

含时滞反馈与涨落质量的记忆 阻尼系统的随机共振¹⁾

公徐路^{*,2)} 许鹏飞[†]

^{*}(山西农业大学软件学院, 山西太谷 030801)

[†](北京理工大学力学系, 北京 100081)

摘要 针对具有记忆效应的欠阻尼系统, 存在时滞反馈与涨落质量, 本文主要研究了其输出稳态响应振幅的随机共振效应. 首先通过引入新变量和运用小时滞近似展开理论, 将具有非马尔科夫特性的原系统转化为等价的两维马尔科夫线性系统, 再利用 Shapiro-Loginov 公式和 Laplace 变换获得了系统响应的一阶稳态矩和稳态响应振幅的解析表达式. 结果表明: 当系统参数满足 Routh-Hurwitz 稳定条件时, 稳态响应振幅随质量涨落噪声强度、周期驱动信号频率以及时滞的变化均存在随机共振现象, 其中随机多共振现象也被观察到. 在适当范围内, 通过控制时滞反馈, 系统的随机共振效应随着时滞的增大而增强, 而较长的记忆时间及增大阻尼参数均对共振行为呈现抑制作用. 有效调控时滞反馈与记忆效应的变化关系将有助于增强系统对周期驱动信号的响应强度. 最后, 通过数值模拟计算验证了理论结果的有效性.

关键词 随机共振, 广义 Langevin 方程, 时滞反馈, 质量涨落噪声

中图分类号: O324

文献标识码: A

doi: 10.6052/0459-1879-18-051

STOCHASTIC RESONANCE OF A MEMORIAL-DAMPED SYSTEM WITH TIME DELAY FEEDBACK AND FLUCTUATING MASS¹⁾

Gong Xulu^{*,2)} Xu Pengfei[†]

^{*}(School of Software, Shanxi Agricultural University, Taigu 030801, Shanxi, China)

[†](Department of Mechanics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract The stochastic resonance (SR) in the memorial under-damped system with time delay feedback and fluctuating mass is investigated in this paper. The non-Markovian original system is reformulated into two-dimensional Markovian linear system through introducing variable transformations and using the small time delay approximation. Further, the analytic expressions for the first moment of the response and the steady response amplitude are derived by using the Shapiro-Loginov formula and the Laplace transformation technique. All the research results show that when the Routh-Hurwitz stability is satisfied, the phenomenon of SR is shown with the variations of mass fluctuation noise intensity, driving frequency and time delay, respectively. The stochastic multi-resonance phenomenon is also observed. Moreover, the SR is

2018-03-05 收稿, 2018-05-11 录用, 2018-05-11 网络版发表.

1) 山西省回国留学人员科研资助项目 (2015-068).

2) 公徐路, 助教, 主要研究方向: 随机动力系统. E-mail: xulgong@163.com

引用格式: 公徐路, 许鹏飞. 含时滞反馈与涨落质量的记忆阻尼系统的随机共振. 力学学报, 2018, 50(4): 880-889

Gong Xulu, Xu Pengfei. Stochastic resonance of a memorial-damped system with time delay feedback and fluctuating mass. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2018, 50(4): 880-889

enhanced with an increase in time delay by introducing the time delay feedback and instead, the SR is suppressed for large memory time and damping parameter. By adjusting the time delay feedback and the memory effects, the response of the system to a harmonic signal can be further improved. Finally, the theoretical results are well verified through numerical simulations

Key words stochastic resonance, generalized Langevin equation, time delay feedback, mass fluctuation noise

引言

随机共振是 Benzi 等^[1] 在 1981 年研究古气象冰川问题时首次提出的, 描述了强噪声背景中的弱输入信号在最优噪声强度处被放大. 目前, 关于随机共振的发展和已经延伸到了广泛的科学领域内^[2-10]. 比如化学^[2]、生物^[5]、能量收集^[8]、机械故障诊断^[10] 等. 但上述研究对象通常被刻画为具有马尔科夫特性的系统模型, 而当粒子在例如湍流、黏性材料或渗透媒介等非均匀介质中运动时, 其运动速度产生记忆效应, 系统呈现非马尔科夫性. 该系统通常被描述为一类具有记忆核的广义 Langevin 方程 (GLE)^[11-19], 其在非平衡统计物理中已被广泛研究. 例如: 具有不同记忆核函数的 GLE 在反常扩散现象和随机共振中得到研究. 包景东等^[14-16] 基于指数型记忆核函数细致研究了弹道扩散现象. 文献 [17] 在耦合的 GLEs 中发现了双指数耗散记忆核诱导的一类非马尔科夫扩散. 在双稳态系统模型中, Srokowski^[18] 和 Neiman 等^[19] 分别在携有幂函数型记忆核和指数型记忆核的 GLE 中探讨了随机共振现象. 在适当范围内, 记忆时间则分别增强和减弱随机共振.

