



山东协和学院

Shandong Xiehe University

# 电工电子技术

## 项目二 正弦交流电路

第一节：正弦量的基本概念及三要素

第二节：复数及其运算

第三节：正弦量的相量表示

第四节：单一参数的正弦交流电

第五节：RLC串联、RLC并联

第六节：交流电路的功率

第七节：功率因数

## 第五节、串联交流电路

### 一、 $R$ 、 $L$ 、 $C$ 串联电路

根据KVL  $u = u_R + u_L + u_C$

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C$$

$$= R\dot{I} + jX_L\dot{I} - jX_C\dot{I}$$

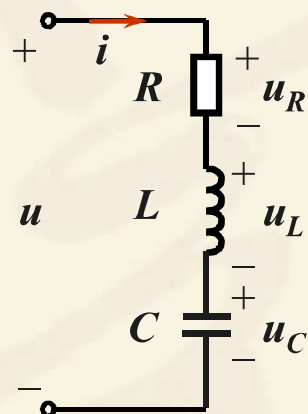
$$= [R + j(X_L - X_C)]\dot{I}$$

$$= \underbrace{[R + j(X_L - X_C)]}_{\text{复数阻抗: } Z}\dot{I}$$

复数阻抗:  $Z$

$$Z = R + j(X_L - X_C)$$

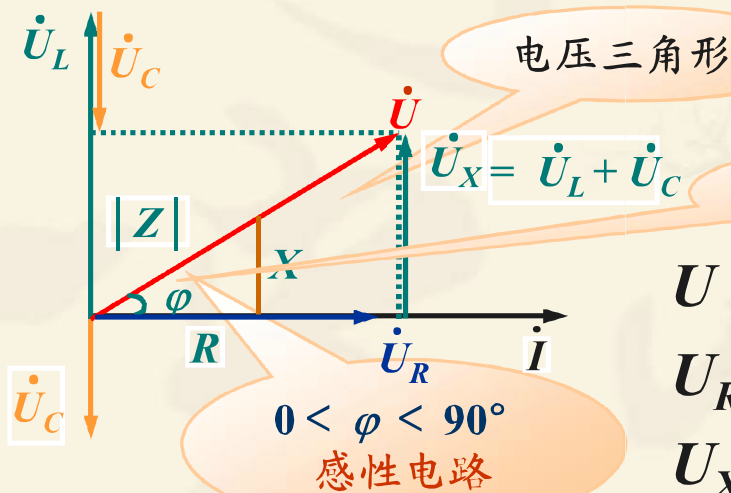
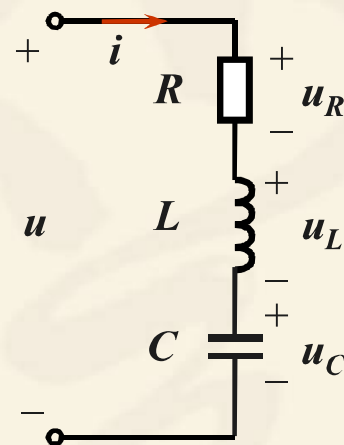
$$= R + jX = \sqrt{R^2 + X^2} \angle \arctan(X/R)$$



