

# 书页搭接之摩擦力研究

卫梦希<sup>1)</sup> 黎立云<sup>2)</sup> 王博楠 王园园 王 雪 张小峰

(中国矿业大学(北京)力学与建筑工程学院力学系, 北京 100083)

**摘要** 将两本书以一页搭一页的方式联接在一起, 然后向水平方向两侧拉伸, 纸张间会产生机理复杂的摩擦力, 摩擦力的总和可以使搭接结构的极限拉力达到很大. 本文在不同搭接长度及不同搭接页数的条件下, 对极限拉力进行了实测, 得到了搭接长度与搭接页数对极限拉力的影响关系. 对摩擦力产生机理进行了分析, 给出了理论模型的公式, 并通过 MATLAB 对相关系数进行了与实测数据的最小二乘法拟合, 得到了半理论半经验的摩擦力计算公式. 计算公式可以为这种特殊联接工艺的最大承载拉力计算提供参考.

**关键词** 相互搭接的书, 摩擦力, 摩擦二项式定律, 最小二乘拟合

中图分类号: O313.5 文献标识码: A doi: 10.6052/1000-0879-17-140

## FRICITION MECHANISMS OF OVERLAPPED SHEETS OF TWO BOOKS UNDER HORIZONTAL UNIAXIAL TENSION

WEI Mengxi<sup>1)</sup> LI Liyun<sup>2)</sup> WANG Bonan WANG Yuanyuan WANG Xue ZHANG Xiaofeng

(School of Mechanics and Civil Engineering, China University of Mining and Technology (Beijing), Beijing 100083, China)

**Abstract** Combining two books by overlapping alternately their sheets, the integrated structure generates a great friction between the paper sheets when both spines are under horizontal tensile force. The correlation between the length of overlapping and the number of sheets of overlapping is obtained by experiments. A semi-theoretical and semi-empirical friction calculation formula is obtained by the MATLAB numerical simulation and the predictions are in good agreement with the experimental data. The formula could provide a reasonable and reliable prediction of the ultimate bearing capacity for the integrated structure.

**Key words** overlapped book sheets, friction, binomial law of friction, least square fitting

将两本书一页一页地搭接在一起, 在水平拉力作用下, 纸张间会产生摩擦力. 文献 [1] 采用实验的方法对纸张间的摩擦力进行了探究, 得出搭接长度及搭接页数是影响纸张间摩擦力的主要因素. 另外, 在中央电视台 2016 年的一期《加油向未来》的电视节目中, 实验人员采用上述的方式将两本黄页电话簿搭接在一起, 在两辆卡车的牵引下, 测得最大牵引力相当于 7.25 吨, 如图 1. 上述两个实验的结果

都表明, 在不借助任何外力以及粘结剂的情况下, 搭接粗糙柔软结实的书页便能够产生很大的摩擦力, 也许可以将这种现象应用于某些工程实际, 作为一种特殊的联接工艺. 本文在文献 [1] 的基础上, 进一步实测了总摩擦力随搭接长度与搭接页数的变化规律, 并对摩擦力的产生机理作了定量的分析.

通过单一的库仑摩擦定律对实测数据进行了综合分析, 发现与实测数据吻合得不太理想. 通过参阅

2017-05-02 收到第 1 稿, 2017-06-12 收到修改稿.

1) E-mail: 13681411932@163.com

2) 黎立云, 教授, 主要从事断裂与强度力学研究. E-mail: lly@cumtb.edu.cn

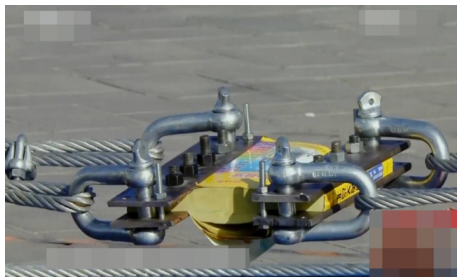
**引用格式:** 卫梦希, 黎立云, 王博楠等. 书页搭接之摩擦力研究. 力学与实践, 2017, 39(6): 597-601

Wei Mengxi, Li Liyun, Wang Bonan, et al. Friction mechanisms of overlapped sheets of two books under horizontal uniaxial tension. *Mechanics in Engineering*, 2017, 39(6): 597-601