时滞普遍存在于自然界, 其产生的根源在于系统中的物质、能量或信息存在传递时间, 转换速度, 或者源于系统本身固有的记忆效应. 因此, 在复杂无序的非均匀环境中, 时滞是研究相关动力学问题不可忽视的一个重要因素, 甚至微弱的时滞也能够定性改变系统的动力学特征. 近年来, 研究时滞对系统动力学行为的影响已经吸引了大量学者的关注^[20-28]. 其中, 靳艳飞^[26] 研究了受互关联噪声激励的时滞系统的相干共振和随机共振现象. 钟苏川等^[27] 在具有时滞的分数阶线性系统中讨论了稳态响应振幅随时滞变化的一类广义随机共振, 且较小的噪声相关率能够导致随机多共振现象. 此外, 文献^[28] 在小世界神经网络元模型中也展示了时滞诱导的随机多共振现象.

另一方面, 在具有记忆效应的系统中, 由涨落耗

散理论可知, 记忆核函数依赖于系统内部噪声. 而外部噪声对系统的干扰不仅反映在系统的阻尼涨落^[29] 和固有频率涨落^[30] 上, 而且能够在振子质量中被体现到^[4]. 实际上, 在复杂多变的环境中, 媒介分子对系统粒子通常具有吸附能力而使得系统存在质量涨落, 其中常见的质量涨落模型有: 可变质量振荡器^[31], 离子间的化学反应系统^[32], 粒状材料的聚合过程^[33] 等. 但在该类质量涨落系统中, 未同时考虑复杂非均匀环境下记忆阻尼与时滞对系统共振行为的影响. 鉴于此, 针对具有时滞反馈和指数型记忆核的质量涨落系统, 本文首先获得系统稳态响应振幅的解析表达式, 然后详细讨论时滞反馈、记忆阻尼及质量涨落对共振行为的影响, 最后由数值模拟验证理论结果的有效性.

1 系统模型

考虑由广义 Langevin 方程描述的受时滞反馈与质量涨落噪声作用的记忆阻尼系统如下

$$m[1 + \xi(t)]\ddot{x}(t) + \int_0^t \dot{x}(u)\beta(t-u)du + \omega^2 x(t) + \mu_\tau = f_0 \sin(\Omega t) + \eta(t) \quad (1)$$

其中, m 表示系统粒子的质量, $x(t)$ 表示粒子运动的轨迹, ω 为系统固有频率, f_0 和 Ω 为周期驱动信号的振幅和频率. 位移反馈项 $\mu_\tau = \alpha x(t - \theta)$, α 为反馈强度, θ 代表时滞. 系统记忆阻尼函数 $\beta(t)$ ^[14,19] 满足

$$\beta(t) = \beta_0[\delta(t) - \tau^{-1} \exp(-t/\tau)] \quad (2)$$

其中, β_0 为阻尼系数, τ 为粒子运动的记忆时间. 系统内噪声 $\eta(t)$ 与记忆核函数 $\beta(t)$ 之间满足涨落耗散理论

$$\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = k_B T \beta(t - t') \quad (3)$$

其中, k_B 代表玻尔兹曼常数, T 代表粒子所处环境的绝对温度.