阻抗:  $|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$   
 $= U / I$

阻抗角:  $\varphi = \arctan (X / R)$   
 $= \psi_u - \psi_i$

相量图:  $\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C$

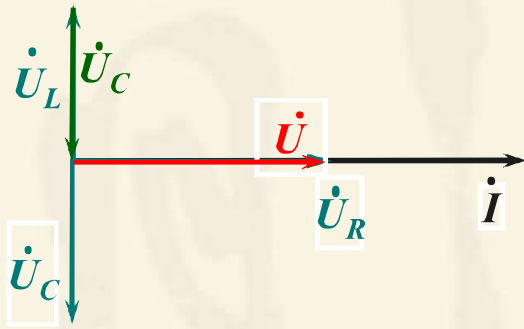


$U = |Z| I$

$U_R = R I$

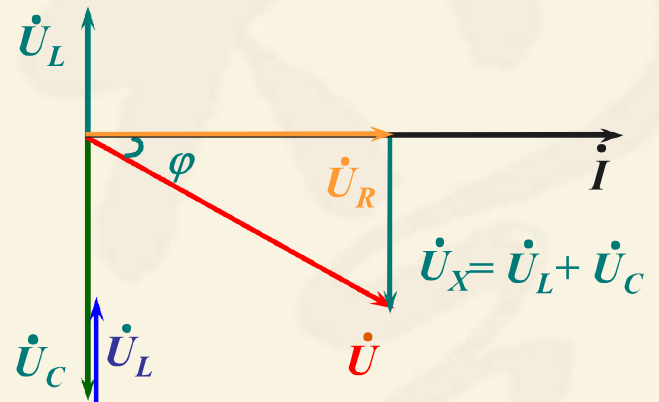
$U_X = X I = (X_L - X_C) I$





$$\varphi = 0^\circ$$

电路呈阻性



$$-90^\circ < \varphi < 90^\circ$$

电路呈容性



**[例 1]** 已知  $U = 12 \text{ V}$ ,  $R = 3 \Omega$ ,  $X_L = 4 \Omega$ 。求：  
 (1)  $X_C$  为何值时 ( $X_C \neq 0$ )，开关 S 闭合前后，电流  $I$  的有效值不变。这时的电流是多少？  
 (2)  $X_C$  为何值时，开关 S 闭合前电流  $I$  最大，这时的电流是多少？

**[解]** (1) 开关闭合前后电流  $I$  有效值不变，则开关闭合前后电路的阻抗模相等。

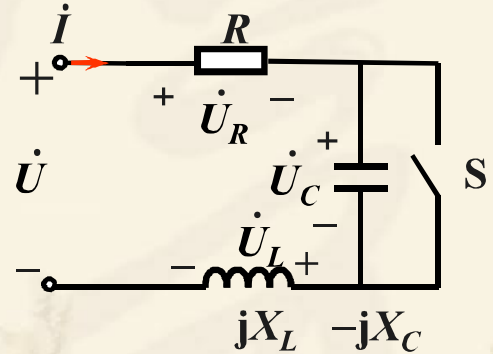
$$\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X_L^2}$$

故  $(X_L - X_C)^2 = X_L^2$

因  $X_C \neq 0$ ，求得  $X_C = 2X_L = 2 \times 4 \Omega = 8 \Omega$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} \Omega = 5 \Omega$$

$$I = \frac{U}{|Z|} = 2.4 \text{ A}$$



(2) 开关闭合前,  $X_L = X_C$  时,  $|Z|$  最小, 电流最大,

$$\text{故 } X_C = X_L = 4 \Omega$$

$$|Z| = R = 3 \Omega$$

$$I = \frac{U}{|Z|} = 4 \text{ A}$$



## 二、阻抗串联电路

KVL:

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2$$

$$\dot{U} = Z_1 \dot{I} + Z_2 \dot{I}$$

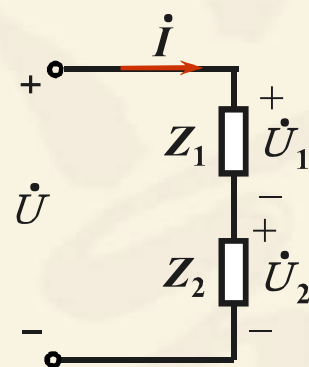
$$= (Z_1 + Z_2) \dot{I}$$

$$= Z \dot{I}$$

$$Z = Z_1 + Z_2$$

$$= (R_1 + R_2) + j(X_1 + X_2)$$

$$Z = \sum Z_i = \sum R_i + j \sum X_i$$





**[例2]** 有一个  $R$ 、 $C$  串联的负载， $R = 6 \Omega$ ， $C = 159 \mu\text{F}$ 。由工频的交流电源通过一段导线向它供电，测得电流为  $1.76 \text{ A}$ 。已知输电线的电阻  $R_{\text{W}} = 0.5 \Omega$ ，电感  $L_{\text{W}} = 2 \text{ mH}$ 。试求输电线上的电压降、负载的电压、电源的电压，并画出相量图。