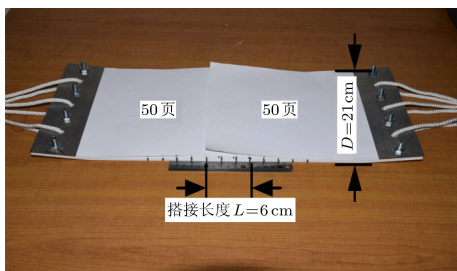
大量文献资料<sup>[2-10]</sup>,看到了专家们对摩擦机理的一些更为广泛的分析,他们认为摩擦力的产生不仅仅是由于经典的库仑摩擦定律中所提到的物体表面间的凹凸机械啮合摩擦力,同时分子间的吸引力也是摩擦力的一个重要组成部分.因而本文采用苏联学者克拉盖尔斯基(Кралельский)的分子机械理论,即摩擦二项式定律,将“凹凸机械啮合”产生的摩擦力与“分子间吸引力”有机结合起来,应用于纸张间摩擦机理的分析,给出了与实测结果比较吻合的力学模型,通过MATLAB软件对模型中的参数进行了最小二乘法拟合,得到了半理论半经验的摩擦力计算公式.计算公式可以为这种特殊联接工艺的最大承载拉力计算提供参考.

## 1 纸张间的摩擦力实验测试

沿普通A4纸的宽度方向将其装订成册进行实验(单本装订册的页数分别为20页,30页,40页,50页).实验过程中(如图1(b)),将页数相同的两个装订册按一定的搭接长度(搭接长度 $L$ 分为2cm,4cm,6cm,8cm,10cm)以一页搭一页的方式搭接在一起,水平放置在桌面上,然后用量程500N的弹簧测力计以平行于纸张方向的力缓慢向两侧拉伸,直至该搭接结构破坏为止,记下每次实验中的最大摩擦力数值,对于每组实验均做5次,取平均值,以减



(a) “加油向未来”电视节目中受拉的两本黄页书



(b) 本文的书页搭接情况

图 1

小误差.

表1是在不同搭接长度与不同搭接页数下的纸张间总摩擦力实验值.当纸张的搭接长度一定时,随着搭接页数的增加,摩擦力呈现急速增长的趋势.在搭接过程中,固定住A4纸的宽度方向,沿其长度方向搭接.

表 1 本文的总摩擦力实测结果(页宽度  $D = 21$  cm)

搭接长度 $L/\text{cm}$	不同搭接页数摩擦力 $F/\text{N}$			
	40 页	60 页	80 页	100 页
2	7	18	30	56
4	8	20	37	67
6	10	23	42	81
8	11	26	54	102
10	14	33	75	133

本实验并未采用搭接面积作为实验变量,主要是考虑到沿不同的搭接方向而保证搭接面积相同时,其拉力实测结果有很大差异.本文是就沿A4纸长度方向搭接的联接结构作分析的.

需要特别说明的是对于搭接长度、搭接页数更大的情况,没有实测数据,因为总的拉动力超出了人力可及的范围,需要平卧拉力机才能进行实验.作者曾试图进行垂直方向的拉伸实验,想使用常规的纵向拉力机进行实验,但因垂直拉伸极大地减弱了页面重力的作用,使得页面之间的联结变得松散,实验过程不好操控,最后放弃了这种实验方案.

表2是文献[1]的水平拉伸实验结果,实验方案与本文相同,只是A4纸张品牌不同,实验环境(温度、湿度、大气压)不同,导致页面间的物理参数稍有不同,在此一并进行分析.

