【信息科学与控制工程】

doi: 10.11809/bqzbgcxb2019.02.024

# 基于异质网络的蜂拥控制研究

张金春,丛 凯,王帅磊

(海军航空大学,山东烟台 264001)

摘要:提出了异质影响半径的概念,对 Olfati 的人工势函数进行改造,使其能够应用于异质网络。研究了智能体的影 响半径不同时对蜂拥控制网络的影响。研究结果表明:当智能体影响半径服从幂律分布时,随着幂律指数的减小, 网络的异质性增强,也更容易达到蜂拥状态;当网络的异质性很强时,只需要通过控制极少数感知半径大的智能体, 就可以很好地控制整个多智能体系统。

关键词:多智能体;异质网络;蜂拥控制;幂律

**本文引用格式:**张金春,丛凯,王帅磊.基于异质网络的蜂拥控制研究[J]. 兵器装备工程学报,2019,40(2):114 – 119.

Citation format: ZHANG Jinchun, CONG Kai, WANG Shuailei. Research on Flocking Control Based on Heterogeneous Network [J]. Journal of Ordnance Equipment Engineering, 2019, 40(2):114 – 119.

中图分类号:TP273 文献标识码:A 文章编号:2096-2304(2019)02-0114-06

## **Research on Flocking Control Based on Heterogeneous Network**

## ZHANG Jinchun, CONG Kai, WANG Shuailei

(Naval Aeronautical University, Yantai 264001, China)

Abstract: This paper studied the influence of the intelligent body on the swarm control network at the same time. It is shown in this paper that, when the radius of the agent obeys the power-law distribution, as the scale parameters decrease, the heterogeneity of the network increases, and the swarm system is more likely to reach the stable state. In addition, when the heterogeneity of the network is very strong, only a few agents with large perceived radius are needed to control the whole multi-agent system.

Key words: multi-agent; heterogeneous network; flocking control; power law

蜂拥行为是指蜂群、鱼群、鸟群等生物群体利用简单的 几条规则和环境信息,通过个体之间的相互影响,最终形成 稳定有秩序的群体运动<sup>[1-7]</sup>。1987年,Reynolds<sup>[8]</sup>提出了具 有代表性的蜂拥控制三条规则:分离、聚合和速度匹配。后 来,Olfati-Saber<sup>[9]</sup>也对蜂拥控制算法改进和优化。现在,蜂 拥控制已经在无线传感器网络、机器人编队、无人机等各领 域应用。1995年,Vicsek等<sup>[10]</sup>提出了均质感知模型:在二维 平面上,存在一群初始位置随机分布的质点,它们的运动速 率相同但是运动方向随机分布,并且感知半径相同。因为质 点的感知半径相同,所以称为均质感知模型。对于任意一个 质点,它下一时刻的运动方向受到其感知半径内其他质点的 运动影响。

在实际生活中,很多智能体系统应该是异质的,即智能体的影响半径各不相同。比如在生物群体中因为年龄和权 威等个体差异使得每个个体对其他个体的影响能力各不相同。近年关于异质多智能体的研究中,文献[11]在"跟随者 -领导者"的框架下,分别针对有外界干扰和存在多个虚拟领导者的情况,在异质多智能体系统中研究如何设计不同的

收稿日期:2018-10-12;修回日期:2018-11-05

**作者简介:**张金春(1960—),男,教授,硕士,主要从事系统科学理论与应用研究;王帅磊(1991—),男,博士研究生,主要 从事多智能体系统研究。

通讯作者:丛凯(1994—),男,硕士研究生,主要从事军事系统的优化与控制研究,E-mail:494679589@qq.com。

控制策略使跟随者能够很好地跟踪领导者。文献[12]研究 了异质多智能体系统的分组一致性,推导出了异质多智能体 系统实现分组一致性的充分条件。文献[13]研究了混合类 型多智能体组成的异质多智能体系统的组一致性问题,得出 了通信延迟与分组一致性无关的结论。本文主要研究当智 能体系统异质时,异质性的强弱对于多智能体系统最终蜂拥 状态的影响。

#### 1 蜂拥控制

### 1.1 预备知识

在二维平面上,假设存在 n 个智能体,全部视为质点。 第*i*个智能体的运动方程为:

$$\begin{cases} \dot{q}_i = p_i \\ \dot{p}_i = u_i \end{cases}, \ i = 1, 2, \cdots, n$$
(1)