本文考虑系统粒子质量受随机扰动而引入的乘性外噪声 $\xi(t)$, 即质量涨落噪声建模为满足下述

统计性质的对称二值噪声

$$\begin{aligned}\langle \xi(t) \rangle &= 0 \\ \langle \xi(t)\xi(t') \rangle &= Q \exp(-k|t-t'|)\end{aligned}$$

其中, $\xi(t)$ 在 $\{M, -M\}$ 中取值, 满足稳态概率分布 $p(M) = p(-M) = 1/2$, 噪声强度 $Q = M^2$, k 为噪声相关率. 进一步, 为保证粒子质量为正值, 设置二值噪声满足条件: $0 < M < 1$. 且考虑到系统内噪声 $\eta(t)$ 与质量涨落噪声 $\xi(t)$ 的起源不同, 故下文假设两噪声互不关联, 即 $\langle \eta(t)\xi(t') \rangle = 0$.

基于方程 (2) 和 (3), 内噪声 $\eta(t)$ 被表示为高斯白噪声 $\varepsilon(t)$ 与 Ornstein-Uhlenbeck 噪声 $z(t)$ 之差^[15]

$$\eta(t) = \varepsilon(t) - z(t) \quad (4)$$

其中

$$\left. \begin{aligned}\langle \varepsilon(t) \rangle &= 0, \quad \langle \varepsilon(t)\varepsilon(t') \rangle = 2k_B T \beta_0 \delta(t-t') \\ \dot{z}(t) &= -\tau^{-1}z(t) + \tau^{-1}\varepsilon(t)\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

针对系统 (1) 引入新变量 $y(t)$ ^[15-16]

$$y(t) = \beta_0 \int_0^t \tau^{-1} \dot{x}(u) \exp[-(t-u)/\tau] du - z(t) \quad (6)$$

依据式 (4) ~ 式 (6), 系统 (1) 被扩展为如下方程

$$\begin{aligned}m[1 + \xi(t)]\ddot{x}(t) + \beta_0 \dot{x}(t) + \omega^2 x(t) + \\ \alpha x(t - \theta) - y(t) = f_0 \sin(\Omega t) + \varepsilon(t)\end{aligned} \quad (7)$$

$$\dot{y}(t) = -\tau^{-1}y(t) + \tau^{-1}\beta_0 \dot{x}(t) - \tau^{-1}\varepsilon(t) \quad (8)$$

其中 $\langle \varepsilon(t)\xi(t') \rangle = 0$.

在式 (7) 中, 对时滞项 $x(t - \theta)$ 运用小时滞近似理论^[34], 即关于时滞 τ 进行泰勒二阶展开, 则式 (7) 被表示为马尔科夫线性系统

$$\begin{aligned}\{m[1 + \xi(t)] + \alpha\theta^2/2\}\ddot{x}(t) + (\beta_0 - \alpha\theta)\dot{x}(t) + \\ (\omega^2 + \alpha)x(t) - y(t) = f_0 \sin(\Omega t) + \varepsilon(t)\end{aligned} \quad (9)$$

2 系统稳态响应振幅

为获得系统的稳态响应振幅, 下文基于矩方程将在推导过程中利用对称二值噪声所满足的 Shapiro-Loginov 公式^[35]

$$\left\langle \xi(t) \frac{d^n x(t)}{dt^n} \right\rangle = \left(\frac{d}{dt} + k \right)^n \langle x(t)\xi(t) \rangle \quad (10)$$

$$\langle x(t)\xi^2(t) \rangle = Q \langle x(t) \rangle \quad (11)$$

在方程 (9) 和式 (8) 两边分别进行统计平均, 并利用式 (10) 得到系统响应一阶矩的微分方程

$$\begin{aligned}\left[(m + 0.5\alpha\theta^2) \frac{d^2}{dt^2} + (\beta_0 - \alpha\theta) \frac{d}{dt} + (\omega^2 + \alpha) \right] \langle x(t) \rangle - \\ \langle y(t) \rangle + m \left(\frac{d}{dt} + k \right)^2 \langle x(t)\xi(t) \rangle = f_0 \sin(\Omega t)\end{aligned} \quad (12)$$

$$\left(\frac{d}{dt} + \tau^{-1} \right) \langle y(t) \rangle - \tau^{-1} \beta_0 \frac{d}{dt} \langle x(t) \rangle = 0 \quad (13)$$

