

许茜茹, 毛伟建. 2019. 正交各向异性介质中 qP 波入射的二阶近似反射系数与透射系数. 地球物理学报, 62(1):260-275, doi:10.6038/cjg2019L0702.

Xu Q R, Mao W J. 2019. Reflection and transmission coefficients based on second-order approximation in orthorhombic anisotropic media. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 62(1):260-275, doi:10.6038/cjg2019L0702.

正交各向异性介质中 qP 波入射的二阶近似反射系数与透射系数

许茜茹^{1,2}, 毛伟建^{1*}

1 中国科学院测量与地球物理研究所计算与勘探地球物理中心, 大地测量与地球动力学国家实验室, 武汉 430077

2 中国科学院大学, 北京 100049

摘要 地震波在各向异性介质中以一个准 P 波(qP)和两个准 S 波(qS1 和 qS2)的形式传播. 研究三种波的相速度、群速度以及偏振方向等传播性质能够为各向异性介质中的正反演问题提供有效支撑. 具有比横向各向同性(TI)介质更一般对称性的正交各向异性介质通常需要 9 个独立参数对其进行描述, 这使得对传播特征的计算更为复杂. 当两个准 S 波速度相近时具有耦合性, 从而令慢度的计算产生奇异性. 因此, 奇异点(慢度面的鞍点和交叉点)附近的反射与透射(R/T)系数的求解不稳定, 会导致波场振幅不准确. 本文首次通过结合耦合 S 波射线理论和基于迭代的各向异性相速度与偏振矢量的高阶近似解, 得到了适用于正交各向异性介质以 qP 波入射所产生的二阶 R/T 系数的计算方法. 与基于一阶近似的结果相比, 基于二阶近似的方法提高了 qP 波 R/T 系数的精度, 能得到一阶耦合近似无法表达的准确的 qP-qS 转换波的 R/T 系数解, 且方法适用于较强的各向异性介质.

关键词 各向异性; R/T 系数; 耦合 S 波; 二阶近似

doi:10.6038/cjg2019L0702

中图分类号 P631

收稿日期 2017-11-08, 2018-06-14 收修定稿

Reflection and transmission coefficients based on second-order approximation in orthorhombic anisotropic media

XU QianRu^{1,2}, MAO WeiJian^{1*}

1 Chinese Academy of Sciences, Institute of Geodesy and Geophysics, Center for Computational and

Exploration Geophysics and State Key Laboratory of Geodesy and Earth's Dynamics, Wuhan 430077, China

2 University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

Abstract Seismic wave propagation in the anisotropic media with one quasi-P wave (qP) and two quasi-S waves (qS1 and qS2). Studying of the propagation properties, such as phase velocity, group velocity and polarization, provides effective support for seismic forward modeling and inverse problems in anisotropic media. To describe the orthorhombic anisotropic media with more general symmetry than transverse isotropic (TI) media usually requires 9 independent parameters, which makes the calculation of propagation properties very complicated. The two quasi-S waves with similar velocities are coupled, causing the singularities in slowness calculation. As a result, the

基金项目 国家重点研发计划(2016YFC0601101), 国家自然科学基金(U1562216)以及国家科技重大专项项目《新一代地球物理油气勘探软件系统》(2017ZX05018-001)联合资助.

第一作者简介 许茜茹, 女, 1990 年生, 在读博士, 主要从事地震各向异性模拟与成像研究. E-mail: xuqianru@whigg.ac.cn

*** 通讯作者** 毛伟建, 男, 研究员, 博士生导师, 主要从事地震数据处理、成像和反演研究. E-mail: wjmiao@whigg.ac.cn

reflection and transmission (R/T) coefficients are unstable in the neighborhood of singularities (saddle points and cross points on slowness surface), which makes the wavefield amplitude calculation inaccurate. In this paper we propose a method to obtain the second-order R/T coefficients generated by incident qP wave in orthorhombic media by using coupled ray theory and high-order iterative solution of phase velocity and polarization vector in anisotropic media. Compared with the first-order results, the proposed method improves the accuracy of qP wave R/T coefficients, and obtains accurate qP-qS converted wave R/T coefficients which is not available in the first-order coupling approximation method. Furthermore, our method is applicable to strong anisotropic media.

Keywords Anisotropy; R/T coefficients; Couple-S wave; Second-order approximation

0 引言

射线理论作为波动方程的高阶近似解,被广泛应用于地震学研究中.射线在给定介质中的传播特征作为射线类正反演理论的基础,已有大量的研究成果.

针对地球介质,各向异性假设更符合真实的地层介质特征,不同的各向异性介质需要使用相应的参数化方法进行描述. Thomsen(1986) 假设具有单个对称轴的 TI 介质(VTI, HTI, TTI)能够描述地层的结构属性,给出了弱各向异性 VTI 介质的参数,并据此推导了相速度和群速度的近似表达式.而当介质中存在与地层走向垂直的裂隙时,使用正交各向异性模型能够对其更合理地描述(卢明辉等, 2005). Tsvankin(1997)基于 Thomsen 的 TI 介质参数,通过分别在三个对称面内求解 Christoffel 方程,推导了正交各向异性介质的参数化方法,并给出了弱正交各向异性介质中 qP 波相速度近似表达式. Xu 和 Stovas(2017)结合椭圆背景场和非椭圆系数提出了面向声波正交各向异性介质的参数化方法,并且基于 Shanks 变换得到了较精确的走时近似.

在各向异性介质中,地震波以准 P 波和两个准 S 波的形式进行传播,传播特征分别与介质特征决定的 Christoffel 方程的三组特征值和特征向量相对应,但仅在部分具有简单对称性的各向异性介质中存在解析解,大部分情况下需要使用数值方法进行求解. 吴国忱等(2010)推导了 TTI 介质的相速度与偏振方向的解析表达式;利用 TI 介质的传播特征信息,可以进行相应的正演模拟和逆时偏移计算(黄金强和李振春, 2017; 李振春等, 2017); Farra(2001)使用迭代方法推导了各向异性介质中高阶 qP 波和 qS 波相速度以及偏振方向的表达式,在未增加过多计算代价的情况下,可以得到相对精确的高阶解. Sripnich 和

Fomel(2015)使用了椭圆近似得到 TI 介质和正交各向异性介质中 qP 波的相速度和群速度解,并使用其进行波向量分解(Sripnich 等, 2017), Hao 和 Stovas(2016)利用广义时差近似(GMA)也给出了正交各向异性介质的 qP 波高精度近似相速度,达到了很高的精度,但是后两种方法仅涉及 qP 波的近似表达.

在各向异性介质中,当两个准 S 波相近时存在耦合现象,即在弱各向异性介质中或者一般各向异性介质的奇异点(慢度面的鞍点和交叉点)附近,常规的射线追踪方法通常无法得到稳定的解(Vavryčuk, 2003; Grechka, 2015). Coates 和 Chapman(1990)探讨了 qS 波在弱各向异性介质中的耦合现象,并使用耦合体积分对射线走时和偏振方向进行改正. Klimeš(2006), Farra 和 Pšenčík(2008)提出了耦合 S 波射线理论,并且推导了光滑各向异性弹性介质中的耦合 S 波的一阶射线追踪表达式. 耦合射线理论不再区分两个速度相近的准 S 波,而是将其看作按两个偏振方向进行传播的一组波,某种程度上解决了准 S 波场在奇异点附近的解不稳定的问题.

R/T 系数反映了波场振幅在界面处的变化情况. 计算与位移相关的 R/T 系数需要分别对广义 Snell 定理和 Zoeppritz 方程进行求解,即令入射波和反射、透射波在界面切平面内的慢度分量相等,并且要求位移、应力连续. Slawinski 等(2000)基于 Thomsen 的 VTI 介质中的相速度以及相速度面和偏振方向的几何关系,推导了适用于 VTI 介质的广义 Snell 定理. Daley 和 Hron(1977), Chapman(1994)对半空间条件下的两个均匀各向异性介质相关的 R/T 系数进行了研究. Červený(2001)使用射线理论计算了 3 维层状各向异性介质间的 R/T 系数. Jilek(2002)使用扰动方法推导了界面上下介质弱差异的弱各向异性相关的 PS 波反射系数. Farra 和 Pšenčík(2010)基于一阶射线追踪和耦合 S 波射线理论给出了弱各向异性介质中 qP-qP 非转换波的

一阶近似 R/T 系数, 但并没有给出 qP-qS 转换波的 R/T 系数解. 梁锴等 (2011) 利用弱各向异性近似推导了 TTI 介质 qP 波入射精确和近似 R/T 系数.

本文通过 Tsvankin 的参数化方法和 Bond 矩阵定义正交各向异性介质、TI 介质和各向同性介质, 结合耦合 S 波射线理论与各向异性相速度和偏振矢量的高阶近似解得到了基于二阶近似的 Snell 定理, 使用牛顿法对二阶 qP 波和耦合 S 波的反射、透射波慢度进行迭代求解, 根据 Zoeppritz 方程得到基于二阶近似的以 qP(P) 波入射的转换波和非转换波的 R/T 系数并且将二阶近似解与对应的精确解、一阶近似解进行比较, 二阶近似解的非转换波 R/T 系数精度高于一阶近似, 并且能够得到两 qS 波相关的 R/T 系数解.

1 理论方法

1.1 各向异性介质的刚度矩阵参数化

为了讨论基于正交各向异性的 R/T 系数, 本文

$$M = \begin{bmatrix} r_{11}^2 & r_{21}^2 & r_{31}^2 & 2r_{21}r_{31} & 2r_{11}r_{31} & 2r_{11}r_{21} \\ r_{12}^2 & r_{22}^2 & r_{32}^2 & 2r_{22}r_{32} & 2r_{12}r_{32} & 2r_{12}r_{22} \\ r_{13}^2 & r_{23}^2 & r_{33}^2 & 2r_{23}r_{33} & 2r_{13}r_{33} & 2r_{13}r_{23} \\ r_{21}r_{13} & r_{22}r_{23} & r_{32}r_{33} & r_{22}r_{33} + r_{32}r_{23} & r_{12}r_{33} + r_{32}r_{13} & r_{12}r_{23} + r_{22}r_{13} \\ r_{11}r_{13} & r_{21}r_{23} & r_{31}r_{33} & r_{21}r_{33} + r_{31}r_{23} & r_{11}r_{33} + r_{31}r_{13} & r_{11}r_{23} + r_{21}r_{13} \\ r_{11}r_{12} & r_{21}r_{22} & r_{31}r_{32} & r_{21}r_{32} + r_{31}r_{22} & r_{11}r_{32} + r_{31}r_{12} & r_{11}r_{22} + r_{21}r_{12} \end{bmatrix},$$

其中, r_{ij} 为旋转矩阵 R 的元素. 全局坐标系下的刚度矩阵 A^{global} 可以通过 Bond 矩阵对在各自向异性参考坐标系下的刚度矩阵 A^{local} 进行变换, 表示为

$$A^{\text{global}} = MA^{\text{local}}M^T, \quad (2)$$

其中, $A^{\text{global}}, A^{\text{local}}$ 均为 Voigt 格式的 6×6 刚度矩阵, 不做特殊说明的情况下, 下文中出现的刚度矩阵均是基于全局坐标系的.

1.2 各向异性介质的二阶近似相速度

与慢度方向矢量 n 相关的 Christoffel 矩阵 $\bar{\Gamma}(x, n)$ 为

$$\bar{\Gamma}_{ik}(x, n) = a_{ijkl}(x)n_jn_l, \quad a_{ijkl} = C_{ijkl}/\rho, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, \quad (3)$$

其中, 弹性常量的四阶张量 C_{ijkl} 经密度 ρ 正则化为 a_{ijkl} . 由于其具有对称性, 与式 (2) 中 Voigt 格式表示的 $A^{\text{global}}, A^{\text{local}}$ 等价, 具有映射关系 (Thomsen, 1986). 在各向异性介质中, 式 (3) 的三个不同的特征值和特征向量分别对应 qP、qS1、qS2 波的速度平方和偏振方向.

使用 Tsvankin (1997) 提出的 9 参数对正交各向异性介质进行参数化, 参数及其物理意义见附录 A. 此参数化方法以正交各向异性介质的对称轴为坐标系 (即各向异性参考坐标系), 能够退化表达 TI 介质和各向同性介质.