表 2 文献 [1] 的总摩擦力实测结果(页宽度  $D = 21$  cm)

搭接长度 $L/\text{cm}$	搭接页数摩擦力 $F/\text{N}$			
	40 页	60 页	80 页	100 页
2	—	—	22	31
4	—	10	23	36
6	—	10	24	36
8	3	13	24	45
10	5	16	26	54
12	8	16	32	68
14	9	21	35	69
16	12	23	40	93
18	15	31	46	—
20	17	35	50	—

## 2 摩擦力的机理分析与 MATLAB 数值拟合

### 2.1 摩擦力的机理分析与模型的建立

通过参阅大量的摩擦学文献<sup>[2-10]</sup>, 作者想建立起纸张间摩擦力的基本力学模型, 然后结合实验结果, 运用 MATLAB 软件拟合得到摩擦力计算公式的基本参数。

近现代以来, 摩擦学理论有了很大的发展, 作者对一部分摩擦学理论进行了梳理, 形成了本文的理论框架, 以适用纸张间摩擦力的特殊性。根据机械啮合理论, 摩擦力主要是由表面的凹凸形状所造成的, 当两个表面接触时, 其凹凸部分互相啮合而形成摩擦, 即机械啮合摩擦力<sup>[2-3]</sup>。经典的库仑摩擦定律为

$$F_{\text{机械}} = \mu F_N \quad (1)$$

其中  $F_{\text{机械}}$  为机械啮合摩擦力,  $\mu$  为由机械啮合摩擦力所决定的摩擦系数,  $F_N$  为正压力。

对于本文的纸张间的摩擦力实验, 总摩擦力的大小是页面间摩擦力“叠加”的结果。由于页面重力的影响, 自上而下, 两张纸间的正压力  $F_N$  是逐步增加的, 所以页面间的摩擦力也是逐步增加的, 需要推导出总摩擦力随搭接长度变化及页数变化的计算公式。首先以搭接页数为 4 页的结构为例, 来计算总摩擦力大小, 如图 2 所示, 然后可推广到计算  $M$  (每本装订册为  $M/2$  页) 个页面之间的总摩擦力。其中  $A_0 = L \times D$  为沿 A4 纸长度方向搭接时, 两张相互摩擦的纸张之间的接触面积。

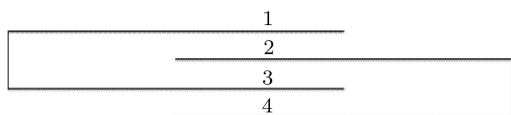


图 2 搭接页数  $M = 4$  时总摩擦力计算示意图

由于纸张的柔软性, 图 2 中 4 个页面实际上是贴在一起的。设  $\rho = 0.08 \text{ kg/m}^2$  为纸张的面密度,  $g$  为重力加速度, 则第 1, 2 两页纸间的摩擦力为  $F_{12} = \mu\rho g A_0$ , 第 2, 3 页之间的摩擦力为  $F_{23} = 2\mu\rho g A_0$ , 第 3, 4 页之间的摩擦力为  $F_{34} = 3\mu\rho g A_0$ , 因此, 机械摩擦力

$$F_{\text{机械}} = F_{12} + F_{23} + F_{34} = \sum_{2}^{4} F_{(M-1)M} = 6\mu\rho g A_0 \quad (2)$$

因而可推出, 当搭接页数为  $M$  时, 总的机械啮合摩擦力为

$$F_{\text{机械}} = \sum (F_{12} + F_{23} + \cdots + \sum F_{(M-1)M}) = (1 + 2 + 3 + \cdots + M - 1)\mu\rho g A_0$$

即

$$F_{\text{机械}} = \mu \frac{M(M-1)}{2} \rho g A_0 \quad (3)$$

从式 (3) 可以看到, 表达式中只有一个未知系数  $\mu$ , 通过用本文及文献 [1] 中的实测结果对式 (3) 用最小二乘法拟合, 得到的摩擦系数  $\mu$  大于 1, 大量的文献资料表明, 机械啮合摩擦力系数  $\mu$  的范围应该在 0 至 1 之间。这表明, 基于库仑摩擦定律来分析纸页之间的摩擦力应该是不尽全面的, 需要找到一种更为合理而又全面的摩擦理论来解释纸张间的摩擦力的产生机理, 这就需要摩擦二项式定律<sup>[4-6]</sup>

$$F = F_{\text{机械}} + F_{\text{分子}} = \mu F_N + \alpha A \quad (4)$$

式中  $F_{\text{分子}}$  为分子间吸引力,  $\alpha$  是由分子间吸引力所决定的系数,  $A$  为物体相互摩擦作用的总面积。

在实验中发现, 随着拉力的增加, 纸张间的相互吸附现象趋于明显, 尤其随着搭接页数的增加, 页面吸附更为紧密, 摩擦力增长更为迅速。由此, 作者认为应该将式 (4) 中分子间吸引力的影响考虑进来, 才能使得计算模型更为合理。