其中:  $q_i \in \mathbb{R}^n$  为第 *i* 个智能体的位置;  $p_i \in \mathbb{R}^n$  为速度;  $u_i \in \mathbb{R}^n$ 为加速度,也就是控制输入。

对于智能体 i,在任意时刻 t,将它感知半径内的所有智 能体的集合记为  $N_i(t) = \{j \mid || q_i - q_i || \leq r^2, j \in N \perp j \neq i\},$ 其 中, ||·||为欧几里得范数, r 为感知半径, 称 N<sub>i</sub>(t) 为智能体 i 的邻居。把智能体 i 视为节点,将它与其他能感知到的节点 用无向边连接,则由系统内所有节点和无向边组成的网络构 成了一个无向图 G(t)。其邻接矩阵为  $A(G(t)) = [a_{ii}(t)]$ , 其中

$$\begin{cases} a_{ij}(t) \begin{cases} 1 & j \in N_i(t) \\ 0 & j \notin N_i(t) \end{cases} \\ a_{ii}(t) = 0 \end{cases}$$

$$(2)$$

幂律分布最早由 Zipf 发现,他发现英文单词的出现频率 与其序号的常数次幂存在反比关系:

$$P(r) = r^{-\alpha} \tag{3}$$

本研究中,智能体的影响半径服从幂律分布。

### 1.2 传统蜂拥控制模型

1986年, Reynolds<sup>[9]</sup>提出了一种蜂拥控制模型,并提出 了三条规则:分离、聚合、速度匹配。根据 Reynolds 提出的模 型,Olfati-Saber<sup>[10]</sup>提出了如下控制输入算法:

$$u_i = f_i^g + f_i^d + f_i^\gamma \tag{4}$$

其中, f 表示人工势函数对位置的梯度, 用来实现 Reynolds 三条规则中的前两条; f<sup>d</sup> 是速度匹配项, 用来实现第三条规 则,即速度一致;f? 是引导反馈项,作用实现对领导者的 跟踪。

 $f_i^d$ 的具体形式为 $f_i^d = \sum_{i \in N} a_{ij}(p_{ij} - p_{\gamma ij}), f_i^{\gamma}$ 的具体形式 为 $f_i^{\gamma} = c_1(q_{\gamma_i} - q_i) + c_2(p_{\gamma_i} - p_i) + u_{\gamma_i}$ ,其中, $p_{ij} = p_i - p_j$ ,  $p_{\gamma_{ii}} = p_{\gamma_i} - p_{\gamma_i}, c_1 > 0, c_2 > 0_\circ f_i^{g}$ 的具体形式为:

$$f_{i}^{g} = -\sum_{j \in N_{i}(t)} \nabla_{q_{i}} \psi_{\alpha}(\mid \| q_{ij} - q_{\gamma_{ij}} \|_{\sigma})$$

$$(5)$$

其中,  $\|\cdot\|_{\sigma}$  是  $\sigma$  范数,  $\|z\|_{\sigma} = \frac{1}{\varepsilon} \left[ \sqrt{1+\varepsilon \|z\|^2} - 1 \right], q_{ij} =$  $q_i - q_j, q_{\gamma_{ii}} = q_{\gamma_i} - q_{\gamma_i}, \varepsilon > 0$ 。  $\nabla_{q_i}$ 表示梯度, 具体形式为  $\nabla_{q_i}(z) = \frac{z}{1+\varepsilon \|z\|_{\alpha}} = \frac{z}{\sqrt{1+\varepsilon \|z\|^2}} \psi_{\alpha}(z) \not \equiv \wedge \bot \not \Rightarrow m \not \Rightarrow,$  $ψ_{\alpha}(z) = \int_{-d}^{z} \phi_{\alpha}(s) ds,$ 其中  $d_{\alpha} = ||d||_{\alpha},$ d 为智能体间的期望

距离。

$$\phi_{\alpha}(z) = \rho_{h}(z/r_{\alpha}) \cdot \phi(z - d_{\alpha})$$

$$\phi(z) = \frac{1}{2} \left[ (a + b) \frac{z + c}{\sqrt{1 + (z + c)^{2}}} + (a - b) \right]$$

其中,a,b为系数,0 < a < b,  $\sqrt{4ab}$ 

碰撞函数,具体形式为

$$\rho_{h}(z) = \begin{cases} 1 & z \in [0,h] \\ \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos\left( \pi \left( \frac{z-h}{1-h} \right) \right) \right] & z \in (h,1] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$
(6)

