

图9 刚性直杆与地面接触点的加速度图

特别地,刚性直杆在完全光滑的平面上时,可令式(10)中的  $f_d = 0$ ,即可推出与图6~图8类似的结论.

### 3 结束语

本文应用理论力学的基本概念建立了刚性直杆的动力学模型,应用 Mathematica 软件分析了在倾

倒过程中系统参数随时间的变化规律. 本文对刚性直杆的过程分析结果将有助于学生牢固掌握理论知识并能灵活运用,真正把所学应用于工程实际. 另外,在分析过程中引入 Mathematica 软件,也有助于学生通过图片和动画的形式更加直观地观察各系统参数随时间的变化规律,进一步激发学生的学习兴趣.

### 参考文献

- 1 陈立群,薛纭. 理论力学(第2版). 北京:清华大学出版社,2014
- 2 谢传峰,王琪. 理论力学. 北京:高等教育出版社,2009
- 3 哈工大理论力学教研室. 理论力学. 北京:高等教育出版社,2016
- 4 刘延柱,杨海兴,朱本华. 理论力学(第2版). 北京:高等教育出版社,2001
- 5 吴镇. 理论力学. 上海:上海交通大学出版社,1989

(责任编辑:周冬冬)

## 一道考虑摩擦的动力学习题的求解与分析<sup>1)</sup>

苏振超 薛艳霞<sup>2)</sup>

(厦门大学嘉庚学院土木工程系,福建漳州 363105)

**摘要** 给出一个考虑摩擦的动力学习题及其对该题目的一般求解过程,并有针对性地设计两个不同问题,通过对设计问题的讨论,指出该题目看似正确的计算过程中隐藏的问题,并分析了产生问题的原因.

**关键词** 摩擦因数,非线性,多解,动力学,错误分析

**中图分类号:** O321 **文献标识码:** A

**doi:** 10.6052/1000-0879-17-239

摩擦问题是学生学习理论力学过程中感觉困难的知识点之一. 无论是静力学或动力学,摩擦部分都是难以掌握、容易出错的内容. 这主要是因为考虑摩擦时,摩擦力会随着物体所处的状态不同而服从不

同的规律及有不同的计算方法. 也正是因为摩擦力的多变性,考虑摩擦的静力学和动力学问题提高了学生认识问题、解决问题的能力,构成了理论力学中不可多得的培养学生灵活应用力学知识、解决实际问题能力的好素材.

为了帮助年轻教师和学生更好地讲授和学习摩擦部分的力学知识,作者曾对如何引入摩擦力以及摩擦角等概念进行分析<sup>[1]</sup>,并对多个接触面的摩擦问题给出统一的分析流程<sup>[2]</sup>. 本文针对动力学问题中的摩擦现象,通过习题集<sup>[3]</sup>中一道考虑摩擦的动力学习题及其求解和分析,指出其错误之处,并给出一点建议.

本文于 2017-07-05 收到.

1) 福建省教育科学“十三五”规划 2016 年度规划课题(重点)(FJJKCGZ16-152).

2) 薛艳霞,副教授,研究方向为基础力学教育,结构动力学,结构抗震等. E-mail: xueyx888@126.com

**引用格式:** 苏振超,薛艳霞. 一道考虑摩擦的动力学习题的求解与分析. 力学与实践, 2018, 40(1): 86-89

Su Zhenchao, Xue Yanxia. Solution and analysis for a dynamics problem with friction of a rigid-body. *Mechanics in Engineering*, 2018, 40(1): 86-89

## 1 引例及其求解

**例 1** 长为  $2l$  的均质细杆最初直立在粗糙的水平面上, 稍受扰动后, 在重力作用下该杆在铅直平面内绕  $O$  点回转而下, 如图 1 所示. 若杆转至  $\theta = 45^\circ$  时开始滑动, 试求: (1) 杆与平面间的静摩擦因数; (2)  $\theta \geq 45^\circ$  时,  $O$  点将沿哪个方向滑动. (取自文献 [3] 中 Z2-48 题)