为了将表 1 中摩擦力随搭接页数的增加而呈现出的急速增长趋势表达出来, 在考虑分子间吸引力的基础上, 本文将分子间吸引力的表达式重新定义为

$$F_{\text{分子}} = \alpha A_0 (M-1)^\beta \quad (5)$$

$(M-1)$  为总的相互接触面的  $\beta$  次幂, 以此体现摩擦力随搭接页数的增加而呈现出的快速指数式增长趋势。再结合库仑摩擦定律, 将总的摩擦力  $F$  定义为

$$F = F_{\text{机械}} + F_{\text{分子}} = \mu \frac{M(M-1)}{2} \rho g A_0 + \alpha A_0 (M-1)^\beta \quad (6)$$

### 2.2 MATLAB 数值拟合结果分析

再次应用 MATLAB 对机械啮合摩擦力所决定的系数  $\mu$  和分子间吸引力所决定的系数  $\alpha, \beta$  进行最小二乘法拟合, 结果如下。

### 2.2.1 本文实验的数值拟合结果

$$F = 0.62 \frac{M(M-1)}{2} \rho g L D + 0.0042 LD(M-1)^3 \quad (7)$$

其中系数  $\mu$  约为 0.62, 与机械啮合摩擦系数的取值范围相符. 系数  $\alpha$  和  $\beta$  分别约为 0.0042 和 3. 以下是实验结果与 MATLAB 拟合结果的对比分析.

图 3 中的散点图是本文实测的总摩擦力  $F$  随搭接长度  $L$  的变化情况; 实线是半理论半经验公式 (7) 的拟合曲线. 由图 3 可看出, 除  $L$  很小时误差稍大外, 总摩擦力  $F$  与搭接长度  $L$  基本呈线性关系.

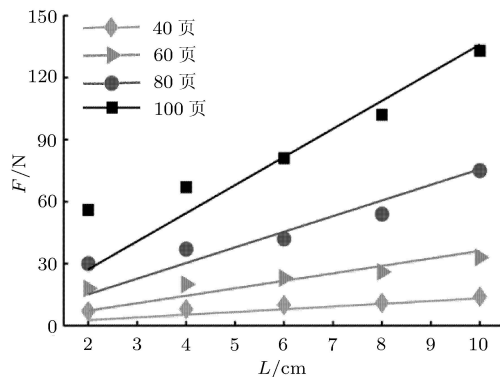


图 3 摩擦力  $F$  随搭接长度  $L$  的变化趋势

图 4 的散点图是本文实测的总摩擦力  $F$  随搭接页数  $M$  的变化情况; 实线是半理论半经验公式 (7) 的拟合曲线. 由图 4 可看出, 总摩擦力  $F$  与搭接页数  $M$  呈快速增长的非线性关系. 实测值与模拟计算式 (7) 吻合很好.

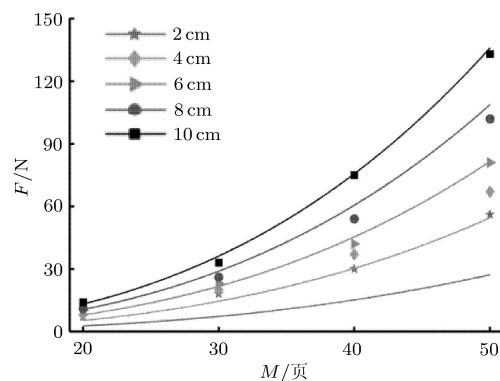


图 4 摩擦力  $F$  随搭接页数  $M$  的变化趋势

图 5 表示的是摩擦力  $F$  随搭接长度  $L$  及搭接页数  $M$  变化的三维拟合图像. 散点图是实验值, 光滑曲面是由式 (7) 所绘的半理论半经验拟合曲面.