当各向异性参考坐标系与全局坐标系 (z 轴沿垂直方向的正交坐标系) 不一致时, 为了保持文中坐标系的统一, 需要进行矩阵旋转操作. 假设沿各向异性参考坐标系三轴正方向的单位向量在全局坐标系中表示为 (e'_1, e'_2, e'_3) , 全局坐标系的三轴单位向量为 (e_1, e_2, e_3) , 可定义作用在刚度矩阵上的旋转矩阵为

$$R = \begin{bmatrix} e'_1{}^T e_1 & e'_1{}^T e_2 & e'_1{}^T e_3 \\ e'_2{}^T e_1 & e'_2{}^T e_2 & e'_2{}^T e_3 \\ e'_3{}^T e_1 & e'_3{}^T e_2 & e'_3{}^T e_3 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

与旋转矩阵 R 对应的 Bond 矩阵 M 为

S 波耦合现象经常出现于弱各向异性介质中或者强各向异性介质的两个 qS 波波速相似的奇异点区域. 针对这种情况, 我们引入耦合射线的概念 (Klimeš, 2006). 耦合射线理论假设两个速度相近的 qS 波按照“同一”路径传播, 分别计算其偏振属性和动力学参数, 能够有效处理两个 qS 波, 不会产生奇异解, 避免了常规各向异性射线理论无法处理 qS 波耦合的问题, 且形式简洁, 可进一步简化用以处理各向同性介质的 S 波. 对于一阶近似, 各向异性介质中的 qP 波和耦合 S 波的特征值可以分别表示为 (Farra 和 Pšenčík, 2008)

$$G_p^{(1)}(x, n) = \bar{B}_{33}, \quad G_s^M(x, n) = \frac{\bar{B}_{11} + \bar{B}_{22}}{2}, \quad (4)$$

下文中, 令 qP(P) 波相关的变量下标为 P, 耦合 S 波相关的变量下标为 S^M. 式 (4) 中 \bar{B}_{ji} 为对称矩阵 $\bar{B}(x, n)$ 的元素,

$$\bar{B}_{ji} = e_i^{[j]} e_k^{[j]} \bar{\Gamma}_{ik}(x, n), \quad (5)$$

其中, $e_i^{[j]}$ 为一组三维正交基向量 $e^{[1]}, e^{[2]}, e^{[3]}$ 中的

第 j 个向量的 i 分量, 其中, $\mathbf{e}^{[3]} = \mathbf{n}, \mathbf{e}^{[1]}, \mathbf{e}^{[2]}$ 为一组与 $\mathbf{e}^{[3]}$ 正交的向量. 需要说明的是, 对任意 $\mathbf{e}^{[1]}, \mathbf{e}^{[2]}$ 来说, $\bar{B}_{11} + \bar{B}_{22}, \bar{B}_{13}^2 + \bar{B}_{23}^2$ 为定值, 因此, 其选择不影响一阶及下述的二阶特征值的大小. 由式(4), qP 波和耦合 S 波对应的相速度分别为 $v_p^{(1)} = \sqrt{G_p^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{n})}$,

$$G_p(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = G_p^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) + \frac{\bar{B}_{13}^2}{G_p(\mathbf{x}, \mathbf{n}) - G_{S_1}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{n})} + \frac{\bar{B}_{23}^2}{G_p(\mathbf{x}, \mathbf{n}) - G_{S_2}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{n})}, \quad (6)$$

$$G_{S_k}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \frac{1}{2} [M_{11} + M_{22} \pm \sqrt{(M_{11} + M_{22})^2 + 4M_{12}^2}], \quad k = 1, 2,$$

其中,

$$M_{jl}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \bar{B}_{jl} + \frac{\bar{B}_{j3}\bar{B}_{l3}}{G_{S_k} - G_p^{(1)}}. \quad (7)$$

令两个 qS 波沿耦合射线路径传播, 即 $G_{S_1}^{(1)} = G_{S_2}^{(1)} = G_{S_M}^{(1)}$, 结合式(4), 式(6), 可以得到 qP 波和耦合 S 波的二阶近似

$$G_p^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = G_p^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) + \frac{\bar{B}_{13}^2 + \bar{B}_{23}^2}{G_p^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) - G_{S_M}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{n})},$$

$$G_{S_M}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = G_{S_M}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) - \frac{1}{2} \frac{\bar{B}_{13}^2 + \bar{B}_{23}^2}{G_p^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) - G_{S_M}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{n})}. \quad (8)$$

将耦合射线理论与二阶迭代近似相速度计算结合, 得到二阶近似的 qP 波和耦合 S 波波速值. 与 Farra(2001)中二阶扰动解不同, 此二阶近似式(8)的分母中, 我们使用了一阶近似的 qP 波和耦合 S 波特征值 $G_p^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{n}), G_{S_M}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$, 而非原公式中迭代二阶近似中使用的参考各向同性介质的 P 波和 S 波特征值, 将迭代二阶近似向迭代三阶近似逼近, 增加了二阶近似相速度的精度, 形式简单, 并且没有显著提升所需的计算代价. 二阶近似 qP 波和耦合 S 波的相速度大小分别为 $v_p^{(2)} = \sqrt{G_p^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{n})}$, $v_{S_M}^{(2)} = \sqrt{G_{S_M}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{n})}$, 慢度矢量为 $\mathbf{p}^{(2)} = \mathbf{n}/v^{(2)}$.

1.3 广义 Snell 定理和基于二阶近似的 Snell 定理

与式(3)类似, 坐标 \mathbf{x} 处的与慢度相关的 Christoffel 矩阵 Γ 为

$$\Gamma_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = a_{ijkl}(\mathbf{x}) p_j p_l, \quad (9)$$

其中, \mathbf{p} 为特定波的慢度矢量, $\mathbf{p} = \mathbf{n}/v$, v 表示其相速度大小. 各向异性介质中某种波的存在条件为

$$\det(\Gamma_{ik} - \delta_{ik}) = 0. \quad (10)$$

若 \mathbf{x} 位于界面上, 则入射波与反射、透射波的慢度遵循 Snell 定理, 即在界面切平面的投影分量 \mathbf{a} 相等, 写作向量形式为

$$v_{S_M}^{(1)} = \sqrt{G_{S_M}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{n})}.$$

对于各向异性介质中 qP 波和耦合 S 波的二阶近似, 我们先利用 Farra(2001)给出的基于扰动迭代的高阶 qP 波和 qS1、qS2 波形式推导出最终形式为

$$\mathbf{p}_{\text{inc}} - (\mathbf{p}_{\text{inc}} \cdot \mathbf{N})\mathbf{N} = \mathbf{p}_{R/T} - (\mathbf{p}_{R/T} \cdot \mathbf{N})\mathbf{N} = \mathbf{a}, \quad (11)$$

其中, \mathbf{p}_{inc} 为入射波的慢度矢量, \mathbf{N} 为 \mathbf{x} 处的界面法向量, $\mathbf{p}_{R/T}$ 为反射、透射波的慢度矢量. 由式(11)可知,

$$\mathbf{p}_{R/T} = \mathbf{p}_{\text{inc}} - (\mathbf{p}_{\text{inc}} \cdot \mathbf{N})\mathbf{N} + (\mathbf{p}_{R/T} \cdot \mathbf{N})\mathbf{N} = \mathbf{a} + \sigma\mathbf{N}, \quad (12)$$

其中, σ 为 $\mathbf{p}_{R/T}$ 在界面法线方向上的投影. 结合式(12)与(10), 可以得到关于 σ 的基于广义 Snell 定理的六阶方程, 忽略物理上不合理的三个解, 从而可求得对应于 qP、qS1、qS2 波的两个解 (Cerveny, 2001, 公式 2.3.53, 2.3.54), 但是由于复杂各向异性存在奇异点, 当两个准 S 波对应的特征值相似时, 会产生奇异解. Farra 和 Pšenčík(2010)提出的基于一阶近似的 R/T 系数计算虽然能够处理弱各向异性的 qP 波折射和反射, 但是其无法适应强各向异性介质, 并且其并未给出转换耦合 S 波相关的 R/T 系数. 因此, 我们结合二阶近似的相速度式(8)推导基于二阶近似的 Snell 定理. 与式(10)对应的二阶 qP 波和耦合 S 波特征值可以表示为

$$G_p^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}_p) = 1, \quad G_{S_M}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}_{S_M}) = 1, \quad (13)$$

其中, $\mathbf{p}_p, \mathbf{p}_{S_M}$ 分别为两者的慢度矢量, 同样遵循(12)式. 结合式(12)与(13)可以得到关于 σ 的最高为 12 阶的高次方程. 方程的阶数由各向异性复杂程度、全局坐标系与各向异性参考坐标系的差异决定. 例如, 各向同性介质对应的两个方程均为 8 阶, 解包含两组三重根在内, 共有 4 个, 与一阶近似相同; VTI 介质对应的两个方程也为 8 阶, 其 8 个解可能含有重根; 对称轴为全局坐标系三轴的正交各向异性介质也对应了 8 阶方程. 而界面法线方向不沿竖直向上, 且对称轴与全局坐标系三轴均不一致的正交各向异性介质, 或更为复杂的各向异性介质则对应了最高阶为 12 阶的方程. 虽然 12 阶的情况可以

通过旋转全局坐标系为各向异性参考坐标系从而将方程降阶为一般的 8 阶,但是由于高阶方程系数的复杂度随着各向异性及地层的复杂程度增加,方程求解和筛选的计算代价也会超出可接受的范畴.因此,令以 R/T 系数相关的变量 σ 为未知数的目标函数为

$$f(\sigma_{R/T}) = G^{(2)}(\mathbf{p}) - 1 = 0, \quad \mathbf{p} = \mathbf{a} + \sigma_{R/T} \mathbf{N}, \quad (14)$$

使用牛顿法来迭代求解,第 j 次迭代的迭代公式为

$$\sigma_{R/T}^{[j]} = \sigma_{R/T}^{[j-1]} - \frac{f(\sigma_{R/T}^{[j-1]})}{f'(\sigma_{R/T}^{[j-1]})},$$

$$f'(\sigma_{R/T}^{[j-1]}) = \frac{\partial f(\sigma_{R/T}^{[j-1]})}{\partial p_k^{[j-1]}} \frac{\partial p_k^{[j-1]}}{\partial \sigma_{R/T}^{[j-1]}} = \frac{N_k \partial G^{(2)}}{\partial p_k^{[j-1]}}, \quad (15)$$

$$\mathbf{g}_p^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}_p) = \frac{\left[B_{13} \mathbf{e}^{[1]} + B_{23} \mathbf{e}^{[2]} + \left(B_{33} - \frac{B_{11} + B_{22}}{2} \right) \mathbf{e}^{[3]} \right]}{\sqrt{\left(B_{33} - \frac{B_{11} + B_{22}}{2} \right)^2 + B_{13}^2 + B_{23}^2}},$$

$$\mathbf{g}_{S_1^{(2)}}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}_{S^M}) = \frac{\left[\mathbf{e}^{[1]} + \frac{M_{12}}{(G_{S_1}^{(2)} - M_{22})} \mathbf{e}^{[2]} + \frac{2B_{13}}{B_{11} + B_{22} - 2B_{33}} \mathbf{e}^{[3]} \right]}{\sqrt{1 + \frac{M_{12}^2}{(G_{S_1}^{(2)} - M_{22})^2} + \left(\frac{2B_{13}}{B_{11} + B_{22} - 2B_{33}} \right)^2}}, \quad (16)$$

$$\mathbf{g}_{S_2^{(2)}}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}_{S^M}) = \frac{\left[\frac{M_{12}}{(G_{S_2}^{(2)} - M_{11})} \mathbf{e}^{[1]} + \mathbf{e}^{[2]} + \frac{2B_{23}}{B_{11} + B_{22} - 2B_{33}} \mathbf{e}^{[3]} \right]}{\sqrt{1 + \frac{M_{12}^2}{(G_{S_2}^{(2)} - M_{22})^2} + \left(\frac{2B_{23}}{B_{11} + B_{22} - 2B_{33}} \right)^2}},$$

其中, B_{ij} 参数分别为对应的 qP 波慢度或耦合 S 波慢度. $G_s^{(2)}(\rho)$ 为替换式(6)中单位方向向量参数为对应耦合 S 波慢度矢量得到,其对应的 $\mathbf{e}_i^{[j]}$ 与式(5)中相同即可.当慢度为复数矢量时,对应的偏振矢量亦为复数矢量形式.