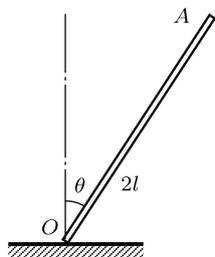


图 1

**解** (1) 假设杆件与平面间的静摩擦因数为  $f_s$ . 杆件从直立在粗糙的水平面转至  $\theta = 45^\circ$  时开始滑动, 期间杆件绕  $O$  点做定轴转动 (图 2).

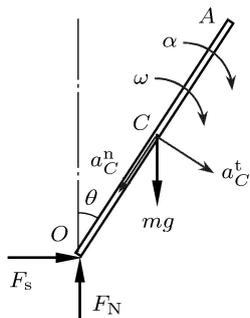


图 2

利用定轴转动的微分方程可得

$$J_O \alpha = M_O(F) = mgl \sin \theta \quad (1)$$

式中,  $m$  为杆件质量,  $g$  为重力加速度,  $\alpha = \ddot{\theta}$ ,  $J_O = \frac{4}{3}ml^2$ , 化简式 (1) 可得

$$\ddot{\theta} = \frac{3g}{4l} \sin \theta, \quad \dot{\theta}^2 = \omega^2 = \frac{3g}{2l} (1 - \cos \theta)$$

质心  $C$  的切向和法向加速度分别为

$$a_C^t = l\ddot{\theta} = \frac{3g}{4} \sin \theta$$

$$a_C^n = l\omega^2 = \frac{3g}{2} (1 - \cos \theta)$$

$$a_{Cx} = a_C^t \cos \theta - a_C^n \sin \theta =$$

$$\frac{9g}{4} \sin \theta \cos \theta - \frac{3g}{2} \sin \theta$$

$$a_{Cy} = -a_C^t \sin \theta - a_C^n \cos \theta =$$

$$-\frac{3g}{4} \sin^2 \theta - \frac{3g}{2} (1 - \cos \theta) \cos \theta$$

利用质心运动定理可得

$$F_s = mg \left( \frac{9}{4} \sin \theta \cos \theta - \frac{3}{2} \sin \theta \right) \quad (2)$$

$$F_N = mg \left[ 1 - \frac{3}{4} \sin^2 \theta - \frac{3}{2} (1 - \cos \theta) \cos \theta \right] =$$

$$\frac{9}{4} mg \left( \cos \theta - \frac{1}{3} \right)^2 \quad (3)$$

依题意有, 当  $\theta = \pi/4$  时, 有  $F_s = f_s F_N$ . 由此可得

$$f_s = \frac{\sin \theta \cos \theta - \frac{2}{3} \sin \theta}{\left( \cos \theta - \frac{1}{3} \right)^2} = 0.205$$

(2) 由于当  $\theta = 45^\circ$  时, 在式 (1) 中求得的摩擦力

$$F_s = mg \left( \frac{9}{4} \sin 45^\circ \cos 45^\circ - \frac{3}{2} \sin 45^\circ \right) = 0.064mg > 0$$

故图 2 中摩擦力的方向是真实的. 即杆件的  $O$  点有向左滑动的趋势.  $\theta$  超过  $45^\circ$  后, 杆件的  $O$  点向左滑动.

上述问题 (1) 所得结果与该习题集的答案一致. 问题 (2) 习题集没有提供答案. 作者相信大部分学生和教师也认为上述解答没有问题.

## 2 对例 1 解的讨论

力学问题是对真实世界的描述, 答案应具有唯一性、可重复性. 我们不妨将例 1 换成例 2.

**例 2** 长为  $2l$  的均质细杆最初直立在粗糙的水平面上, 稍受扰动后, 在重力作用下该杆在铅直平面内绕  $O$  点回转而下, 如图 1 所示. 若杆与平面间的静摩擦因数  $f_s = 0.205$ , 试求: (1) 杆开始在地面上滑动时的角度  $\theta_0$ ; (2)  $\theta \geq \theta_0$  时,  $O$  点将沿哪个方向滑动.

显然, 上述问题与例 1 描述的是同一个事件. 按照例 1 的求解, 自然会得到杆件将在  $\theta_0 = 45^\circ$  时开始滑动, 且杆件的  $O$  点向左滑动.

但如果按照步骤求解,由式(2)和式(3)可得杆开始滑动时,转角 $\theta$ 应满足

$$mg \left( \frac{9}{4} \sin \theta \cos \theta - \frac{3}{2} \sin \theta \right) = 0.205 \times \frac{9}{4} mg \left( \cos \theta - \frac{1}{3} \right)^2 \quad (4)$$

为了求解上述等式,令函数 $h(\theta) = f(\theta)mg = 0$ ,其中

$$f(\theta) = \frac{9}{4} \sin \theta \cos \theta - \frac{3}{2} \sin \theta - 0.205 \times \frac{9}{4} \left( \cos \theta - \frac{1}{3} \right)^2 \quad (5)$$

显然,方程(4)与方程 $f(\theta) = 0$ 同解.函数 $f(\theta)$ 与 $\theta$ 之间的关系如图3所示.