**[解]**  $\dot{i} = 1.76 \angle 0^\circ \text{ A}$

$$X_{L\text{W}} = 2\pi f L_{\text{W}} = 0.628 \Omega$$

$$Z_{\text{W}} = R_{\text{W}} + j X_{L\text{W}} = (0.5 + j0.628) \Omega = 0.8 \angle 51.5^\circ \Omega$$

$$\dot{U}_{\text{W}} = Z_{\text{W}} \dot{i} = 1.4 \angle 51.5^\circ \text{ V}$$

$$X_{\text{C}} = \frac{1}{2\pi f C} = 20 \Omega$$

$$Z_{\text{L}} = R - j X_{\text{C}} = (6 - j20) \Omega = 20.88 \angle -73.3^\circ \Omega$$

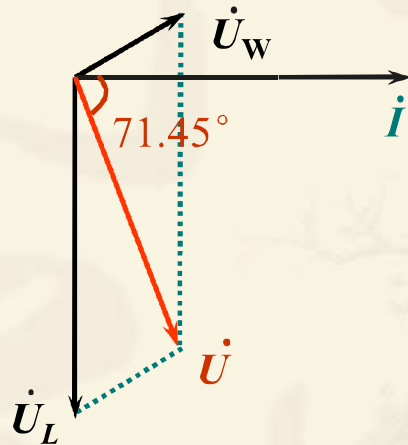
$$\dot{U}_{\text{L}} = Z_{\text{L}} \dot{i} = 36.75 \angle -73.3^\circ \text{ V}$$



$$Z = Z_W + Z_L = (0.5 + j0.628 + 6 - j20) \Omega$$

$$= 20.43 \angle -71.45^\circ \Omega$$

$$\dot{U} = Z\dot{I} = 36 \angle -71.45^\circ \text{ V}$$



## 并联交流电路

**KCL:**  $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$

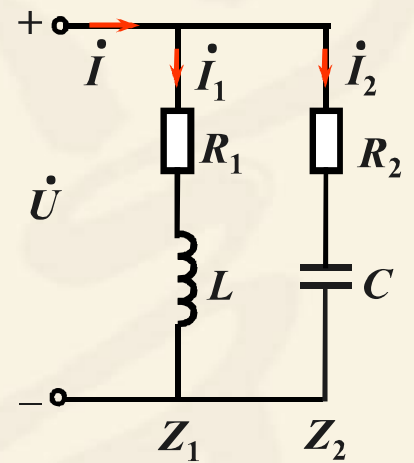
$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z_1} + \frac{\dot{U}}{Z_2}$$

$$\dot{I} = \left( \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right) \dot{U} = \frac{\dot{U}}{Z}$$

$$Z = Z_1 // Z_2$$

其中:  $Z_1 = R_1 + jX_L$

$$Z_2 = R_2 - jX_C$$



**[例 3]** 已知交流电路  $U = 220 \text{ V}$ ,  $R_1 = 20 \Omega$ ,  $R_2 = 40 \Omega$ ,  $X_L = 157 \Omega$ ,  $X_C = 114 \Omega$ , 试求电路的总电流。

**[解] 方法 1:**  $\dot{U} = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z_1} = \frac{220 \angle 0^\circ}{20 - j114} \text{ A}$$

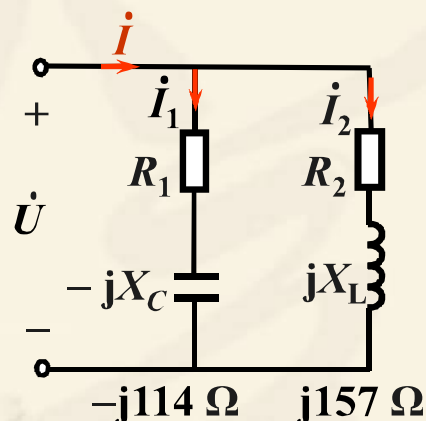
$$= 1.90 \angle 80^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{Z_2} = \frac{220 \angle 0^\circ}{40 + j157} \text{ A}$$

$$= 1.36 \angle -75.7^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = (1.9 \angle 80^\circ + 1.36 \angle -75.7^\circ) \text{ A}$$

$$= 0.86 \angle 39.60^\circ \text{ A}$$



方法 2:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(20 - j114)(40 + j157)}{20 - j114 + 40 + j157} \Omega \\ &= \frac{116 \angle -80^\circ \times 162 \angle 75.7^\circ}{60 + j43} \Omega \\ &= 255 \angle -39.6^\circ \Omega \end{aligned}$$

$$i = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{220 \angle 0^\circ}{255 \angle -39.6^\circ} \text{ A} = 0.86 \angle 39.6^\circ \text{ A}$$