控制输入 u; 的具体形式为:

$$u_{i} = -\sum_{j \in N_{i}(i)} \nabla_{q_{i}} \psi_{\alpha} ( \| q_{j} - q_{i} \|_{\sigma}) + \sum_{j \in N_{i}(i)} a_{ij} (p_{j} - p_{i}) + h_{i} [c_{1} (q_{\gamma} - q_{i}) + c_{2} (p_{\gamma} - p_{i}) + u_{\gamma}]$$
(7)

这里,h;可以用来描述智能体 i 是否拥有领导者的引导 信息。当 $h_i = 1$ 时,智能体i为信息智能体,当 $h_i = 0$ 时,智能 体为自由智能体。

人工势函数  $\psi_{\alpha}(z)$  满足:① 当  $\|q_{ij}\|_{\sigma} \rightarrow 0$  时, $\psi_{\alpha}$  为最大 值;②当  $\|q_{ij}\|_{\sigma}$  趋近于某一期望值时, $\psi_{\alpha}$  为最小值;③ 当  $\|q_{ij}\|_{\sigma} \ge \|r\|_{\sigma}$  时, $\psi_{\alpha}$  恒为很小的正常数。人工势函数  $\psi_{\alpha}$  如 图1所示。



### 1.3 影响半径服从幂律分布的蜂拥控制算法

在 Reynold 和 Olfati-Saber 等提出的蜂拥控制算法中,ri 表示的是智能体的感知半径,即智能体 i 能够感知到感知半 径 r, 内的其他邻居的位置信息和速度信息,影响自己的控制 输入。但是在智能体系统异质时,感知半径的概念无法表达 智能体的影响能力,所以本文将r;重新定义为智能体i的影 响半径,即智能体 i 能够将自己的位置信息和速度信息传递 给影响半径 r, 内的其他智能体。当智能体系统均质时,感知 半径和影响半径的意义相同,但是当智能体系统异质时,感 知半径和影响半径的不同会对结果产生不同的影响,所以要 对控制输入进行改造。

当智能体系统异质时,智能体 *i* 是否能够接收到智能体 *j* 的信息取决于智能体 *j* 的影响半径,所以新的邻居定义如下:

 $N_i(t) = \{j \mid ||q_i - q_j||\} \leq r_j^2, j \in N \coprod j \neq i\}$ 新的邻接矩阵定义如下:

$$\begin{cases} a_{ij} = a_{ji} = 1 & || q_i - q_j || \leq \min(r_i, r_j) \\ a_{ij} = 1, a_{ji} = 0 & r_i < || q_i - q_j || < r_j \\ a_{ij} = 0, a_{ji} = 1 & r_j < || q_i - q_j || < r_i \end{cases}$$
(8)

当智能体系统均质时,邻接矩阵是对称阵;当智能体系 统异质时,因为影响半径不相同,所以邻接矩阵不是对称阵。

除了邻居和邻接矩阵,异质网络对于势能函数也会产生 影响。对于碰撞函数式(6),因为影响半径不同,所以自变量 应该替换为  $z/\|r_i\|_{a}$ ,而不是  $z/\|r\|_{a}$ 。

最后,因为本文主要研究在异质网络下多智能体系统的 自主演化行为,所以本文不研究带有领导者的蜂拥控制输 入,因为领导者具有全局信息,所以无论初始分布如何,最终 肯定能够形成稳定的蜂拥行为。在对邻居、邻接矩阵和碰撞 函数进行改造以后,新的控制输入如下:

$$\begin{split} u_i &= -c_3 \sum_{j \in N_i(t)} \nabla_{q_i} \psi_{\alpha}(\|q_j - q_i\|_{\sigma}) + \sum_{j \in N_i(t)} a_{ij}(p_j - p_i) \\ \text{其中}, c_3 为系数, 主要影响智能体之间的分离聚合作用, c_3 = 0.25_{\circ} \end{split}$$

本研究中,所有智能体的影响半径服从幂律分布。首先 生成随机数 *x* ~ *U*(0,1),然后根据幂律指数 γ 生成影响半 径。因为智能体之间要保证期望距离 *d*,所以必须保证影响 半径 *r* > *d*,同时考虑初始范围,智能体的影响半径不能过大, 设初始分布为正方形,边长为 *s*,本文设定当随机生成的智能 体的影响半径  $r \ge \frac{\sqrt{2}}{2}s$  时,使  $r = \frac{\sqrt{2}}{2}s$ ,这样能够保证对于两个 智能体 *i* 和 *j*,当它们的影响半径均大于 $\frac{\sqrt{2}}{2}s$  时,即使处于初

