第十节

闭区间上连续函数的性质

一、最大值和最小值定理

定义： 对于在区间I上有定义的函数$f(x)$，如果有$x_0 \in I$，使得对于任一$x \in I$都有

$$f(x) \le f(x_0) \qquad (f(x) \ge f(x_0))$$

则称$f(x_0)$是函数$f(x)$在区间I上的最大(小)值.

例如，$y = 1 + \sin x$，在$[0, 2\pi]$上，$y_{max} = 2$，$y_{min} = 0$；

$y = \operatorname{sgn} x$，在$(-\infty, +\infty)$上，$y_{max} = 1$，$y_{min} = -1$；

在$(0, +\infty)$上，$y_{max} = y_{min} = 1$.

定理1（最大值和最小值定理） 在闭区间上连续的函数一定有最大值和最小值.

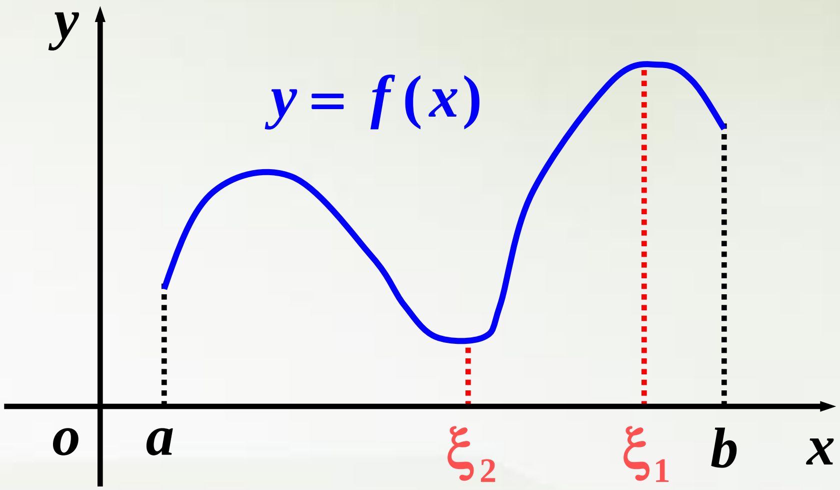
若 $f(x) \in C[a,b]$,

则 $\exists \xi_1, \xi_2 \in [a,b]$,

使得 $\forall x \in [a,b]$,

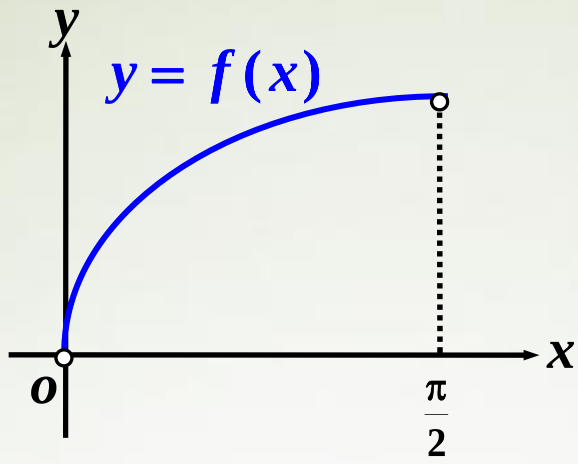
有 $f(\xi_1) \geq f(x)$,

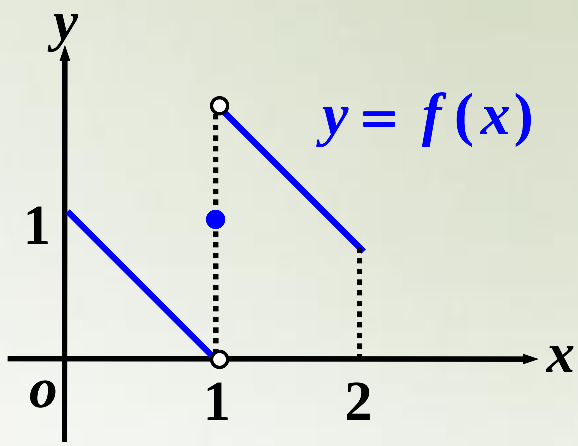
$f(\xi_2) \leq f(x)$.



注意: 1.若区间是开区间，定理不一定成立;

2.若区间内有间断点，定理不一定成立.





定理2（有界性定理） 在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界.

证 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，$\forall x \in [a,b]$，

有 $m \le f(x) \le M$，取 $K = \max\{|m|, |M|\}$，

则有 $|f(x)| \le K$. $\therefore$ 函数$f(x)$在$[a,b]$上有界.

