



动力学普遍定理对非完整动力学的应用¹⁾

——分析力学札记之二十九

梅凤翔²⁾

(北京理工大学力学系, 北京 100081)

摘要 研究非完整动力学问题, 可用理论力学方法或分析力学方法. 理论力学方法用动力学普遍定理建立运动方程; 分析力学方法用非完整动力学的各类方程来列写系统的运动方程. 动力学普遍定理, 特别是动量矩定理可以用于定点、质心或动点. 有时对动点的动量矩定理比对定点的或质心的要简单得多.

关键词 动量定理, 动量矩定理, 非完整力学

中图分类号: O31 **文献标识码:** A

doi: 10.6052/1000-0879-16-303

1 研究非完整动力学的两种方法

研究非完整动力学有两种方法, 一种是利用动力学普遍定理, 特别是动量定理和动量矩定理. 另一种是用非完整力学的微分方程, 如 Routh 方程, Chaplygin 方程, Volterra 方程, Maggi 方程, Voronetz 方程, Appell 方程, Boltzmann-Hamel 方程, Mac-Millan 方程等^[1]. 前一方法可称为理论力学方法, 后一方法可称为分析力学方法. 有趣的是, Chaplygin 在导出了他的方程之后, 并没有用他的方程, 而是用动量定理和动量矩定理研究了 Lindelöf 问题^[2]. 两种方法各有优势. 理论力学方法的优点在于直观, 缺点在于方程中会出现约束力, 而后尚需消去约束力. 分析力学方法的优点在于其普遍性并消去了理想约束力, 缺点在于计算比较复杂.

2 动力学普遍定理

质点系的动量定理写成形式

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_R \quad (1)$$

其中 \mathbf{P} 为质点系的动量

$$\mathbf{P} = \sum m_i \mathbf{v}_i = m \mathbf{v}_C \quad (2)$$

这里 \mathbf{v}_C 为质心 C 的速度, m 为系统的质量, 而 \mathbf{F}_R 为所有外力的主矢, 其中包括主动力和约束力.

质点系对质心的动量矩定理表示为

$$\frac{d\mathbf{L}_C}{dt} = \mathbf{M}_C^{(e)} \quad (3)$$

其中 $\mathbf{M}_C^{(e)}$ 为外力系对质心的主矩. 在解理论力学问题时, 通常用动力学普遍定理 (1) 和定理 (3).

质点系对动点 A 的动量矩定理表示为^[3]

$$\frac{d\mathbf{L}_A}{dt} = \mathbf{M}_A^{(e)} + m \mathbf{v}_C \times \mathbf{v}_A \quad (4)$$

其中 $\mathbf{M}_A^{(e)}$ 为外力对点 A 的主矩, \mathbf{v}_A 为动点 A 的速度. 由相对导数和绝对导数的关系, 有

$$\frac{d\mathbf{L}_A}{dt} = \frac{\tilde{d}\mathbf{L}_A}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}_A \quad (5)$$

其中 $\boldsymbol{\Omega}$ 为动系的角速度. 于是, 式 (4) 可写成形式

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{L}_A}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}_A = \mathbf{M}_A^{(e)} + m \mathbf{v}_C \times \mathbf{v}_A \quad (6)$$

质点系的动能定理表示为

$$T - T_0 = \sum W \quad (7)$$

其中 $\sum W$ 为所有力的功, 包括主动力和约束力的功. 如果力是有势的, 则有能量积分 (机械能定理)

$$T + V = h \quad (8)$$

本文于 2016-09-20 收到.

1) 国家自然科学基金资助项目 (11272050, 11572034).

2) 梅凤翔, 教授. E-mail: meifx@bit.edu.cn

引用格式: 梅凤翔. 动力学普遍定理对非完整动力学的应用 —— 分析力学札记之二十九. 力学与实践, 2017, 39(3): 286-290

Mei Fengxiang. Application of general theorems of dynamics to nonholonomic dynamics. *Mechanics in Engineering*, 2017, 39(3): 286-290

3 动力学普遍定理的应用

用动力学普遍定理可建立非完整动力学方程，其中对动点的动量矩定理 (6)，有时比对质心的动量矩定理 (3) 更为方便. 对刚体滚动问题，如滚球、滚盘等，动点可选在刚体与平面的接触点上. 对雪橇等不允许横滑问题，动点可选在不允许横滑的点上. 记得 20 世纪 80 年代与理论力学界前辈吕茂烈先生讨论非完整力学时，他曾经说过用动力学普遍定理也是一个好的方法.