首能体 *i* 和 *j*, 当它们的影响半径均入于 2<sup>s</sup> 时, 即便处于初 始范围的对角线上, 也能够相互影响到。最后, 影响半径公 式如下:

$$r_i = \begin{cases} x_{\min} \cdot x^{-\frac{1}{\gamma-1}} & r_i < \frac{\sqrt{2}}{2}s \\ \frac{\sqrt{2}}{2}s & r_i \ge \frac{\sqrt{2}}{2}s \end{cases}$$

其中, $x_{\min}$ 为系数,用以保证 $r_i > d_o$ 

当幂律指数变化时,生成的智能体影响半径分布也会发 生变化。图2是当 s = 55 时不同幂律指数对应的影响半径分 布图。

从图 2 中可以看出, 当  $\gamma$  = 4 时, 智能体异质性最强, 影 响半径分布最广泛: 有两个数智能体因为影响半径  $r > \frac{\sqrt{2}}{2}s$  从而取得上界值 38.9,有 8 智能体的影响半径  $15 \le r \le 30$ ,其 余智能体影响半径 r < 15。随着幂律指数  $\gamma$  增大,智能体系 统的异质性逐渐降低,越来越多的智能体影响半径趋近于 6; 当  $\gamma = 10$  时,所有智能体的影响半径  $6 < \gamma < 10$ ,智能体系统 的异质性已经很低;当  $\gamma = 50$  时,所有智能体的影响半径都 接近于 6。实际上,当  $\gamma \rightarrow + \infty$  时,智能体系统等同于均质网 络,所有智能体的影响半径  $r \rightarrow x_{\min}$ 。在这种情况下,本文提 出的控制输入等同于 Reynolds 提出的控制输入。



图 2 不同幂律指数下的影响半径分布

## 2 仿真结果与分析

本研究模仿了 50 个智能体在二维平面中的运动情况。 参数分别设置为:智能体初始速度为[-1,1]和[-1,1],初 始分布范围为[0,55]和[0,55],智能体最小影响半径  $x_{min}$  = 6,智能体间期望距离 d = 5, $\sigma$  范数的参数  $\varepsilon = 0.1$ ,式(8)中 参数 h = 0.9, $\phi(z)$ 中 a = 1,b = 2,控制输入中  $c_1 = 0.1$ , $c_2 =$ 0.9, $c_3 = 0.25$ ,程序运行步数 loop = 300。为了更好地体现不 同影响半径下智能体之间的相互影响,本文不要求智能体的 初始分布必须为初始连通。通过计算机数值仿真验证当幂 律系数分别等于  $\gamma_1 = 4$ , $\gamma_2 = 5$ , $\gamma_3 = 7$ , $\gamma_4 = 10$ , $\gamma_5 = 50$  对智能 体系统蜂拥状态好坏和收敛速度的影响。

首先本文对 γ<sub>1</sub> =4 时的智能体系统进行了数值仿真,研 究系统随程序运行时的演化过程。

图 3(a) 是智能体的初始分布图。从图中可以看出智能体的速度是随机分布的, 网络的连通性也不强, 其中有 3 个影响半径 r > 18 的智能体, 因为影响半径较大的原因, 所以它们对其他智能体的运动有较强的引导作用, 它们可以充当"中心智能体"的作用。当t = 50时, 可以看出所有影响半径较小的智能体都受到几个影响半径较大的智能体的影响, 向中心智能体运动。当t = 100和t = 150时, 智能体已经基本完成了 Reynolds 提出的三条规则中的分离聚合作用, 开始按照同一方向开始运动。当t = 300时, 所有智能体已经形成了稳定的  $\alpha$  – 晶格结构, 并且在几个中心智能体的影响下按照同一方向进行运动, 形成了稳定的蜂拥状态。



图 3 γ=4 时不同时刻智能体分布

通过对上图的分析可知,当幂律指数较小时,智能体系 统中存在极少数影响半径极大的智能体,它们可以充当"中 心智能体"甚至"领导者"的作用,它们的速度和位置会对其 他影响半径较小的智能体产生决定性的作用,最终蜂拥状态 的好坏取决于极少数中心智能体的初始分布状态。