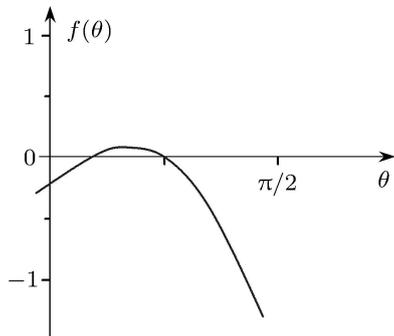


图3

由图3可知,方程(5)在 $0 < \theta < 90^\circ$ 的区间内有两个解.除了一个 $45^\circ$ 的角度之外,还有一个 $\theta_1 = 15.9^\circ$ 的位置.这说明,题目中如果摩擦因数 $f_s = 0.205$ ,则第一个临界位置应该是在 $\theta_1$ 的位置.由图3很明显看到,函数 $f$ 在 $\theta_1$ 至 $45^\circ$ 之间均取正值,而函数 $h(\theta) = f(\theta)mg$ 等于摩擦力与最大静滑动摩擦力的差,这说明在 $\theta_1$ 位置杆件处于滑动的临界位置,并且当 $\theta \in (\theta_1, 45^\circ)$ 时杆件不可能不滑动.也就是说,杆件开始滑动的位置不是 $45^\circ$ 的位置,而是 $\theta_1$ 位置,并且开始滑动后,杆件的 $O$ 点向左滑动.

显然,例1与例2描述的是同一物理过程,却得到不同的答案.问题出在哪里呢?

### 3 对例1本身的讨论

作者认为,问题出在例1本身,即例1本身在设计时出错了.设计者想当然地认为静摩擦因数与杆件开始滑动时的角度之间存在一一对应的关系,而事实上并不是如此.为此,我们引入例3.

**例3** 长为 $2l$ 的均质细杆最初直立在粗糙的水平面上,稍受扰动后,在重力作用下该杆在铅直平面内绕 $O$ 点回转而下,如图1所示.若杆与平面间的静摩擦因数为 $f_s$ ,试求杆转至 $\theta$ 为多少时开始滑动.

由求解例1得到的式(2)和式(3),可得杆开始滑动时的转角 $\theta_0$ 应满足 $F_s = f_s F_N$ .即

$$mg \left( \frac{9}{4} \sin \theta_0 \cos \theta_0 - \frac{3}{2} \sin \theta_0 \right) = f_s \times \frac{9}{4} mg \left( \cos \theta_0 - \frac{1}{3} \right)^2$$

$$f_s = \frac{\sin \theta_0 \cos \theta_0 - \frac{2}{3} \sin \theta_0}{\left( \cos \theta_0 - \frac{1}{3} \right)^2}$$

$f_s$ 与 $\theta$ 之间的关系如图4所示.

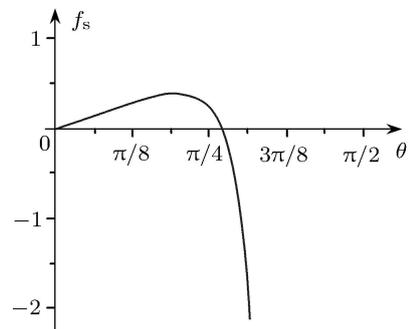


图4

从图4中可以看出,函数曲线在 $[\pi/8, \pi/4]$ 之间,存在一个极值点.经分析可以求得极值点对应的角度为 $\arctan \left( \frac{2}{9} \sqrt{10} \right) = 35.1^\circ$ ,该角度对应的摩擦因数为0.371.而对应于摩擦因数取值为零的角度为 $\arccos \left( \frac{2}{3} \right) = 48.2^\circ$ .所以,对于取正值的摩擦因数,角度位于 $[0, 48.2^\circ]$ 之间,并且在除极值0.371的摩擦因数之外,总有不同的两个角度位置与一个摩擦因数对应.这就是例1产生问题的原因.

### 4 结论

本文对经典的《理论力学解题指导及习题集》中一道考虑摩擦的动力学习题,给出了一般的解题过程.为了说明题目中存在的问题,设计了两个对应的问题.通过讨论分析,指出了其题目本身存在的问题,并给出了产生问题的原因.而这一道习题几十年来一直在习题集以及相关教材中存在,说明这一问题还没有引起大部分教师和学生的注意.考虑摩

擦时的动力学问题, 常常会有如本文中所讨论的非线性和多解性等比较复杂的性质. 教师在命题时, 需要特别注意, 应从多个方面仔细考虑和分析.