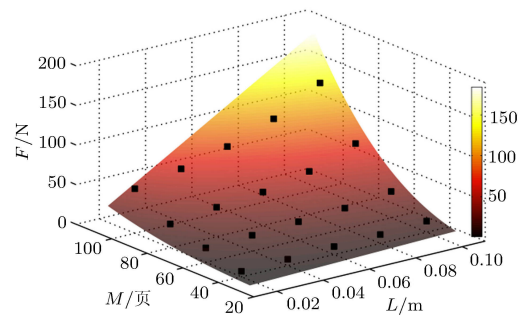


图 5 摩擦力  $F$  随搭接长度  $L$  与搭接页数  $M$  的变化趋势

### 2.2.2 文献 [1] 实验数据的拟合结果

将本文的摩擦力计算模型应用于文献 [1] 中的实验数据, 得到如下的结果

$$F = 0.28 \frac{M(M-1)}{2} \rho g L D + 0.0017 LD(M-1)^3 \quad (8)$$

其中机械啮合摩擦力所决定的系数  $\mu$  约为 0.28, 与机械啮合摩擦系数的取值范围相符合, 分子间吸引力所决定的系数  $\alpha$  和  $\beta$  分别约为 0.0017 和 3. 图 6 ~ 图 8 是表 2 实验结果与式 (8) 的拟合结果的对比.

从图 6 可看出, 在搭接长度  $L$  很小时, 实测数据与式 (8) 有较大偏差, 当搭接长度比较大时, 总摩擦力  $F$  与搭接长度  $L$  基本呈线性关系.

从图 7 可看出, 总摩擦力  $F$  与搭接页数  $M$  呈快速增长的非线性关系. 实测值与模拟计算式 (8) 吻合得很好. 图 8 表示的是文献 [1] 的摩擦力  $F$  随搭接长度  $L$  及搭接页数  $M$  变化的三维拟合图像. 散点图是实验值, 光滑曲面是由式 (8) 所示的拟合曲面.

式 (7) 与式 (8) 所拟合的两种实验, 即使实验方式完全相同, 由于纸张品牌不同, 实验环境 (温度、

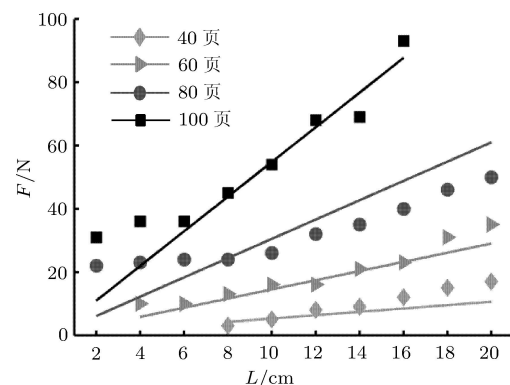


图 6 总摩擦力  $F$  随搭接长度  $L$  的变化趋势

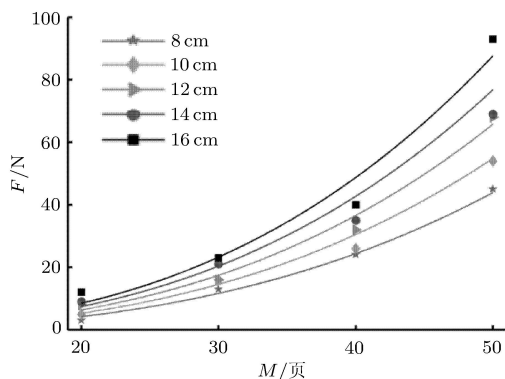


图 7 摩擦力  $F$  随搭接页数  $M$  的变化趋势

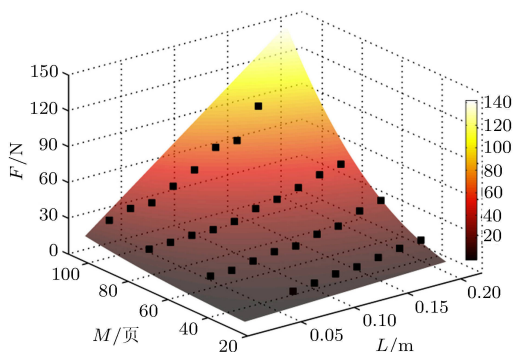


图 8 摩擦力  $F$  随搭接长度  $L$  与搭接页数  $M$  的变化趋势

湿度、气压) 不同, 系数  $\mu, \alpha$  稍有差别, 这是正常的结果. 如果沿 A4 纸的宽度方向搭接, 其页面接触紧密程度与沿长度方向搭接有很大不同, 即使两种方式的搭接面积相同, 也会由于  $\mu, \alpha, \beta$  的拟合值不同导致总的拉动力不同.

