横波速度就依赖于剪切模量了. 即使单独考察转动的传播，其速度也是依赖于剪切模量的.

偏应变或切应变 (及相应的形状改变) 既可由纵波引起，又可由横波引起. 它伴随体应变 (及相应的体积改变) 出现于纵波中，伴随转动出现于横波中. 为了方便记忆，打个通俗的比方吧. 偏应变可拥抱 “体应变” 乘快艇 (纵波) 冲浪，也可牵手 “转动” 在慢速度的游船 (横波) 上游玩.

与剪切既发生于横波又发生于纵波不同，局部刚性转动只发生于横波. 纵波虽然引起剪切，但纵波是无旋波，位移场的旋度为 0，不引起转动.

4 结 论

(1) 横波引起局部刚性转动和剪切变形，且转动和剪切一一对应，相互依存. 这是横波特有的性质.

(2) 既然横波引起的转动与切应变同步发生，那么要恢复到转动前的状态就必须恢复形状；而形状的恢复取决于剪切模量. 所以转动以横波速度传播.

(3) 形状改变可由纵波引起，也可由横波引起. 但转动不会出现于纵波.

参 考 文 献

1 Achenbach JD. Wave Propagation in Elastic Solids. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1973

2 Eringen AC, Suhubi ES. Elastodynamics, v2, Linear Theory. New York: Academic Press, 1975

3 王敏中，王炜，武际可. 弹性力学教程 (修订版). 北京: 北京大学出版社, 2011

4 陈明祥. 弹塑性力学. 北京: 科学出版社，2007

5 Aki K, Richards PG. Quantitative Seismology. Second Edtion. Sauslito, California: University Science Books, 2002

6 何樵登. 地震勘探原理和方法. 北京: 地质出版社，1986

7 王克协，崔志文. 声波测井新理论和方法进展. 物理，2011, 40(2): 88-98

8 Rose JL. Ultrasonic Waves in Solid Media. New York: Cambridge University Press, 2014

9 宁建国. 爆炸与冲击动力学. 北京: 国防工业出版社，2010

10 粟一凡. 材料力学，下册，第 2 版. 北京: 高等教育出版社，1960

11 杜庆华，余寿文，姚振汉. 弹性理论. 北京: 科学出版社，1986

12 胡恒山. 拉梅常数的力学意义与剪切模量出现于纵波速度公式的原因. 地球物理学进展，2018, 33(1): 219-222

(责任编辑：胡　漫)