下面比较当幂律指数分别取  $\gamma_1 = 4, \gamma_2 = 5, \gamma_3 = 7, \gamma_4 =$ 10,  $\gamma_5 = 50$  时对智能体系统的影响,每种情况分别取 10 次实 验数据取平均值。本文采用最大簇系数 *S* 来判断蜂拥状态 的好坏,*S* 为智能体节点网络中所有连通子图中最大连通子 图的智能体个数与所有智能体个数的比值, 0 < *S* < 1, *S* 越 大,表示最大连通子图的智能体的个数越多,蜂拥状态越好。

从图4可以看出,当幂律指数较小时,智能体系统的初始最大簇系数比较大,这是因为系统中存在少数中心智能体,以这些中心智能体为节点更容易形成连通网络;相反当 幂律指数较小时,所有智能体的影响半径都比较小,所以很 难形成节点很多的连通网络。

随着程序运行,可以看出幂律指数较小的最大簇系数增 长更快,这是因为中心智能体影响半径更大,更容易影响其 他智能体。并且可以明显看出,幂律指数不同会对最后的最 大簇系数产生很大的影响:当 $\gamma_1 = 4, \gamma_2 = 5, \gamma_3 = 7, \gamma_4 = 10,$  $\gamma_5 = 50$ 时, $s_1 = 0.97, s_2 = 0.844, s_3 = 0.742, s_4 = 0.624, s_5 =$ 0.364。当幂律指数较小时,最大簇系数很大,收敛时间也更 短,系统的蜂拥状态也更好;当幂律指数较大时,最大簇系数 很小,收敛时间更长。这说明当系统的异质性很强时,多数 智能体在极少部分中心智能体的带领下,更容易形成整体的 蜂拥状态;随着异质性逐渐减弱,智能体变得更加均质,在运 动过程中容易受到部分影响半径较大的智能体的影响,形成 "分块"或者"分离"现象,如图5所示。从图5能够看出,随 着异质性减弱,影响半径越来越小,导致智能体的分离现象 也更加明显。



根据前面的数值仿真可知,当系统异质性很强时,智能体的运动主要受到极少部分中心智能体的影响,最终蜂拥状态的好坏取决于中心智能体的运动状态。接下来本文重点研究,在系统的异质性很强的条件下,中心智能体的运动状态对智能体系统运动的影响,以及能否通过对极少部分的中心智能体施加控制,达到对整个智能体系统进行控制,最终形成统一的蜂拥运动。为了保证系统的异质性,接下来研究

的内容中幂律指数 $\gamma = 4$ 。

为了对智能体进行分类,本文设定影响半径r>20的智能体称为控制智能体,影响半径 $6 \le r \le 20$ 的智能体称为一般智能体。在运动过程中,设控制智能体保持匀速直线运动,则对于控制智能体来说 $u_i = 0$ ,对所有智能体来说,控制输入为:

$$u_i = \begin{cases} 0 & r_i > 20 \\ -c_3 \sum_{j \in N_i(t)} \nabla_{q_i} \psi_\alpha(\parallel q_j - q_i \mid_\sigma) + \sum_{j \in N_i(t)} a_{ij}(p_j - p_i) & 6 \leq r_i \leq 20 \end{cases}$$

首先,本文研究当中心智能体的运动方向不同时,对其 他智能体运动的影响。当 $\gamma = 4$ 时,根据初始生成影响半径 不同,若生成控制智能体的数量为 $n_1$ ,则设第一个控制智能 体的速度 $p_1 = (1,0), n_1$ 个控制智能体的速度大小相同,方 向在 $[0,2\pi]$ 等间隔分布,则 $n_1$ 个控制智能体的速度依次为  $p_1 = (1,0), p_2 = (\cos(\frac{2\pi}{n_1}), \sin(\frac{2\pi}{n_1})), \dots, p_{n_1} = (\cos(\frac{2\pi(n_1-1)}{n_1}), \sin(\frac{2\pi(n_1-1)}{n_2}))$ 。 首先针对控制智能体数量  $n_1 = 3$  时的情况进行研究。 当  $n_1 = 3$  时,三个控制智能体的初始速度大小均为 1,运动方 向分别为 0, $\frac{2}{3}\pi$  和 $\frac{4}{3}\pi$ ,且保持匀速直线运动。