### 2.2.3 摩擦力模型的应用

针对文中引言部分提及的电视节目两本黄页电话簿搭接在一起的实验, 作者尝试采用摩擦力计算式 (6) 进行估算. 对于机械啮合摩擦力所决定的摩擦系数  $\mu$ 、分子间吸引力所决定的系数  $\alpha$  以及系数  $\beta$  的取值由文献 [1] 中实验与本文实验的 MATLAB 数值拟合结果的算术平均值给出. 取式 (6) 的系数  $\mu = 0.45, \alpha = 0.00295, \beta = 3$ , 那么

$$F = 0.45 \frac{M(M-1)}{2} \rho g L D + 0.00295 L D (M-1)^3 \quad (9)$$

取黄页电话簿的纸张密度为普通 A4 纸的密度, 即  $\rho = 0.08 \text{ kg/m}^2$ ; 页宽度取 A4 纸的长度方向,  $D = 30 \text{ cm}$ ; 搭接长度取 A4 纸宽度方向的一半,  $L = 10 \text{ cm}$ . 由于不能得到黄页电话簿的详细搭接页数, 在此, 将搭接页数作为变量区间处理, 得到摩擦力  $F$  计算值列于表 3.

由表 3 可以得出, 当搭接页数由 600 页 (每本 300 页) 增加至 1000 页 (每本 500 页) 时, 摩擦力由 20 kN (约 2 吨) 增加至 90 kN (约 9 吨), 与电视节目中的最大牵引力 72 500 N (约 7.25 吨) 处于同一数量级, 可见模型式 (6) 计算值与实测值有很好的一致性.

表 3 摩擦力随搭接页数变化的模型计算值

搭接页数 $M$	600	700	800	900	1000
摩擦力 $F/\text{N}$	20 923	32 815	48 525	68 583	93 521

## 3 结论

(1) 本文通过大量的实验测得了在不同搭接长度与不同搭接页数下, 两本书 (A4 纸装订本) 搭接在一起时的总摩擦力.

(2) 实验数据表明: 总摩擦力  $F$  随着搭接长度  $L$  的增大而线性增大; 随着搭接页数  $M$  的增大快速增大, 呈现指数式增大的趋势.

(3) 利用两套实验结果, 结合 MATLAB 软件的拟合, 给出了两个半理论半经验的总摩擦力计算公式. 并利用模型公式对电视节目中的摩擦力实验结果做出了理论计算, 与现场实验结果有很好的吻合度. 利用这些公式, 也可以对其他书页搭接情况做出分析和估算, 可为这种特殊联接工艺的设计作出计算参考.

**致谢** 感谢杨嘉陵教授、周宏伟教授对本工作的肯定和启发, 感谢刘兵权、刘小珍、史久畅、朱天赐、李坤其、王之东对本文工作的帮助.

## 参 考 文 献

- 蒋昱行, 成果, 廖威等. 两本相互交叠的书之间摩擦力的实验测试. 北京力学学会第 19 届学术年会, 北京, 2013
- 温诗铸, 黄平. 摩擦学原理 (第 4 版). 北京: 清华大学出版社, 2012
- 张嗣伟. 基础摩擦学. 东营: 中国石油大学出版社, 2000
- 崔海霞, 陈建敏, 周慧娣. 奇妙的摩擦世界. 北京: 科学出版社, 2010
- 余俊, 徐真, 赵冬初等. 摩擦学. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1984
- 黄平, 孟永钢, 徐华. 摩擦学教程. 北京: 高等教育出版社, 2008
- 刘正林. 摩擦学原理. 北京: 高等教育出版社, 2009
- 温诗铸. 纳米摩擦学. 北京: 清华大学出版社, 1998
- Bhushan B. 摩擦学导论. 葛世荣译. 北京: 机械工业出版社, 2006
- 葛世荣, 朱华. 摩擦学的分形. 北京: 机械工业出版社, 2005

(责任编辑: 胡 漫)