我们通过如下正交各向异性模型给出关于慢度和偏振方向计算的算例.

$$v_p = 2.4367 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}, \quad v_s = 1.2649 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$\epsilon^1 = 0.3286, \quad \gamma^1 = 0.1831, \quad \delta^1 = 0.0825, \quad (17)$$

$$\epsilon^2 = 0.2579, \quad \gamma^2 = 0.0455, \quad \delta^2 = -0.0776,$$

$$\delta^3 = -0.1064.$$

首先,使用式(17)参数化的正交各向异性模型 (Schoenberg 和 Helbig, 1997),按照式(3)进行特征值求解,计算此模型在三个对称面对应的慢度分布情况,如图 1,可见在正交各向异性中的两个 qS 波对应部分入射角的速度相似,即在奇异点(慢度曲线交叉点)附近存在耦合现象,此时若按照传统的各向异性射线追踪方法进行求解则会出现不稳定的问题.下面我们将通过结合各向异性高阶近似解与耦

其中,与 $\partial G^{(2)}/\partial p_k$ 相关变量的完整形式见附录 B.若解为复数,此方法仍能够有效求解出相应的 σ .使用两组迭代求解可以分别得到二阶 qP 波和耦合 S 波的相速度慢度矢量.迭代求解避免了高阶方程求解后解的筛选过程,在有限的迭代次数中就能够得到合理的结果,比一般方程求解效率更高,且耦合 S 波保证了奇异点附近解的稳定性.

1.4 基于二阶近似的 qP 入射波的 Zoeppritz 方程

偏振方向的求取基于 Farra(2001),根据 qP 波和耦合 S 波的二阶慢度矢量确定的单位方向向量,可以得到其对应的二阶偏振方向向量 $\mathbf{g}^{(2)}$,具体表达形式为

合射线理论对正交各向异性介质进行处理.不做特殊说明的情况下,将对包括奇异点附近范围在内的所有入射角度进行计算,检验此近似对一般情况的整体适应性.

由于耦合 S 波理论的 S 波与常规的 qS1、qS2 波波速不直接可比,我们将(8)式中的二阶近似 qP 波、Farra 的二阶、三阶近似解与精确解进行比较,得到如图 2 所示的误差剖面,qP 波相速度的精度随着阶数的增加而提高.其中,对于高阶近似 qP 波波速,图 2b 使用了零阶近似 P、S 波波速,图 2c 使用了 qP 波及耦合 S 波的一阶近似波速,图 2d 使用了一阶近似 qP、qS1、qS2 波速.图 2c 的精度介于图 2b 与图 2d 之间,与一阶近似的图 2a 相比,提高了一个数量级的精度,此二阶近似对 R/T 系数的改正作用在下文的实例中也能够体现出来.

接下来考察使用二阶近似计算的三个波对应的偏振矢量,按照式(16)计算偏振方向并绘制在相应入射方向 $\mathbf{n}_p, \mathbf{n}_{S^M}$ 的单位球上,如图 3,正交各向异性的 qP 波(对应 \mathbf{n}_p)偏振方向与入射方向有一定偏

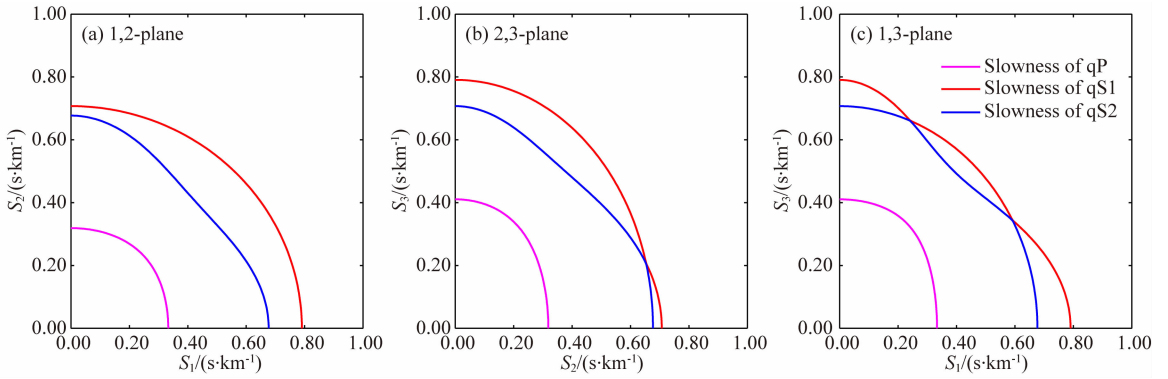


图 1 使用式(17)参数化的正交各向异性模型在三个对称面上的慢度分布

(a) 入射向量 $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3 = 0)$ 确定的水平平面内的慢度分布; (b) 入射向量 $(\mathbf{n}_1 = 0, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$ 确定的竖直平面内的慢度分布; (c) 入射向量 $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 = 0, \mathbf{n}_3)$ 确定的竖直平面内的慢度分布.

Fig. 1 Slowness on three symmetric surfaces for orthorhombic model parameterized by (17)

(a) Slowness on horizontal surface with incident vector $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3 = 0)$; (b) Slowness on vertical surface with incident vector $(\mathbf{n}_1 = 0, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$; (c) Slowness on vertical surface with incident vector $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 = 0, \mathbf{n}_3)$.

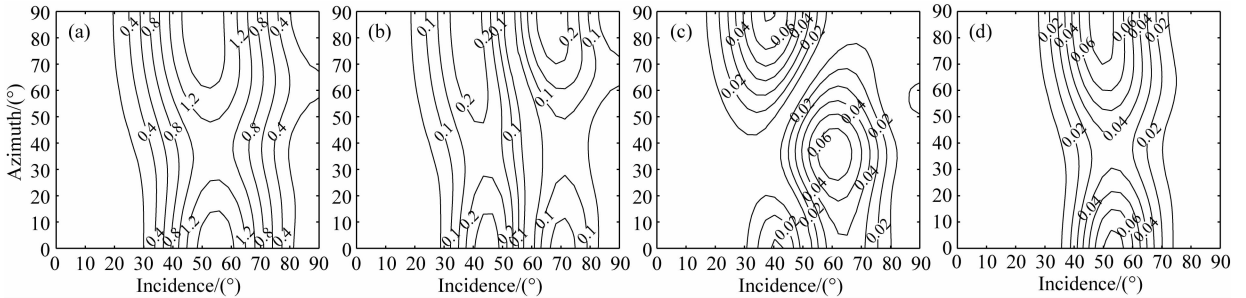


图 2 近似 qP 波波速与精确解的误差(百分比)

(a) 一阶近似的误差; (b) 二阶近似(Farra's)的误差; (c) 二阶近似(本文)的误差; (d) 三阶近似(Farra's)的误差.

Fig. 2 Error (in percentage) of approximated qP wave phase velocity compared with exact one

(a) Error of 1st order approximation; (b) Error of 2nd order approximation (Farra's); (c) Error of 2nd order approximation (ours); (d) Error of 3rd order approximation (Farra's).

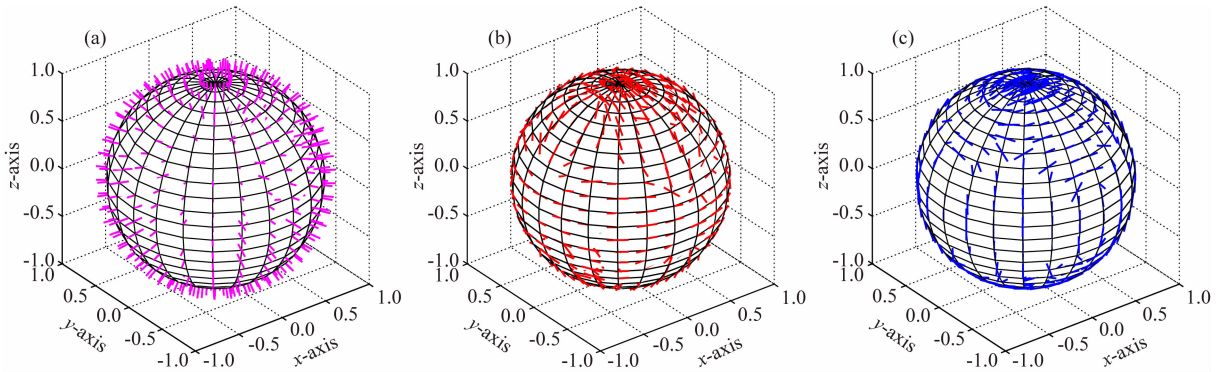


图 3 单位入射方向球上的正交各向异性模型的(a) qP, (b) qS1, (c) qS2 偏振矢量

Fig. 3 Polarization vectors of (a) qP, (b) qS1, and (c) qS2 waves in the orthorhombic model plotted on the unit incident direction sphere

差,但是仍较接近于入射方向; qS1 波偏振方向和 qS2 波偏振方向(对应 \mathbf{n}_s^M) 与入射方向的夹角不为 90° , 与 Sripanich 等(2017)的 Fig. 1 的解趋势一致.

在界面法线单位矢量为 \mathbf{N} 的坐标 \mathbf{x} 处, 二阶慢

度矢量为 $\mathbf{p}^{(2)}$ 的波对应的应力可以表示为

$$X_i = a_{ijkl} N_j g_k^{(2)} p_l^{(2)}. \quad (18)$$

若在 \mathbf{x} 点以 qP(P)波入射, 入射波的偏振矢量和应力矢量为 $\mathbf{g}^P_{inc}, \mathbf{X}^P_{inc}$, 由位移和应力连续, 可得

到反射\透射 qP、耦合 S 波的偏振矢量和应力矢量 $\mathbf{g}^P, \mathbf{g}^{S_1}, \mathbf{g}^{S_2}$ 和 $\mathbf{X}^P, \mathbf{X}^{S_1}, \mathbf{X}^{S_2}$, 即 Zoeppritz 方程如下,

$$\mathbf{MC} = \mathbf{N}, \quad (19)$$

其中,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} g_1^P & g_1^{S_1r} & g_1^{S_2t} & -g_1^P & -g_1^{S_1r} & -g_1^{S_2r} \\ g_2^P & g_2^{S_1r} & g_2^{S_2t} & -g_2^P & -g_2^{S_1r} & -g_2^{S_2r} \\ g_3^P & g_3^{S_1r} & g_3^{S_2t} & -g_3^P & -g_3^{S_1r} & -g_3^{S_2r} \\ X_1^P & X_1^{S_1r} & X_1^{S_2t} & -X_1^P & -X_1^{S_1r} & -X_1^{S_2r} \\ X_2^P & X_2^{S_1r} & X_2^{S_2t} & -X_2^P & -X_2^{S_1r} & -X_2^{S_2r} \\ X_3^P & X_3^{S_1r} & X_3^{S_2t} & -X_3^P & -X_3^{S_1r} & -X_3^{S_2r} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = [C^{P_t} \quad C^{S_1r} \quad C^{S_2t} \quad C^{P_r} \quad C^{S_1r} \quad C^{S_2r}]^T,$$

$$\mathbf{N} = [g_1^{P_{inc}} \quad g_2^{P_{inc}} \quad g_3^{P_{inc}} \quad X_1^{P_{inc}} \quad X_2^{P_{inc}} \quad X_3^{P_{inc}}]^T.$$

上标中的 r 和 t 分别对应上层(入射)介质中的反射波以及下层(透射)介质中的透射波. $C^{P_r}, C^{S_1r}, C^{S_2r}$ 对应反射 qP 波、耦合 S 波的反射系数, $C^{P_t}, C^{S_1t}, C^{S_2t}$ 对应透射 qP 波、耦合 S 波的透射系数. 此处及下文中的反射、透射系数均为以位移表示的反射、透射系数. 方程(19)是一个较稳定的线性系统, 可通过常规方法求解.

2 数值实验

为了验证本文中二阶近似 R/T 系数计算方法的有效性, 我们使用三组各向异性模型来进行验证. 在所有模型中, 当上半空间介质为各向同性时, 入射波为 P 波, 反射波为 P 波, S 波; 当其介质为各向异性时, 入射波为 qP 波, 反射波为 qP 波和耦合 S 波. 透射波在下半空间的各向异性介质中传播, 透射波为 qP 波和耦合 S 波. 为了表达和比较的统一和方便, 后文也使用 C^{S_1r}, C^{S_2r} 来分别表示各向同性介质中的反射波的 S1 和 S2 分量. 令入射倾角和方位角均从 0° 变化至 90° , 给出 R/T 系数及相关参数的等值线图. R/T 系数的精确解是通过直接求解广义 Snell 定理((10), (12)联立的六阶方程)和对应的 Zoeppritz 方程得到, 由于奇异点附近直接求解不稳定, 需要额外计算和选择合理的 qS 波慢度、偏振及应力矢量. 另外, 由于使用式(19)求解的 R/T 系数可能为复数, 我们在例子中均使用系数的模对各变量进行表达和比较.