## 第六节、交流电路的功率

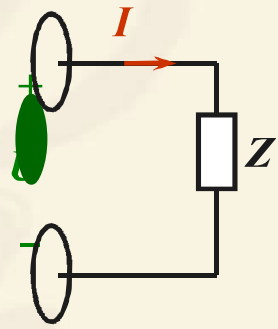
### 一、瞬时功率

$$i = I_m \sin \omega t$$

$$u = U_m \sin (\omega t + \varphi)$$

$$p = u i = U_m I_m \sin(\omega t + \varphi) \sin \omega t$$

$$= U I \cos \varphi + U I \cos (2\omega t + \varphi)$$

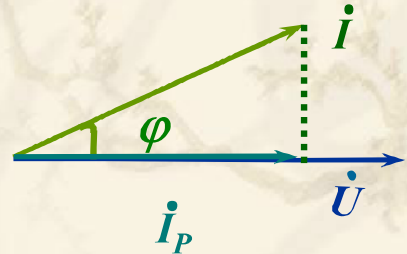


### 二、有功功率

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p_0 dt = U I \cos \varphi$$

$$I_p = I \cos \varphi$$

称为电流的有功分量

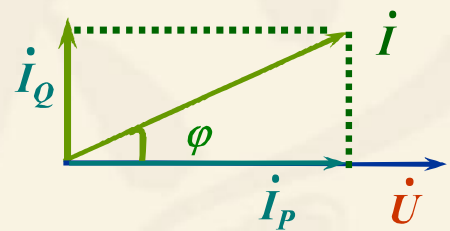


### 三、无功功率

$$Q = UI \sin \varphi$$

$$I_Q = UI \sin \varphi$$

$I_Q$ —— $I$ 的无功分量

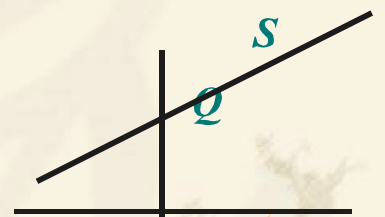


### 四、视在功率

$$S = UI (\text{V}\cdot\text{A}) = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$P = S \cos \varphi$$

$$Q = S \sin \varphi = P \tan \varphi$$



功率三角形



▲ 额定视在功率

$$S_N = U_N I_N \text{ —— 额定容量}$$

▲ 有功功率守恒:

$$P = \sum P_i = \sum U_i I_i \cos \varphi_i$$

▲ 无功功率守恒:

$$Q = \sum Q_i = \sum U_i I_i \sin \varphi_i$$

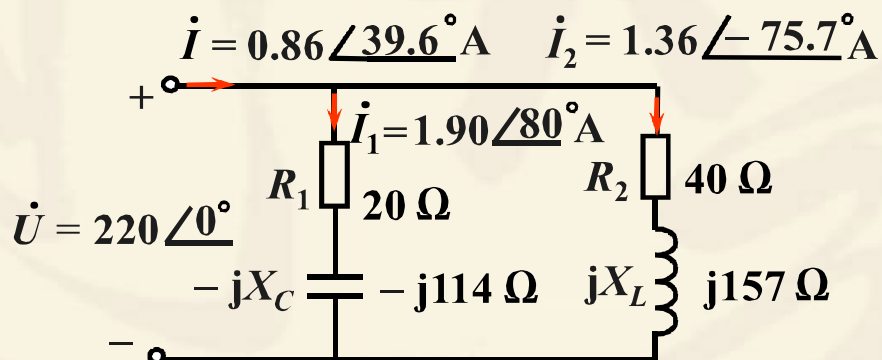
▲ 视在功率不守恒:

$$S \neq \sum S_i = \sum U_i I_i$$





**[例 4]** 求电路的总有功功率、无功功率和视在功率。  
已知数据注明在图上。



**[解] 方法 1** 由总电压总电流求总功率

$$P = UI \cos \varphi = 220 \times 0.86 \times \cos (0^\circ - 39.6^\circ) \text{ W} = 146 \text{ W}$$

$$Q = UI \sin \varphi = 220 \times 0.86 \times \sin (0^\circ - 39.6^\circ) \text{ var} = -121 \text{ var}$$