由于式 (12) 中出现了新的耦合项 $\langle x(t)\xi(t) \rangle$, 则在 (9) 式两边同时乘以 $\xi(t)$ 后进行统计平均, 并利用式 (10) ~ 式 (11) 得到

$$\begin{aligned}\left[(m + 0.5\alpha\theta^2) \left(\frac{d}{dt} + k \right)^2 + (\beta_0 - \alpha\theta) \left(\frac{d}{dt} + k \right) + \right. \\ \left. \omega^2 + \alpha \right] \langle x(t)\xi(t) \rangle + mQ \frac{d^2 \langle x(t) \rangle}{dt^2} - \\ \langle y(t)\xi(t) \rangle = 0\end{aligned} \quad (14)$$

对于在式 (14) 中又出现的新耦合项 $\langle y(t)\xi(t) \rangle$, 对式 (8) 进行同样的处理得到

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dt} + k + \tau^{-1} \right) \langle y(t)\xi(t) \rangle - \left(\frac{d}{dt} + k \right) \\ \beta_0 \tau^{-1} \langle x(t)\xi(t) \rangle = 0\end{aligned} \quad (15)$$

最后, 方程 (12)~(15) 联立构成了以 $\langle x(t) \rangle$, $\langle y(t) \rangle$, $\langle x(t)\xi(t) \rangle$ 以及 $\langle y(t)\xi(t) \rangle$ 为变量的微分方程组. 为描述方便, 令 $u_1(t) = \langle x(t) \rangle$, $u_2(t) = \langle y(t) \rangle$, $u_3(t) = \langle x(t)\xi(t) \rangle$, $u_4(t) = \langle y(t)\xi(t) \rangle$, 则对新标记的微分方程组 (12)~(15) 分别做 Laplace 变换如下

$$\left. \begin{aligned}g_{11}U_1(s) + g_{12}U_2(s) + g_{13}U_3(s) &= \\ f_0\Omega/(s^2 + \Omega^2) + g_{14} \\ g_{21}U_1(s) + g_{22}U_2(s) &= g_{23} \\ g_{31}U_1(s) + g_{32}U_3(s) + g_{33}U_4(s) &= g_{34} \\ g_{41}U_3(s) + g_{42}U_4(s) &= g_{43}\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

其中, $U_i(s)$ 为 $u_i(t)$ 的 Laplace 变换 ($i = 1, 2, 3, 4$), 系数 g_{mn} ($m, n = 1, 2, 3, 4$) 的表达式见附录 A.

通过式 (16) 可获得 s 域上所有 $U_i(s)$ 的解析表达式, 为求解系统的响应一阶矩 $\langle x(t) \rangle$, 故仅给出

$U_1(s)$ 的表达式如下

$$U_1(s) = \left[W_2(s)f_0\Omega \right] / \left[W_1(s)(s^2 + \Omega^2) \right] + W_3(s)/W_1(s) \quad (17)$$

其中

$$\begin{aligned} W_1(s) &= g_{11}g_{22}g_{32}g_{42} + g_{12}g_{21}g_{33}g_{41} - \\ &\quad g_{13}g_{42}g_{31}g_{22} - g_{12}g_{21}g_{32}g_{42} - \\ &\quad g_{11}g_{22}g_{33}g_{41} \\ W_2(s) &= g_{22}(g_{32}g_{42} - g_{33}g_{41}) \\ W_3(s) &= g_{22}g_{32}g_{42}g_{14} - g_{22}g_{13}g_{42}g_{34} - \\ &\quad g_{22}g_{41}g_{33}g_{14} + g_{22}g_{33}g_{13}g_{43} - \\ &\quad g_{23}g_{32}g_{42}g_{12} + g_{23}g_{41}g_{33}g_{12} \end{aligned}$$

对式 (17) 两边做逆 Laplace 变换, 得到系统响应一阶矩 $\langle x(t) \rangle$ 的解析表达式

$$\langle x(t) \rangle = \int_0^t W(t-t')f_0\sin(\Omega t')dt' + W_0(t) \quad (18)$$

其中, $W(t)$ 为 $W_2(s)/W_1(s)$ 的逆 Laplace 变换, $W_0(t)$ 为 $W_3(s)/W_1(s)$ 的逆 Laplace 变换. 特别地, 为保证响应一阶矩的稳定性, 方程 $W_1(s) = 0$ 不能存在具有正实部的根, 即该方程系数满足 Routh-Hurwitz 稳定性判据^[36], 故下文所有系统参数均在满足此条件下取值.