2.1 P 波从各向同性介质入射至弱各向异性 HTI 介质

首先, 将二阶近似的 R/T 系数结果与已有的基于一阶近似的 R/T 系数结果进行对比, 用于检测二

阶近似的正确性和对弱各向异性的改正作用. 下面的模型 A 为 Farra 和 Pšenčík(2010)文中使用的第二组模型, 入射 P 波所在的上层为各向同性介质, P 波波速 v_p 、S 波波速 v_s 以及密度 ρ 分别为

$$v_p = 3.0 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}, \quad v_s = 1.73 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}, \quad (20)$$

$$\rho = 2.2 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}.$$

透射 qP 波和耦合 S 波所在的下层为弱 HTI 介质, 可以将刚度系数矩阵换算为 Tsvankin 参数和旋转矩阵, 即

$$v_p = 3.0708 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}, \quad v_s = 2.0616 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$\rho = 2.6 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}, \quad \epsilon^1 = \epsilon^2 = 0.3097, \quad \gamma^1 = \gamma^2 = 0.271,$$

$$\delta^1 = \delta^2 = 0.2844, \quad \delta^3 = 0.000,$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

由于其上层的各向同性介质的速度在一定倾角、方位角范围内小于下层介质, 因此可能存在部分复 R/T 系数. 图 4 为模型 A 的 qP(P)波 R/T 系数的精确解、二阶近似解与精确解的差值, 以及一阶近似解与精确解的差值. 因入射倾角和方位角分别在 0 到 90° 范围内变化, 三维空间内的临界角可组成一条分界线, 即图 4a 所示的 AB 或图 4d 所示的 CD 连线. 在临界角分界线附近区域, $|C^{P_r}|$ 和 $|C^{P_t}|$ 由实数变为复数, 产生剧烈变化. 比较图 4b 和 4c, 4e 和 4f 在此区域的值, 二阶近似解与精确解的差值要小于一阶近似解与精确解的差值. 在整体上, 对于弱各向异性介质, 二阶近似解与一阶近似解的 qP(P)波 R/T 系数的精度相近, 但是在误差分布上, 令误差的期望为 0, 二阶近似解、一阶近似解与精确解的差值的标准差分别为 0.0086、0.0426 ($|C^{P_r}|$) 和 0.0119、0.0506 ($|C^{P_t}|$), 即二阶近似解略优于一阶近似解, 两者都具有较高的精度.

由于 Farra 计算的耦合 S 波 R/T 系数与精确解不可比(Farra 和 Pšenčík, 2010), 此处及下文中, 对于准 S 波(或 S 波), 我们仅对二阶近似结果与精确解的差进行分析和比较. 图 5 为耦合 S 波的两个偏振方向(各向同性介质为 S1、S2 分量)对应的 R/T 系数的精确解以及二阶近似解与精确解的差值. 由图 5 可以看出, 二阶近似解与精确解很接近, 其标准差均小于 0.0034(见表 1).

为了更直观地分析 qS 波(S 波)二阶近似 R/T 系数的计算精度, 我们分别给出了固定入射倾角和固定方位角为 45° 时, qS(S)波 R/T 系数值的截面(见图 6a 和 6b). 由图 6 可清楚地看到二阶近似 S

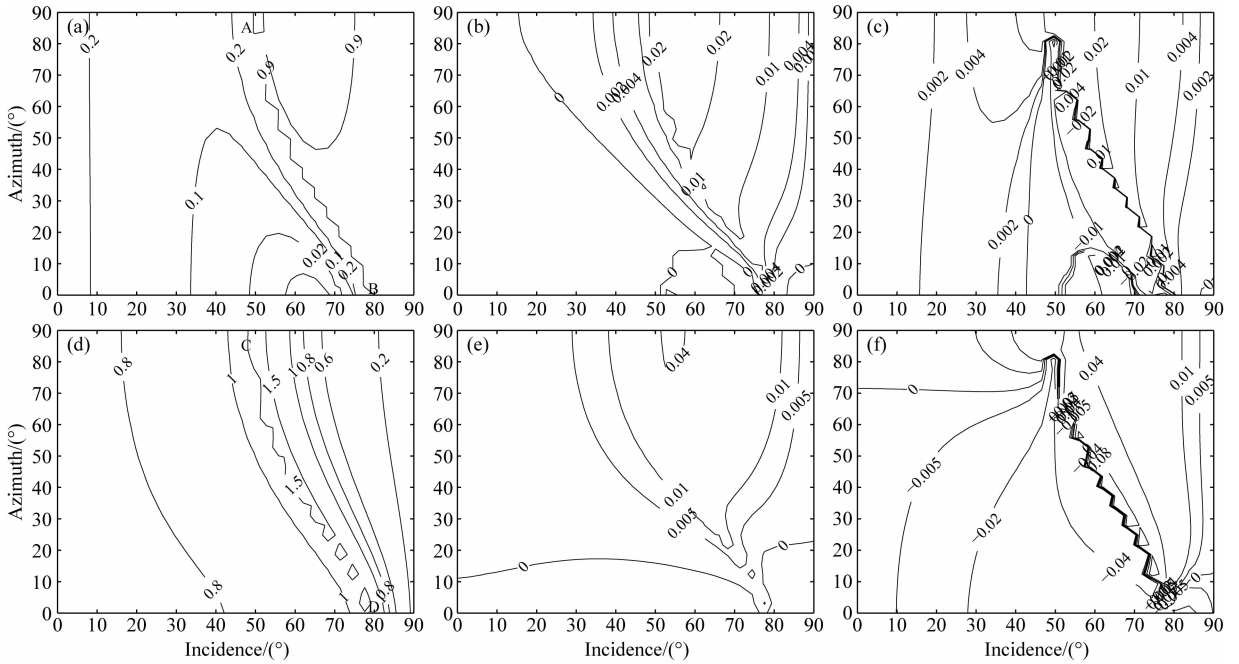


图 4 模型 A 的 P 波入射对应的 P 波反射系数和 qP 波透射系数

(a) P 波反射系数的精确解; (b) P 波反射系数的二阶近似解与精确解的差值; (c) P 波反射系数的一阶近似解与精确解的差值; (d) (e) (f) 与 (a) (b) (c) 类似, 是关于 qP 波透射系数的值.

Fig. 4 P wave reflection coefficient and qP wave transmission coefficient corresponding to incident P wave for model A (a) Exact P wave reflection coefficient; (b) Difference between second-order approximate and exact P wave reflection coefficient; (c) Difference between first-order approximate and exact P wave reflection coefficient; (d) (e) (f) are similar to (a) (b) (c) for qP wave transmission coefficients.

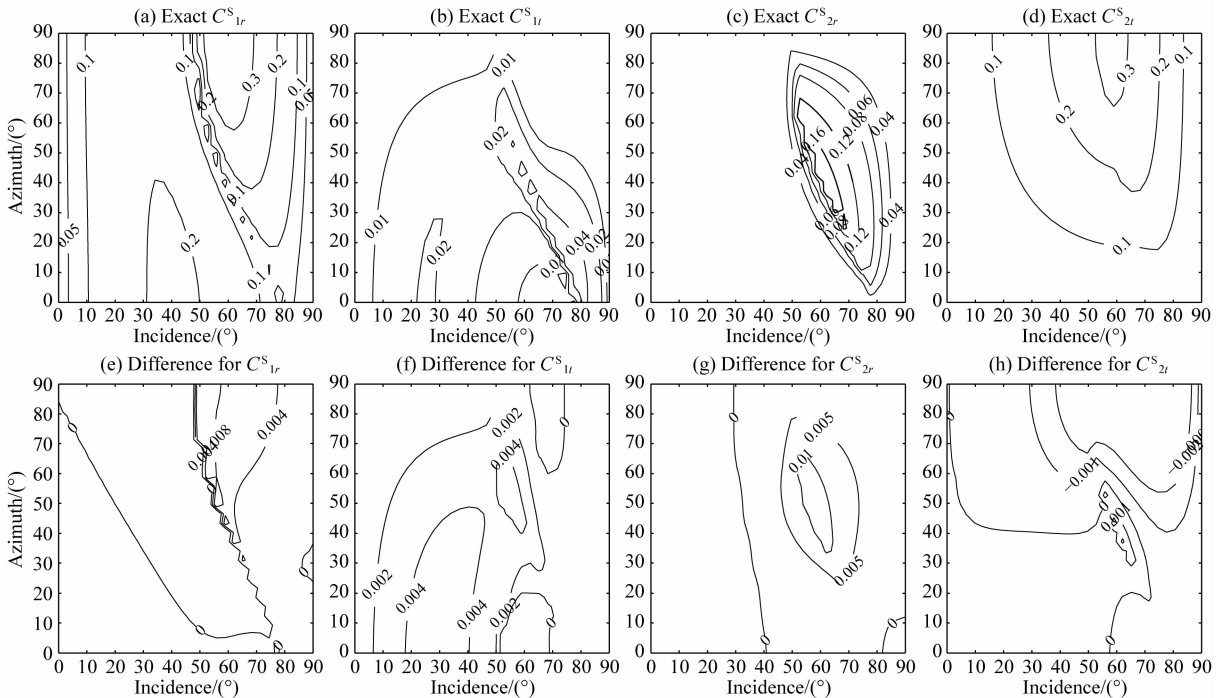


图 5 模型 A 的以 P 波入射对应的 S 波反射系数、qS 波透射系数的精确解和二阶近似解与精确解的差值

(a) S 波的 S1 分量反射系数精确解; (b) qS1 波的透射系数精确解; (c) S 波的 S2 分量反射系数精确解; (d) qS2 波透射系数精确解; (e) (f) (g) (h) 为二阶近似解与相应精确解 (a) (b) (c) (d) 的差值.

Fig. 5 S wave reflection coefficients and qS wave transmission coefficients corresponding to incident P wave for model A

(a) Exact S1 component of S wave reflection coefficient; (b) Exact qS1 wave transmission coefficient; (c) Exact S2 component of S wave reflection coefficient; (d) Exact qS2 wave transmission coefficient; (e) (f) (g) (h) are difference between second-order approximate and exact coefficients corresponding to (a) (b) (c) (d).

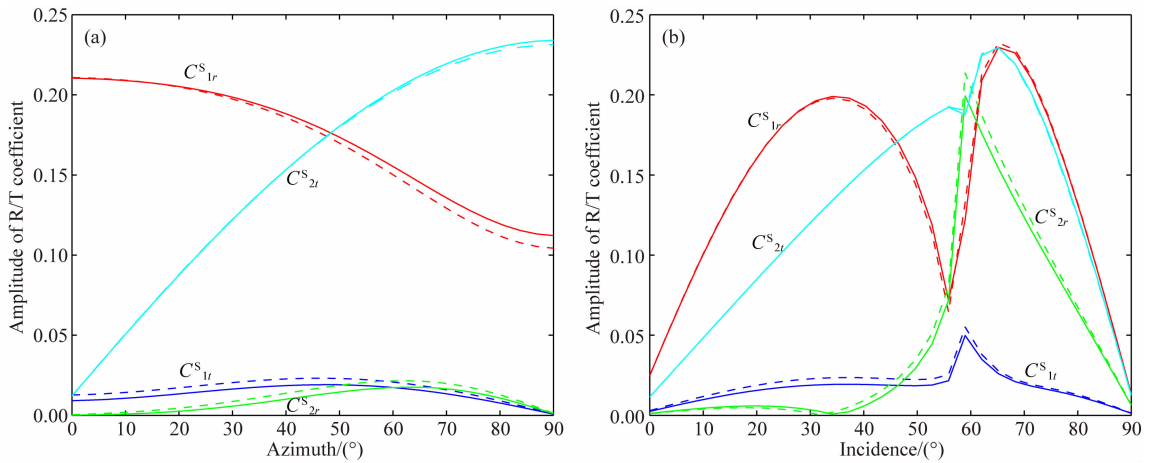


图 6 当(a)固定入射倾角为 45°, (b)固定入射方位角为 45°时, 模型 A 的 qS(S)波 R/T 系数精确解(实线)和二阶近似解(虚线)

Fig. 6 The exact (solid line) and 2nd-order (dashed line) qS(S) wave R/T coefficients for model A when (a) the incidence is fixed as 45°, (b) the azimuth is fixed as 45°

表 1 模型 A 中 qS 波(S 波)二阶近似 R/T 系数的标准差

Table 1 Standard deviation of second-order approximation of qS wave (S wave) R/T coefficients for model A

	C^S_{1r}	C^S_{1t}	C^S_{2r}	C^S_{2t}
标准差	0.0034	0.0024	0.0034	0.0014

波的 S1、S2 分量反射系数、耦合 S 波两偏振相关的透射系数与其精确值相当接近。

基于对模型 A 的上述比较和分析, 二阶近似的 qP(P)波 R/T 系数, 与 Farra 的一阶近似结果精度近似, 整体上优于一阶近似解, 这是由于对于各向同性介质和弱各向异性介质来说, 一阶近似已能够达到所需的精度要求。而二阶近似的 qS(S)波 R/T 系数精度也较高, 能够较准确地处理弱各向异性介质。