二、介值定理

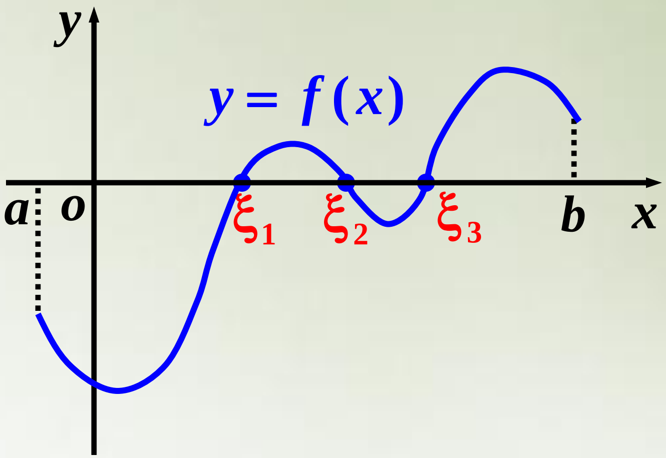
定义: 如果x_0使$f(x_0)=0$, 则x_0称为函数$f(x)$的零点.

定理 3(零点定理) 设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$f(a)$与$f(b)$异号(即$f(a)\cdot f(b)<0$)，那末在开区间(a,b)内至少有函数$f(x)$的一个零点, 即至少有一点$\xi(a<\xi<b)$，使$f(\xi)=0$.

即方程$f(x)=0$在(a,b)内至少存在一个实根.

几何解释:

连续曲线弧 $y=f(x)$ 的两个端点位于 x 轴的不同侧，则曲线弧与 x 轴至少有一个交点.



定理 4（介值定理） 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且在这区间的端点取不同的函数值

$$f(a)=A \text{ 及 } f(b)=B,$$

那末，对于 A 与 B 之间的任意一个数 C，在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=C \quad (a<\xi<b)$.

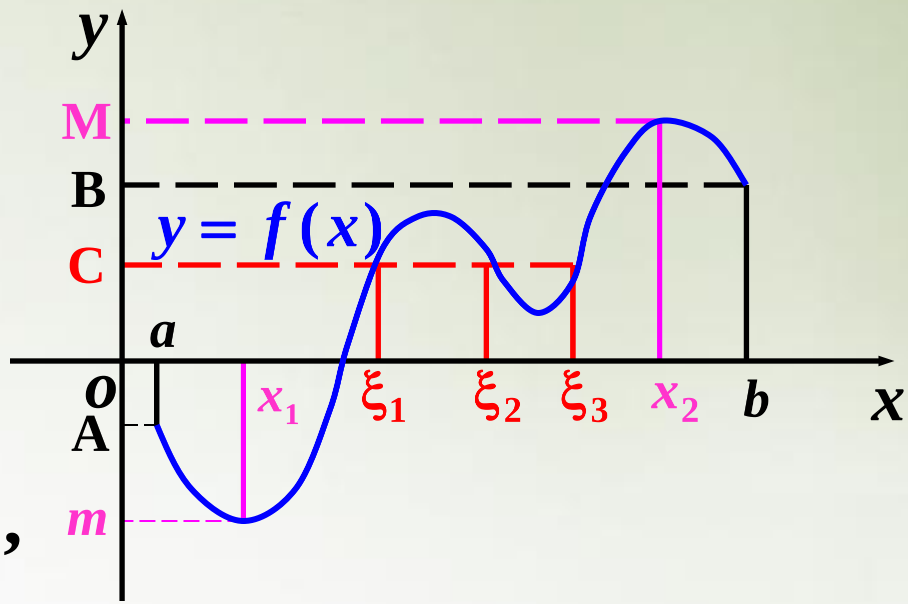
证 设$\varphi(x) = f(x) - C$,

则$\varphi(x)$在$[a,b]$上连续,

且$\varphi(a) = f(a) - C$

$= A - C$,

$\varphi(b) = f(b) - C = B - C$,



$\therefore \varphi(a) \cdot \varphi(b) < 0$, 由零点定理, $\exists \xi \in (a,b)$, 使

$\varphi(\xi) = 0$, 即 $\varphi(\xi) = f(\xi) - C = 0$, $\therefore f(\xi) = C$.

几何解释: 连续曲线弧$y = f(x)$与水平直线$y = C$至少有一个交点.

推论 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

例1 证明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一根.

证 令 $f(x)=x^3-4x^2+1$, 则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,

又 $f(0)=1>0$, $f(1)=-2<0$, 由零点定理,

$\exists\,\xi\in(a,b)$, 使 $f(\xi)=0$, 即 $\xi^3-4\xi^2+1=0$,

$\therefore$ 方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一根 ξ.

例2 设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续，且$f(a)<a$，$f(b)>b$. 证明$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\xi$.

证 令 $F(x)=f(x)-x$，则$F(x)$在$[a,b]$上连续，

而 $F(a)=f(a)-a<0$,

$F(b)=f(b)-b>0$, **由零点定理,**

$\exists\xi\in(a,b)$，使 $F(\xi)=f(\xi)-\xi=0$,

即 $f(\xi)=\xi$.

三、小结

四个定理

有界性定理;最值定理;介值定理;根的存在性定理.

注意 1. 闭区间; 2. 连续函数.

这两点不满足上述定理不一定成立.

解题思路

1. 直接法:先利用最值定理,再利用介值定理;

2. 辅助函数法:先作辅助函数$F(x)$,再利用零点定理;

思考题

下述命题是否正确?

如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，在 (a,b) 内连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，那么 $f(x)$ 在 (a,b) 内必有零点.