当粒子运动时间足够长时, 初始条件对系统响应一阶矩的影响消失, 故式 (18) 在充分长时间后演化为一阶稳态矩

$$\langle x(t) \rangle_{as} = \int_0^t W(t-t')f_0\sin(\Omega t')dt' = A\sin(\Omega t + \psi) \quad (19)$$

即式 (19) 可视为周期驱动信号 $f_0\sin(\omega t)$ 输入传递函数为 $W_2(s)/W_1(s)$ 的线性时不变系统的输出.

根据式 (17) 和式 (19), 获得系统稳态响应振幅 A 和相移 ψ 的解析表达式如下

$$\left. \begin{aligned} A &= f_0 \sqrt{(f_1^2 + f_2^2)/(f_3^2 + f_4^2)} \\ \psi &= \arctan\left[\frac{f_1f_4 - f_2f_3}{f_1f_3 + f_2f_4}\right] \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

其中系数 $f_i(i = 1, 2, 3, 4)$ 的表达式见附录 B.

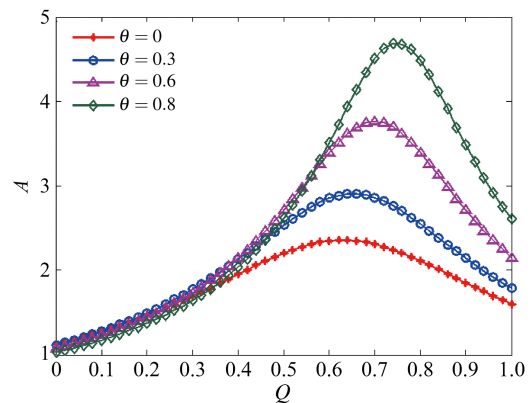
3 随机共振行为的讨论和数值验证

3.1 稳态响应振幅的共振行为

这一节我们将讨论式 (20) 中稳态响应振幅 A 作为质量涨落噪声强度 Q , 周期驱动信号频率 Ω

以及时滞 θ 的函数随不同参数变化所产生的共振行为, 并通过数值模拟验证理论结果的有效性. 其中, 固定部分参数取值为 $m = 1, f_0 = 1, \omega = 0.8$.

当质量涨落噪声强度 Q 变化时, 图 1(a) ~ 图 1(d) 分别绘制了以时滞 θ 、反馈强度 α 、记忆时间 τ 和质量涨落噪声的相关率 k 为参数的 $A-Q$ 曲线 (固定参数 $\Omega = 1.2$ 和 $\beta_0 = 0.6$). 这些曲线随着不同参数变化所出现的共振峰标志着随机共振现象的发生. 在图 1(a) 中, 当时滞 θ 从 0 增加至 0.8 时, $A-Q$ 曲线的峰值逐渐上升, 共振效应增强, 且峰的位置向 Q 增大的方向移动. 系统响应不仅依赖于 θ 而且与 α 密切相关. 如图 1(b) 所示, 当 $\alpha = -0.3$ 时, A 随 Q 单调变化, 共振现象消失. 随着 α 增大, $A-Q$ 曲线则重新出现共振峰, 峰值逐渐增大, 但峰的位置向 Q 减小的方向移动. 故从图 1(a) 和图 1(b) 中可发现, 适当延长时滞和增大反馈强度均有助于提升系统的输出响应 增强共振行为. 但二者使得共振峰位置的变化趋势相反, 增大反馈强度导致共振峰所对应的最优噪声强度减弱, 即增强了系统对质量涨落噪声的敏感性, 而增大时滞使得系统在较大的噪声强度处出现共振现象. 在复杂无序的非均匀环境中, 记忆时间 τ 反映了介质分子对系统运动产生的记忆效应. 在图 1(c) 中, 随着 τ 的增大, $A-Q$ 曲线的峰值显著下降, 峰的位置向右移动, 且共振峰趋于平缓. 可见, 记忆时间的增大能够有效减弱系统的输出响应, 对质量涨落诱导的共振行为起到抑制作用. 记忆时间源于系统的内部噪声, 而噪声相关率 k 则反映了环境介质分子对系统粒子随机吸附的特征. 在图 1(d) 中可观察到, 随着 k 的增大, $A-Q$ 曲线的峰值先下降, 再上升, 峰的位置从左侧转移到右侧.