2.2 P 波从各向同性介质入射至强正交各向异性介质

为了验证基于二阶近似的 R/T 系数计算方法同样适用于更为一般的强正交各向异性介质, 我们选用 Tsvankin(1997)提供的强正交各向异性参数作为模型的一部分来说明二阶近似算法的适用性。

模型 B 中的入射 P 波所在的上层为各向同性介质, P 波波速 v_p 、S 波波速 v_s 以及密度 ρ 分别为

$$\begin{aligned} v_p &= 5.0 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}, \quad v_s = 3.5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}, \\ \rho &= 2.65 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}. \end{aligned} \quad (22)$$

透射波所在的下层为强正交各向异性介质, 其定义在全局坐标系下的各向异性参数和旋转矩阵为

$$v_p = 3 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}, \quad v_s = 1.2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$\begin{aligned} \rho &= 2.65 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}, \quad \epsilon^1 = 0.45, \quad \gamma^1 = 0.7, \quad \delta^1 = -0.15, \\ \epsilon^2 &= 0.6, \quad \gamma^2 = 0.3, \quad \delta^2 = -0.1, \quad \delta^3 = 0.2, \end{aligned}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

由图 7 可知, 对于强正交各向异性, 一阶近似与二阶近似的 R/T 系数差别较大, 一阶近似的透射系数 $|C^P_r|$ 的最大相对误差为 12%, 反射系数 $|C^P_r|$ 的最大相对误差则高达 40%, 一阶近似解在陡倾角区域精度无法达到要求。与之相应的, 二阶近似的透射系数 $|C^P_r|$ 和反射系数的最大相对误差分别为 3% 和 6%, 二阶近似的精确度整体上比一阶近似解要高约一位有效数字。在误差分布上, 二阶近似和一阶近似与精确解的标准差分别为 0.0030、0.0207 ($|C^P_r|$) 和 0.0043、0.0310 ($|C^P_r|$), 即二阶近似的精度更高。

与图 5 类似, 比较图 8 中二阶近似的 $C^S_{1r}, C^S_{1t}, C^S_{2r}, C^S_{2t}$ 与精确解的误差, 其标准差如表 2。图 9a 和 9b 分别给出了固定入射倾角和方位角为 45°时, qS(S)波的 R/T 系数大小, 与上述分析一致, 二阶近似与精确值匹配程度很高。因此, 对于强各向异性介质, 基于二阶近似的 qS 波(S 波)R/T 系数在图示入射角度分布范围内仍然同样具有较高的精度。

表 2 模型 B 中 qS 波(S 波)二阶近似 R/T 系数的标准差

Table 2 Standard deviation of second-order approximation of qS wave (S wave) R/T coefficients for model B

	C^S_{1r}	C^S_{1t}	C^S_{2r}	C^S_{2t}
标准差	0.0013	0.0032	0.0003	0.0021

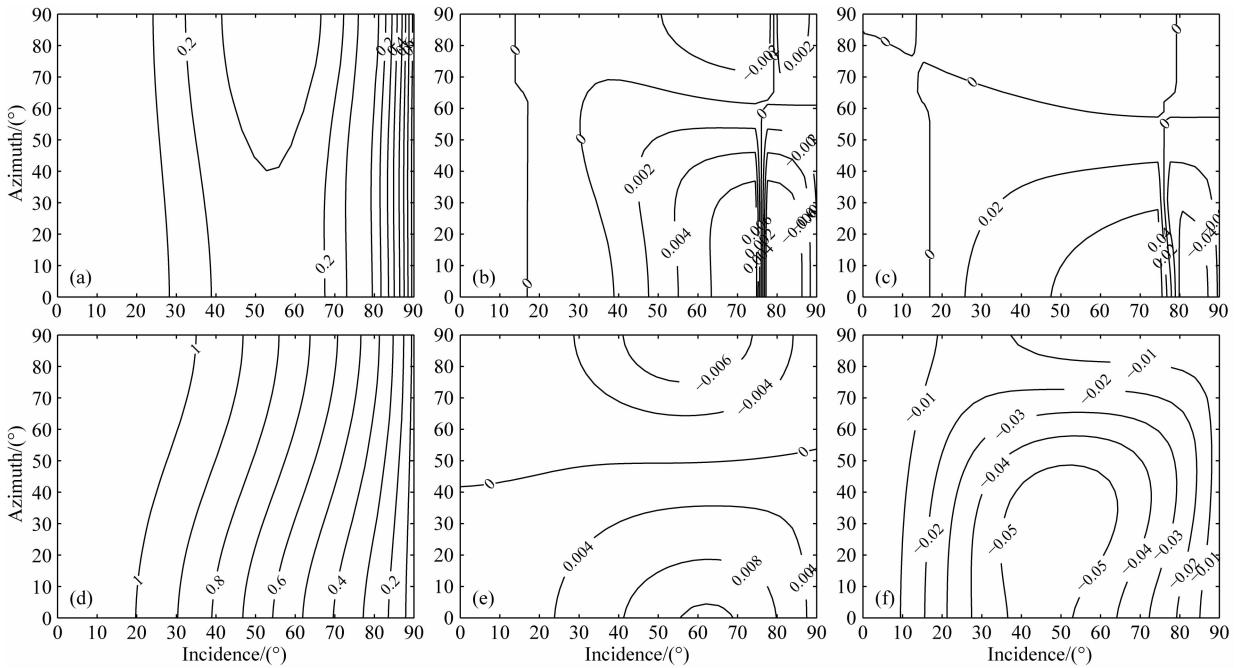


图 7 模型 B 的 P 波入射对应的 P 波反射系数和 qP 波透射系数,其它与图 4 类似

Fig. 7 P wave reflection coefficient and qP wave transmission coefficient corresponding to incident P wave for model B. Others are similar to Fig. 4, but for model B

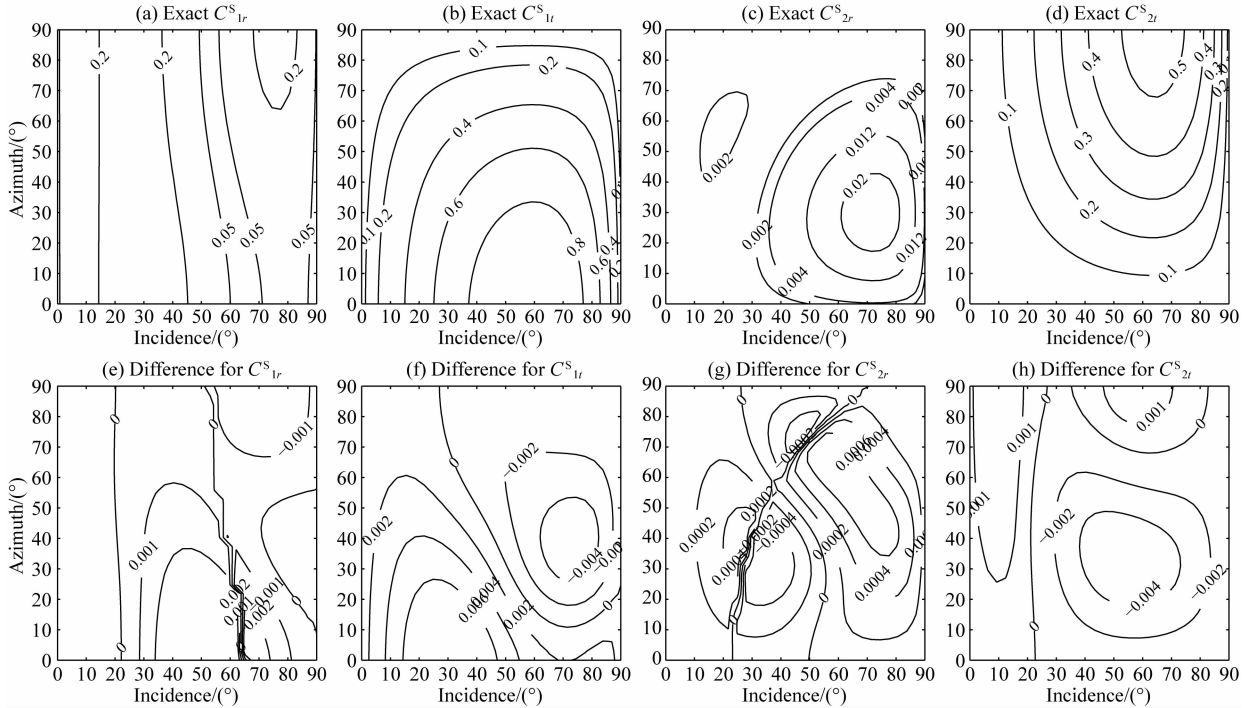


图 8 模型 B 的以 P 波入射对应的 S 波反射系数、qS 波透射系数的精确解和二阶近似解与精确解的差值,其他与图 5 类似

Fig. 8 S wave reflection coefficients and qS wave transmission coefficients corresponding to incident P wave for model B. Others are similar to Fig. 5, but for model B

对于强各向异性介质来说,一阶近似已经无法准确计算 R/T 系数,而考虑了速度和偏振方向二阶修正项的 R/T 系数能够较好地逼近准确值,因此,基于二阶近似 R/T 系数计算方法同样能够适应强

各向异性介质.

2.3 qP 波从弱各向异性 TTI 介质入射至倾斜的强正交各向异性介质

以上的例子均使用含有较简单的倾角(90°或

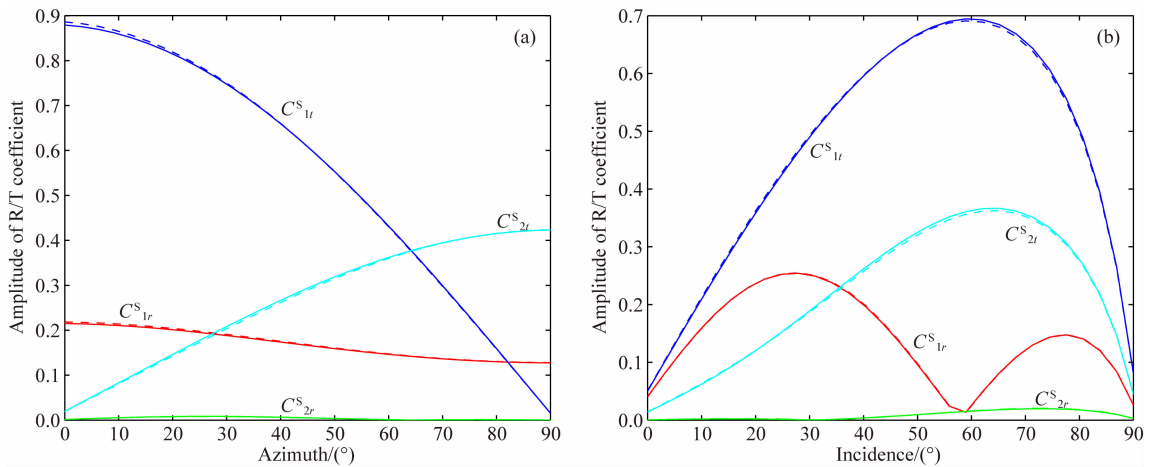


图 9 当(a)固定入射倾角为 45° , (b)固定入射方位角为 45° 时, 模型 B 的 qS(S)波 R/T 系数精确解(实线)和二阶近似解(虚线)

Fig. 9 The exact (solid line) and 2nd-order (dashed line) qS(S) wave R/T coefficients for model B when (a) the incidence is fixed as 45° , (b) the azimuth is fixed as 45°

0°)信息的各向异性旋转矩阵,下面给出一个例子来说明当各向异性坐标系的各对称轴均与界面法线方向不符时,基于二阶近似的 R/T 系数计算仍旧有效.

