天津商业大学 2019 年研究生入学考试试题

专　　业：统计学

课程名称：高等数学（714）　　　　共 3 页 第 1 页

说明：答案标明题号写在答题纸上，写在试题纸上的无效。

一、选择题 （ 1—10 小题，每小题 5 分，共 50 分）

1．已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $f(1)=2$，则 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x^2-x}\int_{x^2}^{1} f(t)dt=$

(A) 1　　(B) 2　　(C) -1　　(D) -2

2．定积分 $\int_0^1 \arcsin x dx=$

(A) $\dfrac{\pi}{2}-1$　　(B) $\sin 1$　　(C) 1　　(D) $\dfrac{\pi}{2}$

3．　设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(z+x)^y=xyz$ 确定的，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,1)}=$

(A) -3　　(B) 3　　(C) $8\ln 2-4$　　(D) $4-8\ln 2$

4．　函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\ln(1+t) \\ y=\dfrac{1}{1+t} \end{cases}$ 确定，求则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=$

(A) $-\dfrac{1}{2}$　　(B) $\dfrac{1}{2}$　　(C) $-\dfrac{1}{4}$　　(D) $\dfrac{1}{4}$

5．微分方程 $y''+y'=-2e^{-x}$ 的通解为

(A) $y=Ce^{-x}+2xe^{-x}$　　(B) $y=2xe^{-x}+C_1e^{-x}+C_2$

(C) $y=Ce^{-x}+(2x+2)e^{-x}$　　(D) $y=2e^{-x}+C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}$

6．求 $\iint\limits_D |x-y|d\sigma$，其中 D 是由 $x=0, x=1, y=0, y=1$ 围成

(A) $\dfrac{2}{3}$　　(B) $\dfrac{1}{2}$　　(C) $\dfrac{1}{3}$　　(D) $\dfrac{1}{6}$

7．设 A_{ij} 是 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \\ 4 & 4 & 1 & 4 \\ 8 & -8 & -1 & 8 \end{vmatrix}$ 的第 i 行第 j 列元素的代数余子式，则 $A_{11}+A_{21}+A_{31}+A_{41}=$

(A) 72　　(B) 96　　(C) 128　　(D) 0

8．已知矩阵 $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ 与矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ 合同，则 a 满足

(A) $a \ge 1$　　(B) $0 \le a \le 1$　　(C) $a = 0$　　(D) $a = 1$

9. A 可逆，A^* 是 A 的伴随矩阵，则 $(A^*)^*$ 的逆矩阵为

(A) $|A|^{1-n} A^{-1}$　　(B) $|A|^{n-1} A^{-1}$　　(C) $|A|^{2-n} A^{-1}$　　(D) $|A|^{n-2} A^{-1}$

10. 已知由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵为 P，基 β_1,β_2,β_3 到基 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 的过渡矩阵为 Q，且 η 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为 X，则 η 在 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 下的坐标为

(A) PQX　　(B) $P^{-1}Q^{-1}X$　　(C) QPX　　(D) $Q^{-1}P^{-1}X$

二、计算题 （ 11—17 小题，共 75 分）

11(10 分). 已知生产函数为 $Q = 3x_1^{1/3}x_2^{2/3}$，　其中 x_1, x_2 表示两种生产要素的投入量，当两种要素的价格分别为 p_1, p_2，产出量为 12 时，求两种要素各投入多少时可使总费用最少。

12(15 分).　求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{n+1}}{n}$ 收敛半径、收敛域，以及和函数。

13(10 分).　讨论 $\int_e^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^p x}$ 的收敛性，其中 $p > 0$。

14(10 分). 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(\cos x)}{x} & x>0\\ 0 & x=0\\ x^2\sin\dfrac{1}{x} & x<0\end{cases}$，讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的左、右连续性及连续性，讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的左、右可导性及可导性。

15(10 分). A 为 3 阶实对称矩阵，$r(A)=1$，且方程组 $(A-E)X=0$ 的基础解系为 $(1,1,-2)^T$，其中 E 为 3 阶单位矩阵。

(1)求矩阵 A 的特征值和特征向量；

(2)求矩阵 Q 使得 $Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\Lambda$ 为对角矩阵。

16(10 分). 方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1\\ x_1+kx_2+x_3=1\\ x_1+x_2-kx_3=3\end{cases}$ 何时有唯一解、无解、无穷多解？无穷多解时求出解。

17(10 分). 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&1&t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，

(1)求 t 为何值时，$f(x_1,x_2,x_3)$ 为正定二次型；

(2)当 $t=1$ 时，化二次型为标准型和规范型，并给出所用的可逆线性变换。

三、证明题　（18—19 小题，共 25 分）

18(15 分).

1）(10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，满足 $2f(\xi)=f'(\xi)$。

2）(5 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 xf(x)dx=1$，证明：存在 $\xi\in[0,1]$，满足 $f(\xi)=2$。

19(10 分). 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关 $(n\geq 2)$，证明：$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\beta_n=\alpha_n+\alpha_1$ 也线性无关的充分必要条件是 n 为奇数。