例 1 研究一半径为 a 的均质圆球在与水平面成 α 角的粗糙斜面上的滚动. 取动系 $Ax'y'z'$ ，如图 1 所示.

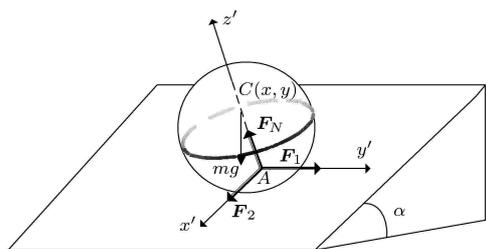


图 1

图中点 A 为球与斜面的接触点，轴 Ay' 始终水平. 因为有 v_A/v_C ，式 (4) 变成

$$\frac{dL_A}{dt} = M_A^{(e)} \quad (9)$$

而

$$M_A^{(e)} = mga \sin \alpha j'$$

$$L_A = \frac{7}{5}ma^2\omega_1 i' + \frac{7}{5}ma^2\omega_2 j' + \frac{2}{5}ma^2\omega_3 k'$$

其中 i', j', k' 为 Ox', Oy', Oz' 方向单位矢量. 于是有

$$\left. \begin{aligned} \frac{7}{5}ma^2\dot{\omega}_1 &= 0 \\ \frac{7}{5}ma^2\dot{\omega}_2 &= mga \sin \alpha \\ \frac{2}{5}ma^2\dot{\omega}_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

因此得到两个积分

$$\omega_1 = n_1, \quad \omega_3 = n_3$$

约束力 F_1, F_2, F_N 不作功，做功的力仅有重力，因此有能量积分

$$\frac{1}{2} \left(\frac{7}{5}ma^2n_1^2 + \frac{7}{5}ma^2\omega_2^2 + \frac{2}{5}ma^2n_3^2 \right) - mgx \sin \alpha = h \quad (11)$$

其中 x 为球心坐标. 表示滚动的条件为

$$\dot{x} - a\omega_2 = 0, \quad \dot{y} + a\omega_1 = 0$$

第 2 个方程可积分，得

$$y = y_0 - an_1 t$$

将第 1 个方程代入能量积分，得

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = cx + b$$

其中

$$c = \frac{10}{7}g \sin \alpha, \quad b = \frac{10}{7} \frac{h}{m} - \left(n_1^2 + \frac{2}{7}n_3^2 \right) a^2$$

积分得

$$x = \frac{1}{4}ct^2 - \frac{b}{c}$$

由 x, y 知，球与斜面接触点按抛物线运动.

回忆起 1959 年在北京大学上学时，有一理论力学的“打擂台”题目，就是这样的，当时很少同学能给出解答.

文献 [1] 用准坐标系下的 Chaplygin 方程建立了系统的运动微分方程，其过程是复杂的，因为需引进 Euler 角、准速度，计算非完整特性项等.

例 2 水平面上的滚盘

研究一半径为 a 、质量为 m 的均质圆盘在完全粗糙水平面上的滚动. 圆盘的运动可用质心 C 的运动和相对质心 C 的转动来描述，也可用圆盘与平面接触点 A 的运动来描述.

在点 A 处取正交动系 $Ax'y'z'$ ，如图 2 所示.