模型 C 的入射 qP 波所在的上层为 TTI 介质,参数分别为

$$\begin{aligned} v_p &= 5, v_s = 3.5, \rho = 2.65 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}, \\ \epsilon^1 &= \epsilon^2 = 0.10, \gamma^1 = \gamma^2 = 0.20, \delta^1 = \delta^2 = 0.15, \delta^3 = 0.0. \end{aligned} \quad (24)$$

同时,透射波所在的下层为强正交各向异性介质,参数为(Tsvankin, 1997)

$$\begin{aligned} v_p &= 3 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}, v_s = 2.0 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}, \rho = 2.65 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}, \\ \epsilon^1 &= 0.25, \gamma^1 = 0.28, \delta^1 = -0.1, \\ \epsilon^2 &= 0.45, \gamma^2 = 0.15, \delta^2 = 0.2, \delta^3 = -0.15. \end{aligned} \quad (25)$$

定义上下两层的旋转矩阵分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 &= \begin{bmatrix} \sin(10^\circ) & -\cos(10^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \cos(10^\circ) & \sin(10^\circ) & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{R}_2 &= \begin{bmatrix} \sin(45^\circ) & 0 & -\cos(45^\circ) \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos(45^\circ) & 0 & \sin(45^\circ) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (26)$$

通过对比图 10 中 qP 波 R/T 系数的二阶近似、一阶近似与准确解的差,可知,与模型 B 类似,当下层介质为强各向异性时,一阶近似的 qP 波 R/T 系数精度与弱各向异性的情况相比,有降低趋势.由于模型 C 下层的各向异性比模型 B 稍弱,其一阶近似解相较模型 B 的精度略有提高,但反射系数和折射系数的最大相对误差仍然达到近 25% 和 10%,而与

之对应的二阶近似解的最大相对误差则约为 10% 和 5%,比一阶提高了一倍左右,仍具有相对较高的精度.二阶近似和一阶近似的标准差分别为 0.0080、0.0141 ($|C^P_r|$) 和 0.0085、0.0544 ($|C^P_t|$) 也佐证了上述结论,即二阶近似解更接近精确解.

表 3 模型 C 中 qS 波二阶近似 R/T 系数的标准差

Table 3 Standard deviation of second-order approximation of qS waves R/T coefficients for model C

	C^S_{1r}	C^S_{1t}	C^S_{2r}	C^S_{2t}
标准差	0.0046	0.0177	0.0010	0.0036

接下来考察 qS 波相关的二阶近似解,如图 11,图 12, $C^S_{1r}, C^S_{1t}, C^S_{2r}, C^S_{2t}$ 的标准差见表 3. 四组 R/T 系数的精度对大多数入射角度来说较高,对波从弱各向异性介质入射至强各向异性介质的情况,二阶近似解也能较好地对 R/T 系数进行表达.

当界面法线方向与强各向异性定义坐标系的基向量不符时,处理各向异性的 Snell 定理表达式更为复杂,但是此方法得到的二阶近似的 R/T 系数仍然能与准确解高度近似,因此,使用与旋转矩阵相关的 Bond 矩阵计算二阶近似的 R/T 系数是有效的.

3 结论

复杂各向异性介质的描述需要同时考虑地质构造和介质的各向异性特征,使用合理的各向异性参数化方法能够更简便地表达介质信息.在正交各向异性中,相速度、群速度及偏振矢量等传播特征的计

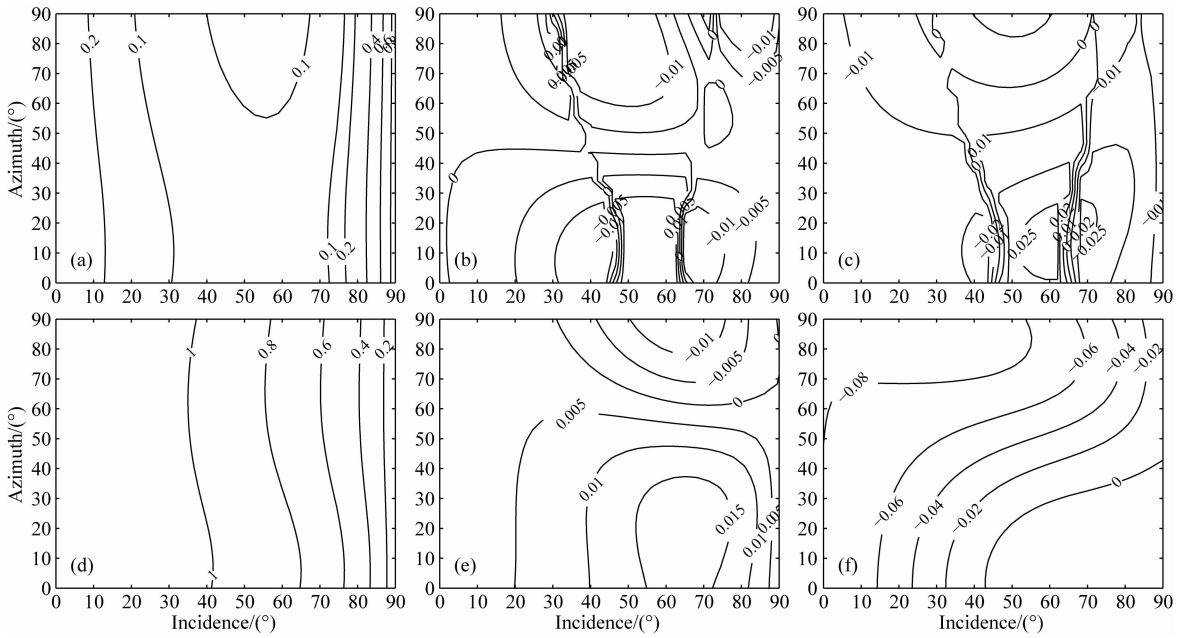


图 10 模型 C 的 qP 波入射对应的 qP 波反射/透射系数,其他与图 4 类似

Fig. 10 qP wave R/T coefficients corresponding to incident qP wave for model C.

Others are similar to Fig. 4, just for model C

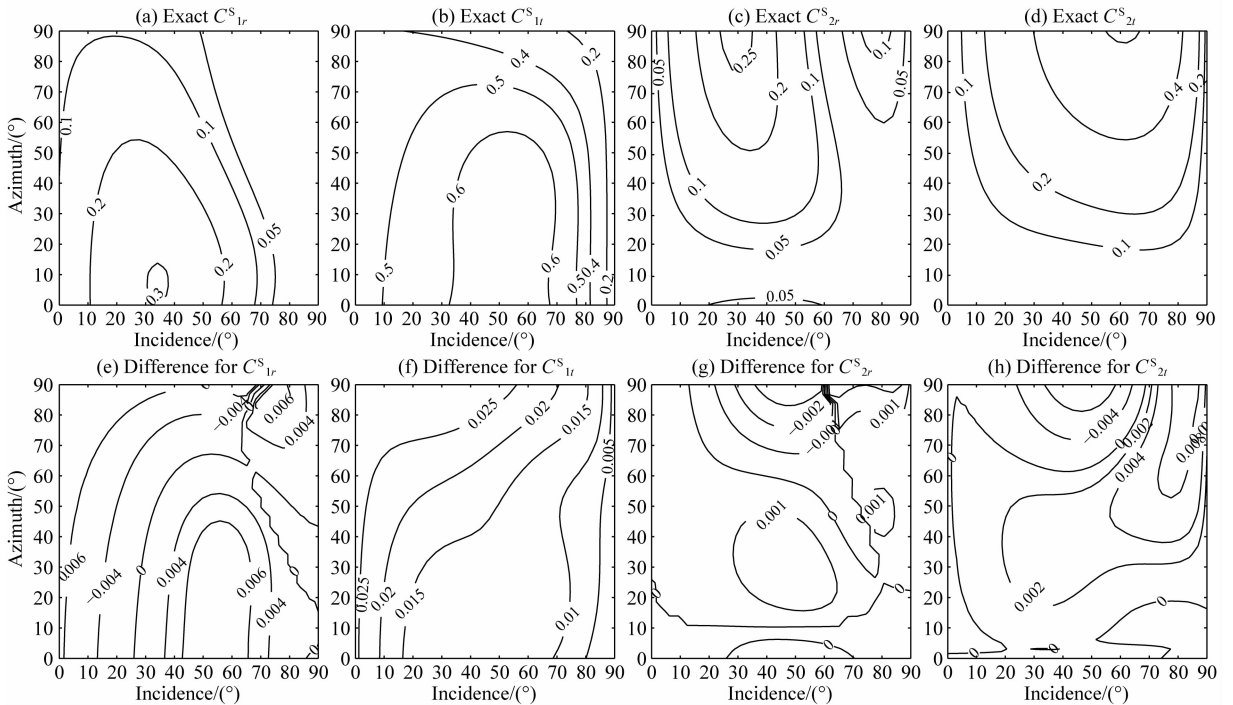


图 11 模型 C 的以 qP 波入射对应的 qS 波反射/透射系数的精确解和二阶近似解与精确解的差值,其他与图 5 类似

Fig. 11 qS wave R/T coefficients corresponding to incident qP wave for model C.

Others are similar to Fig. 5, just for model C

算比 TI 介质更为复杂,在特定的入射角范围内具有奇异性,qS 波在速度相近时的耦合性,且一阶近似仅针对弱各向异性介质.为了解决上述问题,我们通过结合基于迭代的相速度和偏振矢量的高阶近似与耦合 S 波射线理论,提出基于二阶近似的 R/T 系

数计算方法,对所有小于临界角的入射角均获得了较精确的解.奇点附近的二阶近似解的误差主要由近似慢度、偏振矢量与真实解的误差传递产生,由于其避免了奇异点异常,此误差在可接受的范畴内.根据此方法计算的二阶近似的 qP 波(P 波) R/T 系

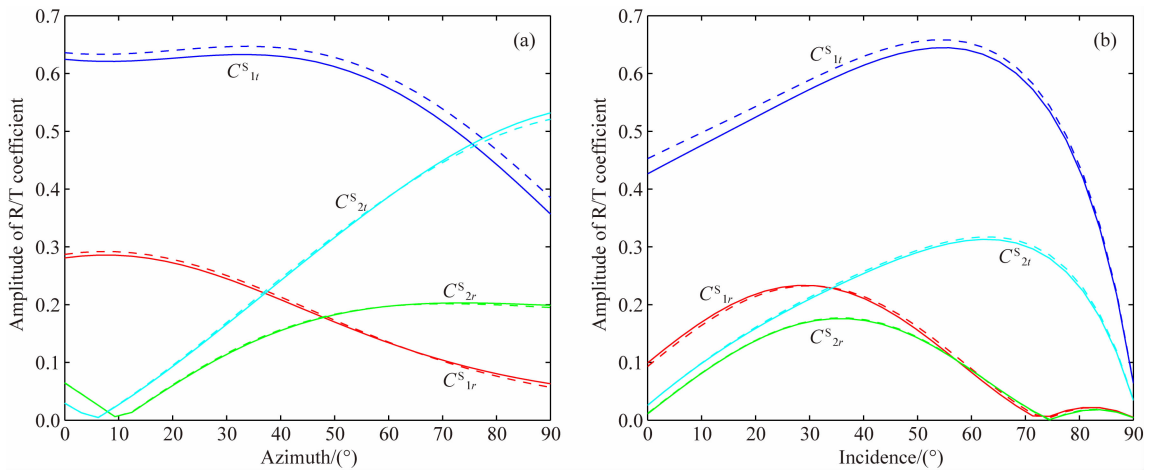


图 12 当(a)固定入射倾角为 45° , (b)固定入射方位角为 45° 时, 模型 C 的 qS 波 R/T 系数精确解(实线)和二阶近似解(虚线)

Fig. 12 The exact (solid line) and 2nd-order (dashed line) qS waves R/T coefficients for model C when (a) the incidence is fixed as 45° , (b) the azimuth is fixed as 45°

数与 Farra 和 Pšenčík(2010)的一阶近似结果相比, 在精度上有一定的提升, 并且由 Farra 方法无法计算的 qP-qS 转换波的 R/T 系数也能够通过我们的二阶近似表达, 在不增加过多计算量的前提下, 具有较高的精度. 同时, 对含有强各向异性介质的模型也有一定的适应性, 不需要界面上下介质弱差异的条件. 此方法可以配合常规的 R/T 系数计算方法, 针对强各向异性奇异点附近区域进行特殊处理. 由于我们除参数化方法外, 给出的表达式均为针对刚度矩阵的函数, 因此, 能够便于推广到比正交各向异性更复杂的各向异性介质正反演计算中.