$$S = UI = 220 \times 0.86 \text{ V}\cdot\text{A} = 190 \text{ V}\cdot\text{A}$$



## 方法 2 由支路功率求总功率

$$\begin{aligned} P &= P_1 + P_2 = U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 \\ &= \{ 220 \times 1.9 \times \cos (0^\circ - 80^\circ) + \\ &\quad 220 \times 1.36 \times \cos [0^\circ - (-75.7^\circ)] \} \text{ W} \\ &= (72 + 74) \text{ W} \\ &= 146 \text{ W} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q &= Q_1 + Q_2 = P_1 \tan \varphi_1 + P_2 \tan \varphi_2 \\ &= (-411 + 290) \text{ var} \\ &= -121 \text{ var} \end{aligned}$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 190 \text{ V}\cdot\text{A}$$



**解法 3** 由元件功率求总功率

$$P = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 = (20 \times 1.9^2 + 40 \times 1.36^2) \text{ W} = 146 \text{ W}$$

$$Q = -X_C I_1^2 + X_L I_2^2 = (-114 \times 1.9^2 + 157 \times 1.36^2) \text{ var} \\ = -121 \text{ var}$$

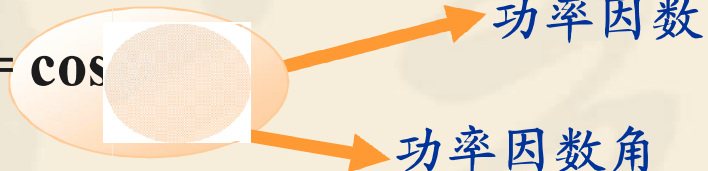
$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 190 \text{ V}\cdot\text{A}$$



## 第七节、电路的功率因数

### 一、什么是功率因数

有功功率与视在功率的比值

$$\frac{P}{S} = \cos \theta$$


功率因数

功率因数角

- 纯电阻电路的功率因数为多少？
- 纯电感电路的功率因数为多少？
- 纯电容电路的功率因数为多少？

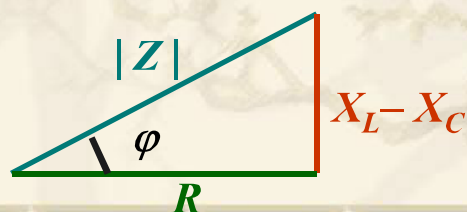


## 二、常用电路的功率因数

纯电阻电路	$\cos \varphi = 1$
纯电感电路	$\cos \varphi = 0$
纯电容电路	$\cos \varphi = 0$
<b>RLC</b> 串联电路	$0 < \cos \varphi < 1$
电动机 空载	$\cos \varphi = 0.2 \sim 0.3$
满载	$\cos \varphi = 0.7 \sim 0.9$
日光灯	$\cos \varphi = 0.5 \sim 0.6$

## 三、功率因数和电路参数的关系

$$\varphi = \arctan\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right)$$



## 四、功率因数低的害处

### 1. 降低了供电设备的利用率

$$P = S_N \cos \varphi \quad S_N \text{——供电设备的容量}$$

例如： $S_N = 1\,000 \text{ kV}\cdot\text{A}$ ,

$\cos \varphi = 0.5$  时，输出  $P = ?$

$\cos \varphi = 0.9$  时，输出  $P = ?$

### 2. 增加了供电设备和输电线路的功率损失

$$I = P / (U \cos \varphi)$$

当  $P$  一定时， $\cos \varphi \downarrow \rightarrow I \uparrow \rightarrow$  功率损失  $\uparrow$