从图 6 可以看出,当t=0时,智能体的分布较为散乱,有 三个控制智能体,速度方向分别为 $0, \frac{2}{3}\pi \pi \frac{4}{3}\pi$ 。随着时间 增加,3 个控制智能体按照匀速直线运动,同时不断对周围 的一般智能体产生影响。当t=130时,可以看出3 个控制智 能体之间的距离不断增加,其他一般智能体在势能函数的影 响下不断向控制智能体靠拢,但是由于不同控制智能体的共 同影响,还没有确定要跟随的目标。当t=170时,所有一般 智能体基本确定要跟随的目标。t=230时,在控制智能体的 领导作用下,所有智能体根据自己跟踪的目标,已经形成了 稳定的分块式的蜂拥运动。图 7 是控制智能体数量分别为 2 和 4 时最终形成的蜂拥运动。虽然追踪每个控制智能体的 一般智能体的数量不同,但是同样形成了稳定的分块式的蜂 拥运动。



图5 不同幂律指数对应的分离现象



图6 n1=3时不同时刻智能体分布

通过上面分析可知,在异质性较强的智能体系统中,极 少数影响半径很大的控制智能体的运动状态可以影响其他 所有智能体的运动,当这些控制智能体的运动方向不相同 时,会对其影响半径之内的其他智能体产生影响,最终会形 成稳定的分块式的蜂拥运动,并且影响半径越大,形成的分 块也越大。接下来本文研究能否通过控制极少数中心智能 体,让它们按照同一方向运动,进而达到控制所有智能体的运动,最终形成稳定的蜂拥运动。设所有影响半径 r > 20 的 控制智能体的速度都为(1,1),控制输入 u<sub>i</sub> = 0,则所有控制 智能体都按照同一速度进行匀速直线运动。

从图 8 可以看出,*t* = 0 时,智能体的初始分布比较散乱; *t* = 100 时,所有智能体都能达到同一运动方向;*t* = 300 时,能 够形成比较紧凑的 α - 晶体结构。这样就说明了在异质性 较强的智能体系统中,即使初始分布随机性很强,但是通过 控制极少数控制智能体按照同一方向运动,就可以牵制绝大 多数其他智能体,最终形成稳定的蜂拥运动。



图7 n<sub>1</sub>=2,4 时形成的分块式的蜂拥运动



图8 同一方向运动时的智能体蜂拥运动图

## 3 结论

1)本研究提出了基于异质网络的蜂拥控制算法。

2)对势能函数进行了改造,并且通过数值仿真证明了 异质性较强的智能体系统更容易达到蜂拥状态,并且证明了 可以通过控制极少数影响半径较大的智能体控制整个智能 体系统,使其达到预定的蜂拥状态。

## 参考文献:

- [1] SHAW E. Fish in schools [J]. Natural History, 1975, 84
   (8):40-45.
- [2] 程代展,陈翰馥.从群集到社会行为控制[J].科技导报, 2004 (8):4-6.
- [3] OKUBO A. Dynamical aspects of animal grouping:swarms, schools,flocks and herds [J]. Advance Biophysics, 1986, 22:1-94.
- [4] HELBING D, FARKAS I, VICSEK T. Simulating dynamical features of escape panic [J]. Nature, 2000, 407:487 - 490.
- [5] VICSEK T. A question of scale [J]. Nature, 2001, 411:421
   -421.

- [6] LOW D J. Following the crowd [J]. Nature, 2000, 407:465 -466.
- [7] GRUNBAUM D, OKUBO A. Modeling social animal aggregations [J]. Frontiers in Theoretical Biology, 1994, 100:296 - 325.
- [8] REYNOLDS C W. Flocks, herds and schools: A distributed behavioral model [J]. ACM Siggraph Computer Graphics, 1987:48-55.
- [9] OLFATI-SABER R. Flocking for Multi-Agent Dynamic Systems; Algorithms and Theory [J]. Automatic Control IEEE Transactions on, 2006, 51(3);401-420.
- [10] VICSEK T. Novel Type of Phase Transition in a System of Self-Driven Particles
   [J]. Physical Review Letters, 1995, 75
   (6):1226-1229.
- [11] 焦强.同质与异质线性多智能体系统的分布式跟踪控制[D].南京.南京理工大学.2017:29-35.
- [12] 闻国光. 异质多智能体系统在固定拓扑下的分组一致性 [J]. 北京交通大学学报,2016,40(3):116-118.
- [13] 廖诗来. 一类多时变时延异质多智能体系统的组一致性
   [J]. 信息与控制,2016,45(5):569-571.