附录

附录 A Tsvankin 各向异性参数表示及物理意义

设矩阵 \mathbf{A} 为 Voigt 形式密度正则化的 3×3 的刚度矩阵, Tsvankin 的 9 参数可以表示为

$$\begin{aligned}
 v_p &= \sqrt{A_{33}}, \quad v_s = \sqrt{A_{55}}, \\
 \epsilon^1 &= \frac{A_{22} - A_{33}}{2A_{33}}, \quad \gamma^1 = \frac{A_{66} - A_{55}}{2A_{55}}, \\
 \delta^1 &= \frac{(A_{23} + A_{44})^2 - (A_{33} - A_{44})^2}{2A_{33}(A_{33} - A_{44})}, \\
 \epsilon^2 &= \frac{A_{11} - A_{33}}{2A_{33}}, \quad \gamma^2 = \frac{A_{66} - A_{44}}{2A_{44}}, \\
 \delta^2 &= \frac{(A_{13} + A_{55})^2 - (A_{33} - A_{55})^2}{2A_{33}(A_{33} - A_{55})}, \\
 \delta^3 &= \frac{(A_{12} + A_{66})^2 - (A_{11} - A_{66})^2}{2A_{11}(A_{11} - A_{66})},
 \end{aligned} \tag{A1}$$

其中, v_p 为 P 波在垂直方向的速度分量大小, v_s 为在 x_1 方向偏振的 S 波垂直方向上的分量, $\epsilon^1, \gamma^1, \delta^1$ 相当于 $[x_1, x_3]$ 对称面上的 VTI 的 ϵ, γ, δ 参数, $\epsilon^2, \gamma^2, \delta^2$ 相当于 $[x_2, x_3]$ 对称面上的 VTI 的 ϵ, γ, δ 参数, δ^3 相当于 $[x_1, x_2]$ 对称面上的 VTI 的 δ 参数. 使用(A1)中所示的 9 个参数表达 VTI 介质时, 令 $\epsilon^1 = \epsilon^2, \gamma^1 = \gamma^2, \delta^1 = \delta^2 \delta^3 = 0$, 另外, 在表达各向同性的介质时, $\epsilon^1 = \epsilon^2 = \gamma^1 = \gamma^2 = \delta^1 = \delta^2 = \delta^3 = 0$. HTI, TTI 以及对称轴倾斜的正交各向异性介质可以通过增加一个关于坐标系的旋转矩阵(1)进行定义.

附录 B 二阶 Snell 定理相关变量表达式

为了辅助基于二阶近似的 Snell 定理的表示和推导, 我们给出一组三维正交基向量:

$$\begin{cases}
 \mathbf{e}^{[1]} = \frac{1}{p_r p_k} [p_1 p_3, p_2 p_3, -p_1^2 - p_2^2]^T, \\
 \mathbf{e}^{[2]} = \frac{1}{p_r} [-p_2, p_1, 0]^T, \\
 \mathbf{e}^{[3]} = \frac{1}{p_k} [p_1, p_2, p_3]^T,
 \end{cases} \tag{B1}$$

$$p_r = \sqrt{p_1^2 + p_2^2},$$

$$p_k = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}.$$

与式(5)类似, 定义 B_{ij} 为对称矩阵 $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ 的元素

$$B_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \Gamma_{kl} e_k^{[i]} e_l^{[j]}. \tag{B2}$$

由此, 根据式(8)和(B2), 在 \mathbf{x} 处与对应慢度向量 \mathbf{p} 相关的二阶近似的特征值及其关于 \mathbf{p} 的一阶导数为

$$G_p^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = B_{33} + \Delta, G_{S^M}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{B_{11} + B_{22}}{2} - \frac{\Delta}{2},$$

$$\frac{\partial G_P^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial p_i} = \frac{1}{p_k^4} \left[\frac{\partial b_{33}}{\partial p_i} p_k^2 - 2b_{33} p_i \right], \quad I = 1, 2$$

$$\frac{\partial G_{SM}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial p_3} = \frac{1}{p_k^4 p_r^4} \left[\frac{\partial b_M}{\partial p_3} p_k^2 p_r^2 - 2b_M p_3 p_r^2 \right], \quad (B3)$$

$$\frac{\partial G_{SM}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial p_1} = \frac{1}{p_k^4 p_r^4} \left[\frac{\partial b_M}{\partial p_1} p_k^2 p_r^2 - 2b_M p_1 (p_r^2 + p_k^2) \right],$$

其中, 各符号分别为

$$B_{11} = \frac{b_{11}}{p_k^2 p_r^2}, \quad B_{22} = \frac{b_{22}}{p_r^2}, \quad B_{33} = \frac{b_{33}}{p_k^2}, \quad B_{13} = \frac{b_{13}}{p_k^2 p_r}, \quad B_{23} = \frac{b_{23}}{p_k p_r},$$

$$B_M = \frac{B_{11} + B_{22}}{2} = \frac{b_M}{p_k^2 p_r^2}, \quad B_{\text{mid}} = B_{33} - B_M = \frac{b_{\text{mid}}}{p_k^2 p_r^2},$$

$$\Delta = \frac{B_{13} + B_{23}}{B_{\text{mid}}} = \frac{b_{13}^2 + b_{23}^2}{b_{\text{mid}}}, \quad (B4)$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial p_i} = \frac{\left(2b_{13} p_k^2 \frac{\partial b_{13}}{\partial p_i} - 2b_{13}^2 p_i + 2b_{23} p_k^4 \frac{\partial b_{23}}{\partial p_i} \right) b_{\text{mid}} - (b_{13}^2 p_k^2 + b_{23}^2 p_k^4) \frac{\partial b_{\text{mid}}}{\partial p_i}}{p_k^4 b_{\text{mid}}^2}.$$

由于 b_{ij} 可直接通过(B2)和(B4)求得, 下面只列出偏导数相关项:

$$\frac{\partial b_{\text{mid}}}{\partial p_1} = 2p_1 b_{33} + p_r^2 \frac{\partial b_{33}}{\partial p_1} - \frac{\partial b_M}{\partial p_1}, \quad I = 1, 2$$

$$\frac{\partial b_{\text{mid}}}{\partial p_3} = p_r^2 \frac{\partial b_{33}}{\partial p_3} - \frac{\partial b_M}{\partial p_3}, \quad (B5)$$

$$\begin{aligned} \frac{db_{13}}{dp_1} &= (4A_{11} - 8A_{55} - 4A_{13}) p_1^3 p_3 - (2A_{46} + A_{25}) p_2^4 + (9A_{15} - 9A_{35}) p_1^2 p_3^2 \\ &+ (8A_{66} - 4A_{55} - 4A_{44} + 4A_{12} - 2A_{13} - 2A_{23}) p_1 p_2^2 p_3 + (12A_{56} - 6A_{34} + 6A_{14}) p_1 p_2 p_3^2 \\ &+ (4A_{55} - 2A_{33} + 2A_{13}) p_1 p_3^3 + (4A_{26} - 4A_{45} - 2A_{36}) p_2^3 p_3 - (4A_{14} + 8A_{56}) p_1^3 p_2 \\ &+ (6A_{46} - 3A_{35} + 3A_{25}) p_2^2 p_3^2 - 5A_{15} p_1^4 + A_{35} p_3^4 - (2A_{14} + 2A_{24} + 4A_{56}) p_1 p_2^3 \\ &- (6A_{46} + 3A_{25} + 3A_{15}) p_1^2 p_2^2 + (12A_{16} - 12A_{45} - 6A_{36}) p_1^2 p_2 p_3 + (4A_{45} + 2A_{36}) p_2 p_3^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{db_{13}}{dp_2} &= (4A_{16} - 4A_{45} - 2A_{36}) p_1^3 p_3 - (8A_{46} + 4A_{25}) p_1 p_2^3 + (4A_{45} + 2A_{36}) p_1 p_3^3 \\ &+ (6A_{56} - 3A_{34} + 3A_{14}) p_1^2 p_3^2 + (12A_{26} - 12A_{45} - 6A_{36}) p_1 p_2^2 p_3 + (9A_{24} - 9A_{34}) p_2^2 p_3^2 \\ &+ (12A_{46} - 6A_{35} + 6A_{25}) p_1 p_2 p_3^2 + (4A_{22} - 4A_{23} - 8A_{44}) p_2^3 p_3 - (A_{14} + 2A_{56}) p_1^4 \\ &+ (4A_{44} - 2A_{33} + 2A_{23}) p_2 p_3^3 + A_{34} p_3^4 - (3A_{14} + 3A_{24} + 6A_{56}) p_1^2 p_2^2 - 5A_{24} p_2^4 \\ &- (4A_{46} + 2A_{25} + 2A_{15}) p_1^3 p_2 + (8A_{66} - 4A_{55} - 4A_{44} + 4A_{12} - 2A_{13} - 2A_{23}) p_1^2 p_2 p_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{db_{13}}{dp_3} &= (A_{11} - 2A_{55} - A_{13}) p_1^4 + (4A_{16} - 4A_{45} - 2A_{36}) p_1^3 p_2 + (6A_{15} - 6A_{35}) p_1^3 p_3 \\ &+ (4A_{66} - 2A_{55} - 2A_{44} + 2A_{12} - A_{13} - A_{23}) p_1^2 p_2^2 + (12A_{56} - 6A_{34} + 6A_{14}) p_1^2 p_2 p_3 \\ &+ (6A_{55} - 3A_{33} + 3A_{13}) p_1^2 p_3^2 + (4A_{26} - 4A_{45} - 2A_{36}) p_1 p_2^3 + (6A_{24} - 6A_{34}) p_2^3 p_3 \\ &+ (12A_{46} - 6A_{35} + 6A_{25}) p_1 p_2^2 p_3 + (A_{22} - A_{23} - 2A_{44}) p_2^4 + 4A_{34} p_2 p_3^3 \\ &+ (12A_{45} + 6A_{36}) p_1 p_2 p_3^2 + 4A_{35} p_1 p_3^3 + (6A_{44} - 3A_{33} + 3A_{23}) p_2^2 p_3^2. \quad (B6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{db_{23}}{dp_1} &= (6A_{66} - 3A_{11} + 3A_{12}) p_1^2 p_2 + (6A_{26} - 6A_{16}) p_1 p_2^2 + (3A_{14} + 6A_{56}) p_1^2 p_3 \\ &+ (4A_{25} + 8A_{46} - 6A_{15}) p_1 p_2 p_3 + (2A_{36} + 4A_{45}) p_1 p_3^2 + (A_{22} - A_{12} - 2A_{66}) p_2^3 \\ &+ (2A_{44} - A_{13} - 2A_{55} + A_{23}) p_2 p_3^2 + 4A_{16} p_1^3 + A_{34} p_3^3 + (3A_{24} - 4A_{56} - 2A_{14}) p_2^2 p_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{db_{23}}{dp_2} &= (2A_{66} - A_{11} + A_{12}) p_1^3 + (6A_{26} - 6A_{16}) p_1^2 p_2 + (2A_{25} + 4A_{46} - 3A_{15}) p_1^2 p_3 \\ &+ (3A_{22} - 3A_{12} - 6A_{66}) p_1 p_2^2 + (6A_{24} - 8A_{56} - 4A_{14}) p_1 p_2 p_3 - (2A_{36} + 4A_{45}) p_2 p_3^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (2A_{44} - A_{13} - 2A_{55} + A_{23})p_1p_3^2 - 4A_{26}p_2^3 - (6A_{46} + 3A_{25})p_2^2p_3 - A_{35}p_3^3, \\
\frac{db_{23}}{dp_3} & = (2A_{25} + 4A_{46} - 3A_{15})p_1^2p_2 + (3A_{24} - 4A_{56} - 2A_{14})p_1p_2^2 - 3A_{35}p_2p_3^2 \\
& + (4A_{44} - 2A_{13} - 4A_{55} + 2A_{23})p_1p_2p_3 - (2A_{46} + A_{25})p_2^3 - (2A_{36} + 4A_{45})p_2^2p_3 \\
& + (A_{14} + 2A_{56})p_1^3 + (2A_{36} + 4A_{45})p_1^2p_3 + 3A_{34}p_1p_3^2. \tag{B7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{db_M}{dp_1} & = (2A_{11} + 2A_{33} + 2A_{66} + 2A_{44} - 4A_{13} - 4A_{55})p_1^3p_3^2 + (3A_{15} + 3A_{46} - 3A_{35})p_1^2p_3^3 \\
& + (3A_{16} + 3A_{26} - 9A_{45} - 6A_{36})p_1^2p_2p_3^2 + (A_{22} + A_{55} + A_{11} - A_{66} - 2A_{12} + 2A_{44})p_1p_2^4 \\
& + (2A_{66} + 2A_{33} - 2A_{13} - 2A_{23} - A_{55} - A_{44} + A_{11} + A_{22})p_1p_2^2p_3^2 + (3A_{55} + 3A_{66})p_1^5 \\
& + (2A_{56} + 2A_{24} - 2A_{34})p_1p_2p_3^3 + (A_{44} + A_{55})p_1p_3^4 + (A_{26} + A_{16} - 3A_{45} - 2A_{36})p_2^3p_3^2 \\
& + (2A_{11} - 2A_{66} + 2A_{44} + 2A_{22} - 4A_{12} + 4A_{55})p_1^3p_2^2 + (A_{35} + A_{15} - 3A_{46} - 2A_{25})p_2^4p_3 \\
& + (A_{45} + A_{16} - A_{26})p_2^5 + (5A_{35} + 5A_{46} - 5A_{15})p_1^4p_3 + (6A_{35} - 6A_{46} - 6A_{25})p_1^2p_2^2p_3 \\
& + (5A_{45} + 5A_{26} - 5A_{16})p_1^4p_2 + (4A_{34} - 4A_{14} - 4A_{56})p_1p_2^3p_3 + (A_{46} - A_{35} + A_{15})p_2^2p_3^3 \\
& + (4A_{34} - 12A_{56} - 8A_{14} + 4A_{24})p_1^3p_2p_3 + 6A_{45}p_1^2p_3^3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{db_M}{dp_2} & = (2A_{66} + 2A_{33} - 2A_{13} - 2A_{23} - A_{55} - A_{44} + A_{11} + A_{22})p_1^2p_2p_3^2 + (3A_{44} + 3A_{66})p_2^5 \\
& + (A_{16} + A_{26} - 3A_{45} - 2A_{36})p_1^3p_3^2 + (2A_{22} + 2A_{33} + 2A_{55} + 2A_{66} - 4A_{23} - 4A_{44})p_2^3p_3^2 \\
& + (4A_{35} + 4A_{15} - 12A_{46} - 8A_{25})p_1p_2^3p_3 + (5A_{45} + 5A_{16} - 5A_{26})p_1p_2^4 \\
& + (A_{34} - 3A_{56} - 2A_{14} + A_{24})p_1^4p_3 + (3A_{24} + 3A_{56} - 3A_{34})p_2^2p_3^3 + (A_{44} + A_{55})p_2^4p_3^4 \\
& + (3A_{26} + 3A_{16} - 9A_{45} - 6A_{36})p_1p_2^2p_3^2 + (2A_{46} + 2A_{15} - 2A_{35})p_1p_2p_3^3 \\
& + (A_{56} + A_{24} - A_{34})p_1^2p_3^3 + (5A_{34} - 5A_{24} + 5A_{56})p_2^4p_3 + (A_{45} + A_{26} - A_{16})p_1^5 \\
& + (2A_{22} + 2A_{55} + 2A_{11} - 2A_{66} - 4A_{12} + 4A_{44})p_1^2p_2^3 + 6A_{45}p_1^3p_2^2 \\
& + (4A_{35} - 4A_{46} - 4A_{25})p_1^3p_2p_3 + (6A_{34} - 6A_{14} - 6A_{56})p_1^2p_2^2p_3 \\
& + (A_{11} - A_{66} + A_{44} + A_{22} - 2A_{12} + 2A_{55})p_1^4p_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{db_M}{dp_3} & = (A_{11} + A_{33} + A_{66} + A_{44} - 2A_{13} - 2A_{55})p_1^4p_3 + (3A_{56} + 3A_{24} - 3A_{34})p_1^2p_2p_3^2 \\
& + (2A_{16} + 2A_{26} - 6A_{45} - 4A_{36})p_1^3p_2p_3 + (2A_{26} + 2A_{16} - 6A_{45} - 4A_{36})p_1p_2^3p_3 \\
& + (2A_{44} + 2A_{55})p_1^2p_3^3 + (2A_{66} + 2A_{33} - 2A_{13} - 2A_{23} - A_{55} - A_{44} + A_{11} + A_{22})p_1^2p_2^2p_3 \\
& + (3A_{15} + 3A_{46} - 3A_{35})p_1^3p_3^2 + (A_{35} + A_{46} - A_{15})p_1^5 + (3A_{46} + 3A_{15} - 3A_{35})p_1p_2^2p_3^2 \\
& + (2A_{35} - 2A_{46} - 2A_{25})p_1^3p_2^2 + (A_{22} + A_{33} + A_{55} + A_{66} - 2A_{23} - 2A_{44})p_2^4p_3 \\
& + (A_{34} - 3A_{56} - 2A_{14} + A_{24})p_1^4p_2 + (A_{34} - A_{24} + A_{56})p_2^5 + (2A_{34} - 2A_{14} - 2A_{56})p_1^2p_2^3p_3 \\
& + (3A_{24} + 3A_{56} - 3A_{34})p_2^3p_3^2 + (A_{35} + A_{15} - 3A_{46} - 2A_{25})p_1p_2^4 + (2A_{44} + 2A_{55})p_2^2p_3^3. \tag{B8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{db_{33}}{dp_1} & = 4A_{11}p_1^3 + 12A_{16}p_1^2p_2 + 12A_{15}p_1^2p_3 + (8A_{66} + 4A_{12})p_1p_2^2 \\
& + (8A_{55} + 4A_{13})p_1p_3^2 + 4A_{26}p_2^3 + (8A_{46} + 4A_{25})p_2^2p_3 + (8A_{45} + 4A_{36})p_2p_3^2 \\
& + 4A_{35}p_3^3 + (16A_{56} + 8A_{14})p_1p_2p_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{db_{33}}{dp_2} & = 4A_{16}p_1^3 + (8A_{66} + 4A_{12})p_1^2p_2 + (8A_{56} + 4A_{14})p_1^2p_3 + 12A_{26}p_1p_2^2 \\
& + (16A_{46} + 8A_{25})p_1p_2p_3 + 4A_{22}p_2^3 + 12A_{24}p_2^2p_3 + (8A_{44} + 4A_{23})p_2p_3^2 \\
& + (8A_{45} + 4A_{36})p_1p_3^2 + 4A_{34}p_3^3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{db_{33}}{dp_3} & = 4A_{15}p_1^3 + (8A_{56} + 4A_{14})p_1^2p_2 + (8A_{55} + 4A_{13})p_1^2p_3 + (8A_{46} + 4A_{25})p_1p_2^2 \\
& + 4A_{24}p_2^3 + (8A_{44} + 4A_{23})p_2^2p_3 + (16A_{45} + 8A_{36})p_1p_2p_3 \\
& + 12A_{35}p_1p_3^2 + 12A_{34}p_2p_3^2 + 4A_{33}p_3^3. \tag{B9}
\end{aligned}$$