(a) $k = 1, \tau = 0.4, \alpha = 0.2$

图 1 θ, α, τ 和 k 对 $A-Q$ 曲线的影响

Fig.1 The effect of θ, α, τ and k on the curve of $A-Q$

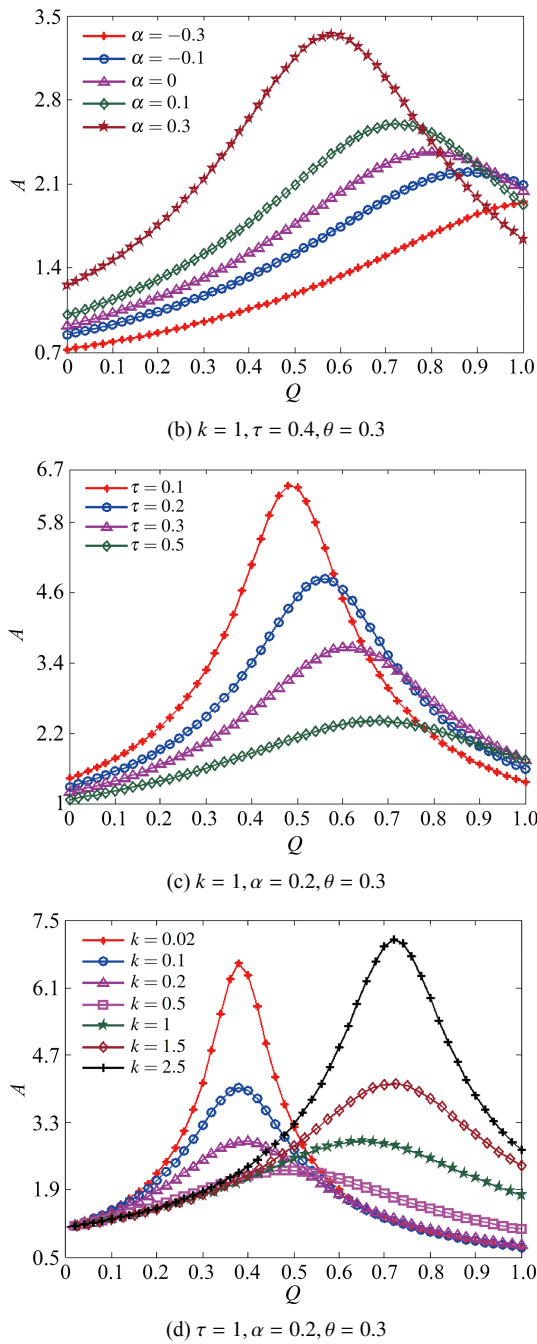


图1 θ, α, τ 和 k 对 $A-Q$ 曲线的影响 (续)

Fig.1 The effect of θ, α, τ and k on the curve of $A-Q$ (continued)

且当 $k = 0.5$ 时, 共振峰变宽, 共振强度达到最弱. 这表明该共振现象密切依赖于二值噪声在两个固定值之间的转换概率, 即质量涨落噪声的相关率对系统的随机共振行为具有显著影响, 其共振强度随着相关率的增大先减弱, 后增强.

图2 描述了稳态响应振幅 A 作为周期驱动信号频率 Ω 的函数, 讨论了时滞 θ 、反馈强度 α 、记忆时间 τ 以及质量涨落噪声的相关率 k 对 $A-\Omega$ 曲线变化的影响 (固定参数 $Q = 0.5$ 和 $\beta_0 = 0.6$). 特