而且 线路电压降落  $\uparrow$



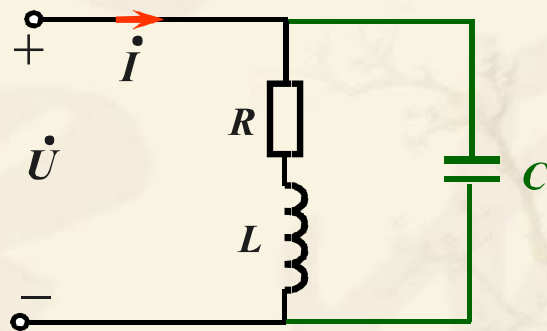
## 五、造成功率因数低的原因

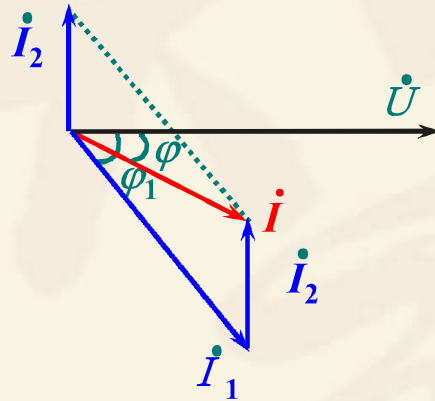
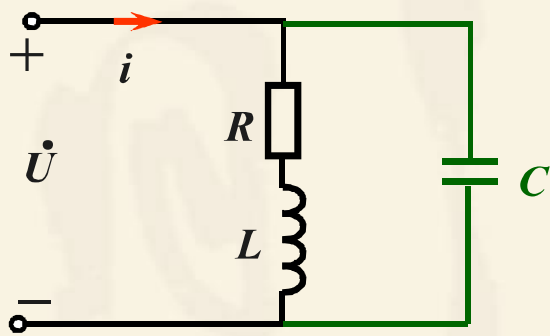
(1) 大马拉小车。

(2) 电感性负载比较多，无功功率多。

## 六、提高功率因数的办法

并联补偿电容。





$$I_2 = I_1 \sin \varphi_1 - I \sin \varphi$$

$$I_2 = \omega C U$$

$$I_1 = \frac{P}{U \cos \varphi_1}$$

$$\omega C U = \frac{P}{U} (\tan \varphi_1 - \tan \varphi)$$

$$I = \frac{P}{U \cos \varphi}$$

$$C = \frac{P}{\omega U^2} (\tan \varphi_1 - \tan \varphi)$$





## 例题分析

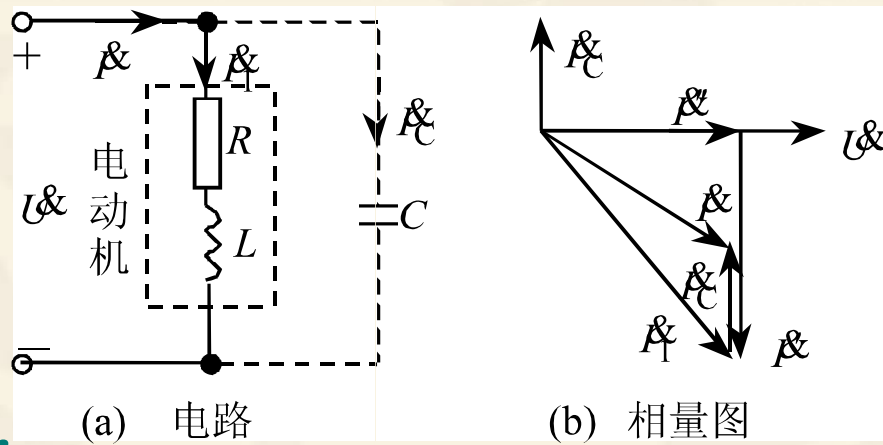
例：一台功率为1.1kW的感应电动机，接在220 V、50 Hz的电路中，电动机需要的电流为10 A，求：(1) 电动机的功率因数；(2) 若在电动机两端并联一个79.5  $\mu$ F的电容器，电路的功率因数为多少？

解：(1)  $\cos \varphi = \frac{P}{UI} = \frac{1.1 \times 1000}{220 \times 10} = 0.5$

$$\varphi = 60^\circ$$

(2) 在未并联电容前，电路中的电流为  $I_1$ 。并联电容后，电动机中的电流不变，仍为  $I_1$ ，这时电路中的电流为：

$$I = I_1 + I_C$$



由相量图得:

$$I_C = \frac{U}{X_C} = \omega C U = 314 \times 79.5 \times 10^{-6} = 5.5 \text{ A}$$

$$I' = I \sin 60^\circ = 10 \sin 60^\circ = 8.66 \text{ A}$$

$$I'' = I \cos 60^\circ = 10 \cos 60^\circ = 5 \text{ A}$$

$$\varphi' = \arctg \frac{I' - I_C}{I''} = \arctg \frac{8.66 - 5.5}{5} = 32.3^\circ$$

$$\cos \varphi' = \cos 32.3^\circ = 0.844$$