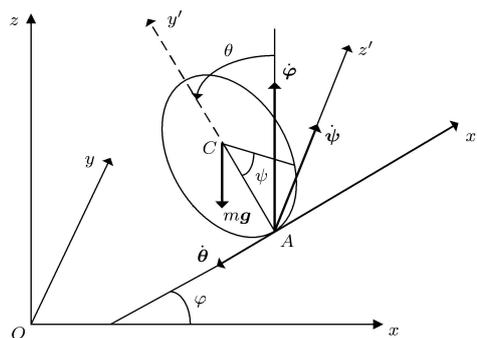


图 2

图中 Ax' 沿盘缘切线, Ay' 沿 AC , Az' 垂直于圆盘平面. 取角 φ, θ, ψ , 其中 φ 为 Ax' 与固定轴 Ox 的夹角, 因此 $\dot{\varphi}$ 铅垂向上; θ 为过 A 的铅垂线与轴 Ay' 的夹角, 因此, $\dot{\theta}$ 沿 Ax' 负向; ψ 为圆盘半径 CA 从 A 到盘上固定点走过的角, 因此, $\dot{\psi}$ 垂直于圆盘平面, 在轴 Az' 方向. 动系 $Ax'y'z'$ 的角速度由 $\dot{\theta}, \dot{\varphi}$ 确定, 圆盘的角速度除 $\dot{\theta}, \dot{\varphi}$ 外, 还有 $\dot{\psi}$. 令 i', j', k' 为动系沿三轴的单位矢量, 动系角速度在动轴上为

$$\Omega = -\dot{\theta}i' + \dot{\varphi} \cos \theta j' + \dot{\psi} \sin \theta k'$$

圆盘的角速度为

$$\omega = \Omega + \dot{\psi}k'$$

这表明圆盘的角速度比动系的角速度多出 $\dot{\psi}k'$. 质心 C 的速度为

$$v_C = \omega \times aj'$$

令 p, q, r 为圆盘角速度在动系上的投影, 有

$$p = -\dot{\theta}$$

$$q = \dot{\varphi} \cos \theta$$

$$r = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \sin \theta$$

则有

$$v_C = a(pk' - ri')$$

点 A 的速度为

$$v_A = -\dot{\psi}ai'$$

圆盘对动点 A 的动量矩为

$$L_A = (A + ma^2)pi' + Aqj' + (C + ma^2)rk' \quad (12)$$

其中 A, C 为圆盘惯性矩. 因此, 相对导数为

$$\frac{dL_A}{dt} = (A + ma^2)pi' + Aqj' + (C + ma^2)rk'$$

所有力对点 A 的矩为

$$M_A^{(e)} = -mga \sin \theta i'$$

将对动点 A 的动量矩定理

$$\frac{dL_A}{dt} + \Omega \times L_A + v_A \times mv_C = M_A^{(e)} \quad (13)$$

投影到动系三轴上, 得到如下 3 个方程^[4]

$$\left. \begin{aligned} -(A + ma^2)\ddot{\theta} - Aq^2 \tan \theta + (C + ma^2)qr &= -mga \sin \theta \\ A\dot{q} - Aq\dot{\theta} \tan \theta + Cr\dot{\theta} &= 0 \\ (C + ma^2)\dot{r} + ma^2q\dot{\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

点 A 的速度在定系 $Oxyz$ 上的投影为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} = v_A \cdot i &= -\dot{\psi}a \cos \varphi \\ \dot{y} = v_A \cdot j &= -\dot{\psi}a \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

以及

$$\dot{\varphi} \cos \theta = q, \quad \dot{\psi} = r - q \tan \theta \quad (16)$$

如果 $\theta = \theta_0 \neq 0$, 则 $\dot{\theta} = 0, \dot{r} = \dot{q} = 0$, 有 $r = r_0, q = q_0, \dot{\varphi} = \frac{q_0}{\cos \theta_0}$

积分得

$$\varphi = \frac{q_0}{\cos \theta_0} t \quad (17)$$

而

$$\dot{x} = -(r_0 - q_0 \tan \theta_0) a \cos \left(\frac{q_0}{\cos \theta_0} t \right)$$

$$\dot{y} = -(r_0 - q_0 \tan \theta_0) a \sin \left(\frac{q_0}{\cos \theta_0} t \right)$$

积分得

$$\left. \begin{aligned} x &= \left(\sin \theta_0 - \frac{r_0}{q_0} \cos \theta_0 \right) \sin \left(\frac{q_0}{\cos \theta_0} t \right) + x_0 \\ y &= - \left(\sin \theta_0 - \frac{r_0}{q_0} \cos \theta_0 \right) \cos \left(\frac{q_0}{\cos \theta_0} t \right) + y_0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

这表明圆盘的支点在水平面上以常角速度 $\frac{q_0}{\cos \theta_0}$ 描出一圆周. 文献 [1] 用在质心的动系研究了这一问题. 若用分析力学方法, 过程会复杂些.