当介质为定义在全局坐标系下的正交各向异性时, (B6)–(B9)中除了 $A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{44}, A_{55}, A_{66}, A_{12}, A_{13}, A_{23}$ 项(即(A1)中定义项),其余项均为 0.

References

- Cerveny. 2001. *Seismic Ray Theory*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Chapman C H. 1994. Reflection/transmission coefficient reciprocities in anisotropic media. *Geophysical Journal International*, 116(2): 498-501, doi: 10.1111/j.1365-246X.1994.tb01811.x.
- Coates R T, Chapman C H. 1990. Quasi-shear wave coupling in weakly anisotropic 3-D media. *Geophysical Journal International*, 103(2): 301-320, doi: 10.1111/j.1365-246X.1990.tb01773.x.
- Daley P F, Hron F. 1977. Reflection and transmission coefficients for transversely isotropic media. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 67(8): 661-675.
- Farra V. 2001. High-order perturbations of the phase velocity and polarization of qP and qS waves in anisotropic media. *Geophysical Journal International*, 147(1): 90-104, doi: 10.1046/j.1365-246X.2001.00510.x.
- Farra V, Pšenčík I. 2008. First-order ray computations of coupled S waves in inhomogeneous weakly anisotropic media. *Geophysical Journal International*, 173(3): 979-989, doi: 10.1111/j.1365-246X.2008.03778.x.
- Farra V, Pšenčík I. 2010. First-order reflection/transmission coefficients for unconverted plane P waves in weakly anisotropic media. *Geophysical Journal International*, 183(3): 1443-1454, doi: 10.1111/j.1365-246X.2010.04794.x.
- Grechka V. 2015. Shear-wave group-velocity surfaces in low-symmetry anisotropic media. *Geophysics*, 80(1): C1-C7, doi: 10.1190/GEO2014-0156.1.
- Hao Q, Stovas A. 2016. Analytic calculation of phase and group velocities of P-waves in orthorhombic media. *Geophysics*, 81(3): C79-C97, doi: 10.1190/geo2015-0156.1.
- Huang J Q, Li Z C. 2017. Modeling and reverse time migration of pure quasi-P-waves in complex TI media with a low-rank decomposition. *Chinese Journal of Geophysics* (in Chinese), 60(2): 704-721, doi: 10.6038/cjg20170223.
- Jilek P. 2002. Converted PS-wave reflection coefficients in weakly anisotropic media. *Pure and Applied Geophysics*, 159(7-8): 1527-1562, doi: 10.1007/s00024-002-8696-9.
- Klimesš L. 2006. Common-ray tracing and dynamic ray tracing for S waves in a smooth elastic anisotropic medium. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 50(3): 449-461, doi: 10.1007/s11200-006-0028-6.
- Li Z C, Huang J Q, Huang J P, et al. 2017. Fast least-squares reverse time migration based on plane-wave encoding for VTI media. *Chinese Journal of Geophysics* (in Chinese), 60(1): 240-257, doi: 10.6038/cjg20170120.
- Liang K, Yin X Y, Wu G C. 2011. Exact and approximate reflection and transmission coefficient for incident qP wave in TTI media. *Chinese Journal of Geophysics* (in Chinese), 54(1): 208-217, doi: 10.3969/j.issn.0001-5733.2011.01.022.
- Lu M H, Tang J H, Yang H Z, et al. 2005. P-wave traveltime analysis and Thomsen parameters inversion in orthorhombic media. *Chinese Journal of Geophysics* (in Chinese), 48(5): 1167-1171, doi: 10.3321/j.issn:0001-5733.2005.05.026.
- Schoenberg M, Helbig K. 1997. Orthorhombic media: Modeling elastic wave behavior in a vertically fractured earth. *Geophysics*, 62(6): 1954-1974, doi: 10.1190/1.1444297.
- Slawinski M A, Slawinski R A, Brown R J, et al. 2000. A generalized form of Snell's law in anisotropic media. *Geophysics*, 65(2): 632-637, doi: 10.1190/1.1444759.
- Sripanich Y, Fomel S. 2015. On anelliptic approximations for qP velocities in transversely isotropic and orthorhombic media. *Geophysics*, 80(5): C89-C105, doi: 10.1190/geo2014-0534.1.
- Sripanich Y, Fomel S, Sun J Z, et al. 2017. Elastic wave-vector decomposition in heterogeneous anisotropic media. *Geophysical Prospecting*, 65(5): 1231-1245, doi: 10.1111/1365-2478.12482.
- Thomsen L. 1986. Weak elastic anisotropy. *Geophysics*, 51(10): 1954-1966, doi: 10.1190/1.1442051.
- Tsvankin I. 1997. Anisotropic parameters and P-wave velocity for orthorhombic media. *Geophysics*, 62(4): 1292-1309, doi: 10.1190/1.1444231.
- Vavryčuk V. 2003. Behavior of rays near singularities in anisotropic media. *Physical Review B*, 67(5): 054105, doi: 10.1103/PhysRevB.67.054105.
- Wu G C, Liang K, Yin X Y. 2010. The analysis of phase velocity and polarization feature for elastic wave in TTI media. *Chinese Journal of Geophysics* (in Chinese), 53(8): 1914-1923, doi: 10.3969/j.issn.0001-5733.2010.08.017.
- Xu S B, Stovas A. 2017. A new parameterization for acoustic orthorhombic media. *Geophysics*, 82(6): C229-C240, doi: 10.1190/GEO2017-0215.1.

附中文参考文献

- 黄金强, 李振春. 2017. 基于 Low-rank 分解的复杂 TI 介质纯 qP 波正演模拟与逆时偏移. *地球物理学报*, 60(2): 704-721, doi: 10.6038/cjg20170223.
- 李振春, 黄金强, 黄建平. 2017. 基于平面波加速的 VTI 介质最小二乘逆时偏移. *地球物理学报*, 60(1): 240-257, doi: 10.6038/cjg2017012.
- 梁锴, 印兴耀, 吴国忱. 2011. TTI 介质 qP 波入射精确和近似反射透射系数. *地球物理学报*, 54(1): 208-217, doi: 10.3969/j.issn.0001-5733.2011.01.022.
- 卢明辉, 唐建侯, 杨慧珠. 2005. 正交各向异性介质 P 波走时分析及 Thomsen 参数反演. *地球物理学报*, 48(5): 1167-1171, doi: 10.3321/j.issn:0001-5733.2005.05.026.
- 吴国忱, 梁锴, 印兴耀. 2010. TTI 介质弹性波相速度与偏振特征分析. *地球物理学报*, 53(8): 1914-1923, doi: 10.3969/j.issn.0001-5733.2010.08.017.