**致谢** 本文成稿后与南京航空航天大学王怀磊博士进行过讨论, 王老师给出了很好的建议和鼓励, 对此作者表示衷心感谢.

## 参 考 文 献

- 1 苏振超, 薛艳霞. 论理论力学中摩擦力和摩擦角概念的引入. 力学与实践, 2012, 32(1): 96-99
- 2 苏振超, 薛艳霞, 王怀磊. 理论力学多面摩擦问题的程式化解法. 力学与实践, 2014, 36(1): 87-90
- 3 王铎, 程靳主编, 六院校理论力学教研室合编. 理论力学解题指导及习题集 (第三版). 北京: 高等教育出版社, 2005

(责任编辑: 周冬冬)

# 融入创新性试验的流体力学研究性课程<sup>1)</sup>

白 莉<sup>2)</sup> 刘玉泉 倪玲英 刘成文 赵欣欣

(中国石油大学 (华东) 石油工程学院, 山东青岛 266580)

**摘要** 本科生的创新人才培养模式既应注重专业基础理论的学习, 也要重视对学生创造性思维和实践能力的培养. 结合工科类专业的“流体力学”课程教学, 将由大学生创新创业项目、实验室的开放试验以及教师科研项目组成的创新性试验模块融入其中, 进行了研究性课程的探索和实践. 通过精心设计的开放性问题将基本流体力学理论引入到创新性试验中. 在加强传授基础理论的同时, 也注重培养学生的创造性思维和探索精神.

**关键词** 流体力学, 创新性试验, 研究性课程

**中图分类号:** O35 **文献标识码:** A

**doi:** 10.6052/1000-0879-17-281

流体力学是工科专业的重要技术基础课程之一. 流体力学对推动许多工程技术的发展, 特别是高新技术的发展有重要而深远的影响<sup>[1]</sup>, 国际上著名高校在流体力学教学改革的实践中得出的结论认为: 培养大学生提出问题、然后解决问题的探索精神尤为重要<sup>[2]</sup>. 清华大学等在力学基础课如材料力学、理论力学的教学实践中提出了“教师在教学中研究, 在研究中教学; 学生在学习中研究, 在研究中学习”的研究型教学理念<sup>[3]</sup>, 使学生从知识接受者转变为知识的探究者<sup>[4]</sup>. 为了响应教育部倡导高校进行创

新人才模式的培养, 国内各高校的流体力学教师们也在进行流体力学研究性课程的探索和实践<sup>[5-6]</sup>.

研究性课程区别于一般课程的主要特征是: 教师坚持研究型教学理念, 强调素质教育和创新教育以激发学生的创新精神, 强调理论和实践教学相结合, 坚持课内课外相结合, 以提高学生分析和解决问题的综合能力<sup>[7]</sup>. 以强化培养学生创造性思维和动手实践为基本目标, 我们进行了将创新性试验寓于流体力学研究性课程的一系列探索和实践. 依据流体力学基本理论去指导学生设计和完成一些创新创业训练项目, 比如海洋石油开发发生井喷溢油事故的模型试验观测与仿真<sup>[8]</sup>. 本次的流体力学研究性课程探索实践, 将课程教学的基本思路确定为: 按照学生的不同专业背景, 因材施教, 分层次、模块化地完成理论知识的传授; 同时在课堂上引入一些与流体力学有关的自然或工程现象, 引导学生提出问题, 然后探究这些现象背后的流体力学原理. 学生利用课内的理论知识, 结合课外的试验探索和实践, 将创新性试验模块与流体力学研究性课程教学进行有机结合, 以达到培养学生创新意识和探索精神的目的.

2017-08-09 收到第 1 稿, 2017-11-02 收到修改稿.

1) 中国石油大学 (华东) 研究性课程改革项目 (YK201503) 和国家自然科学基金 (11502305) 资助项目.

2) 白莉, 副教授, 主要研究方向为环境流体力学、海洋油气流动保障. E-mail: baili@upc.edu.cn

**引用格式:** 白莉, 刘玉泉, 倪玲英等. 融入创新性试验的流体力学研究性课程. 力学与实践, 2018, 40(1): 89-92

Bai Li, Liu Yuquan, Ni Lingying, et al. Integrating innovative experiments into fluid mechanics research-based course. *Mechanics in Engineering*, 2018, 40(1): 89-92