例 3 Chaplygin 雪橇问题

一刚体可沿平面 Oxy 运动, 有 3 个支点, 其中两个可无摩擦地自由滑动, 第 3 个支点是固连于刚体上的刀轮 A , 使刚体不能横滑. 取固连在刚体上的动轴系 $Ax'y'z'$, 如图 3 所示.

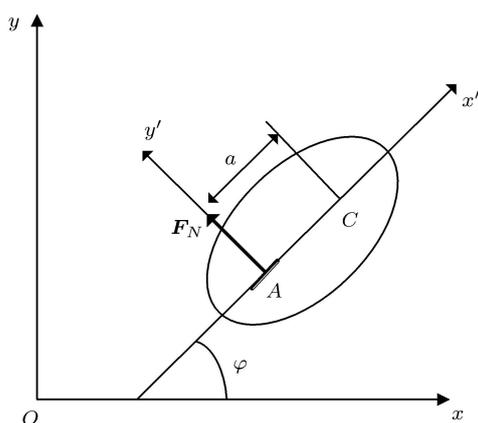


图 3

图中 Ax' 沿刀片方向, Ay' 与其垂直. 动系 $Ax'y'z'$ 由点 A 的坐标 (x, y) 以及轴 Ox 与 Ox' 的夹角 φ 来确定. 令 (u, v) 为点 A 在动轴 Ax', Ay' 的速度分量, 即

$$\mathbf{v}_A = u\mathbf{i}' + v\mathbf{j}'$$

其中 \mathbf{i}', \mathbf{j}' 为轴 Ax', Ay' 的单位矢量. A 的加速度为

$$\frac{d\mathbf{v}_A}{dt} = \frac{\tilde{d}\mathbf{v}_A}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_A$$

其中

$$\boldsymbol{\Omega} = \omega \mathbf{k}'$$

这里 ω 为刚体的角速度, 于是

$$\frac{d\mathbf{v}_A}{dt} = \dot{u}\mathbf{i}' + \dot{v}\mathbf{j}' + \omega u\mathbf{j}' - \omega v\mathbf{i}'$$

而质心 C 的速度为

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AC}$$

加速度为

$$\frac{d\mathbf{v}_C}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \overrightarrow{AC} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AC})$$

即

$$\frac{d\mathbf{v}_C}{dt} = (u - \omega v)\mathbf{i}' + (\dot{v} + \omega u)\mathbf{j}' + \dot{\omega}a\mathbf{j}' - \omega^2 a\mathbf{i}'$$

质心运动定理给出

$$m(\dot{u} - \omega v - \omega^2 a) = 0$$

$$m(\dot{v} + \omega u + \dot{\omega}a) = F_N$$

注意到 A 处不能横滑, 有

$$v = 0$$

于是有

$$\left. \begin{aligned} m(\dot{u} - \omega^2 a) &= 0 \\ m(\omega u + \dot{\omega}a) &= F_N \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

相对质心的动量矩定理给出

$$J_C \dot{\omega} = -F_N a \quad (20)$$

消去约束力 F_N , 得到

$$\left. \begin{aligned} \dot{u} &= \omega^2 a \\ k^2 a \frac{\dot{\omega}}{\omega} + u &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

其中

$$k^2 = 1 + \frac{J_C}{ma^2}$$

消去 u , 得到

$$k^2 a \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\omega}}{\omega} \right) = -\omega^2 a$$

积分得

$$k^2 \left(\frac{\dot{\omega}}{\omega} \right)^2 = k^2 C^2 - \omega^2 \quad (22)$$

其中 C 为任意常数. 引进新变量 ψ

$$\omega = kC \cos \psi \quad (-\pi/2 < \psi < \pi/2) \quad (23)$$

则有

$$\dot{\psi}^2 = C^2 \cos^2 \psi$$

即

$$\dot{\psi} = C \cos \psi \quad (24)$$

积分得

$$Ct = \int_0^\psi \frac{d\alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sin \psi}{1 + \sin \psi}$$

由此解得

$$\sin \psi = \frac{e^{Ct} - e^{-Ct}}{e^{Ct} + e^{-Ct}} = \text{th} Ct$$

$$\cos \psi = \frac{2}{e^{Ct} - e^{-Ct}} = \text{arcch} Ct$$

进而可求得 ω, u ^[4].

为解决这个问题, 动系原点亦可选在质心 C 上. 令 $v_{Cx'}, v_{Cy'}$ 为质心速度在动系上的投影. 质心运动定理给出

$$\left. \begin{aligned} m(\dot{v}_{Cx'} - \omega v_{Cy'}) &= 0 \\ m(\dot{v}_{Cy'} + \omega v_{Cx'}) &= F_N \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

其中

$$v_{Cx'} = u$$

$$v_{Cy'} = \omega a$$

亦可得到方程 (19).

为解这个问题,亦可用刚体平面运动微分方程,有

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_C &= -F_N \sin \varphi \\ m\ddot{y}_C &= F_N \cos \varphi \\ J_C \dot{\omega} &= -F_N a \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

令点 A 的速度为 \dot{x}_A, \dot{y}_A , 有

$$\dot{x}_C = \dot{x}_A - \omega a \sin \varphi$$

$$\dot{y}_C = \dot{y}_A + \omega a \cos \varphi$$

非完整约束为

$$\dot{x}_A \sin \varphi - \dot{y}_A \cos \varphi = 0$$

由方程消去约束力 F_N , 也可求解. 但是, 过程较复杂.

4 结论

(1) 用动力学普遍定理可组建非完整动力学方程, 其优点在于物理意义清晰, 缺点在于其中包含约束力, 需将约束力消去. 用分析力学方法可组建非完整动力学方程, 其中不出现理想约束力, 但过程较复杂.

(2) 对动点的动量矩定理, 在适当选取动点下可得到较为简单的方程和积分.

参考文献

- 1 梅凤翔. 非完整系统力学基础. 北京: 北京工业学院出版社, 1985
- 2 查浦雷金 CA. 非全定系统的动力学研究. 张燮译. 北京: 科学出版社, 1956
- 3 梅凤翔, 尚玫. 理论力学 I. 北京: 高等教育出版社, 2012
- 4 Неймарк ЮИ, Фуфаев НА. Динамика Негалономных Систем. Москва: Наука, 1967

(责任编辑: 胡漫)

圆柱面上滑动和滚动的分析

尤明庆¹⁾

(河南理工大学能源科学与工程学院, 河南焦作 454010)

摘要 物体在圆柱面上的正压力与速度和位置相关, 运动状态因摩擦力而具有显著的非线性特征. 求解了物体在圆柱面上滑动和滚动的基本方程, 得到速度公式而绘出多组曲线, 分析摩擦因数和初速对停止、滑脱以及滚-滑转化位置的影响. 相关内容可作为例题在课堂讲解.

关键词 摩擦, 滑动, 滚动, 圆柱面, 非线性, 突变

中图分类号: O313 文献标识码: A

doi: 10.6052/1000-0879-16-392

因写作文 [1], 时隔 10 年再次阅读美国加州理工学院的教材《力学世界》[2], 觉得孔子所说“温故

而知新”真是至理: 学习新知识遇到困难时需要温习已学知识, 而温习过程中还可以获得新的领悟.

书中一道习题“儿童坐在半圆形冰墩顶部, 受到轻推而滑下; 假设没有摩擦, 求其脱离冰墩的位置”固然容易. 不过, 摩擦总是存在的, 作为被动因素阻碍相对运动, 滑动发生后达到上限——正压力与摩擦因数乘积. 摩擦使系统状态复杂多变, 如直杆在对称斜面间平衡位置 [3]; 而圆柱面上物体下滑时, 摩擦力与速度和位置相关更具有显著的非线性特征, 或许可以在课堂讲解. 此外, 文 [4] 论述圆柱面上滚动似稍欠清晰, 不揣浅陋, 也略作演绎.

2016-12-05 收到第 1 稿, 2017-02-11 收到修改稿.

1) E-mail: youmq@hpu.edu.cn

引用格式: 尤明庆. 圆柱面上滑动和滚动的分析. 力学与实践, 2017, 39(3): 290-296

You Mingqing. Study of sliding and rolling on the cylindrical surface. *Mechanics in Engineering*, 2017, 39(3): 290-296