别地, A 随着 Ω 的变化出现了真实共振现象^[9,37]. 在图 2(a) 中, 随着 θ 的增大, $A-\Omega$ 曲线的共振峰位置保持不变, 而峰值上升, 共振行为增强. 但从图 2(b) 中可看到, 当 α 从 -0.4 增加至 0.4 时, $A-\Omega$ 曲线的峰值下降, 共振峰位置向 Ω 增大的方向移动. 可见, 在一定参数范围内, 时滞反馈将有助于增强系统对周期驱动信号的响应强度, 但增强作用随着时滞的增大而加强, 随着反馈强度的增大而减弱. 进一步, 记忆时间 τ 对 $A-\Omega$ 曲线的影响在图 2(c) 中被展示. 从该图中可发现, 存在最优记忆时间 ($\tau = 0.2$) 能够最大化系统的输出响应, 使得共振强度达到最佳. 随着 τ 的持续增大, 共振峰位置向左移动, 峰值下降, 即较长的记忆时间仍对随机共振呈现抑制作用. 最后, 图 2(d) 给出了 $A-\Omega$ 曲线随 k 变化的趋势, 当 $k \leq 0.3$ 时, $A-\Omega$ 曲线出现了真实的双峰共振现象, 即随机多共振. 随着 k 的增大, 两侧峰值逐渐减弱, 中间波谷开始上升. 当 $k \geq 0.5$ 时, 两侧共振峰完全消失, 中间波谷持续上升形成一个新的单峰共振现象. 这种现象是由于较小的二值噪声相关率导致系统的转换显著变慢, 在两个不同的周期驱动频

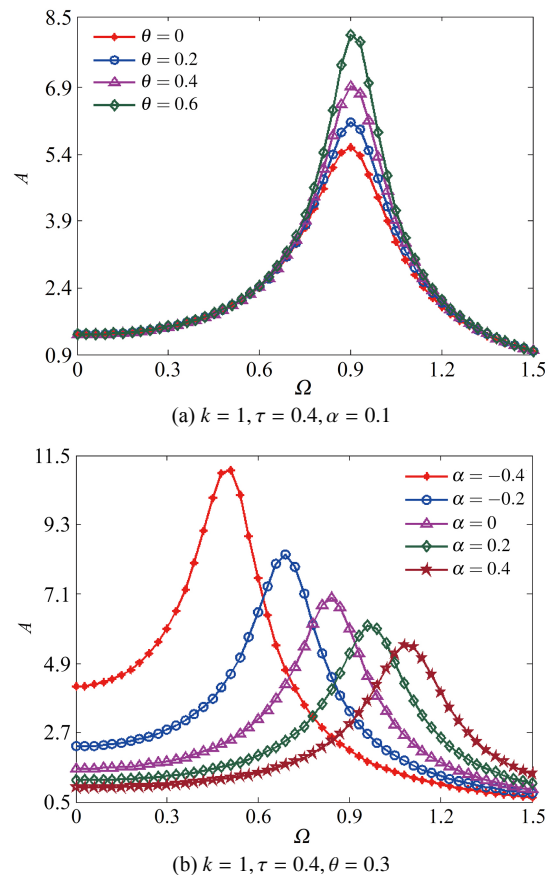
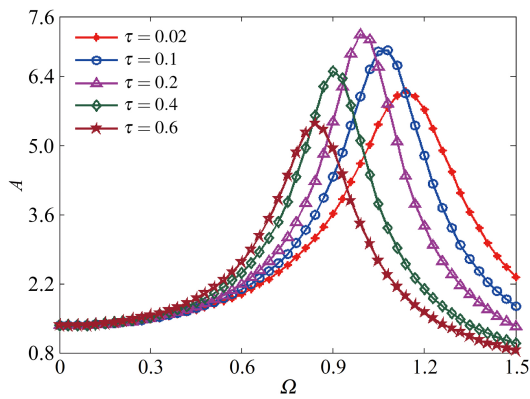
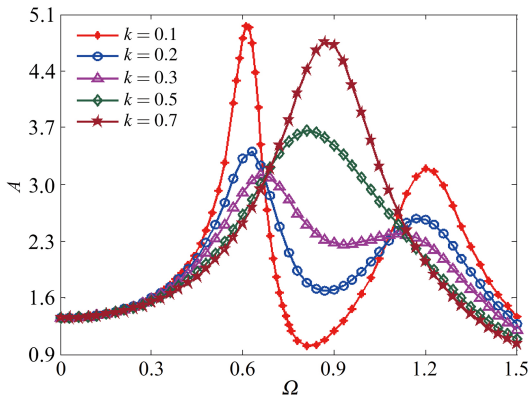


图2 θ, α, τ 和 k 对 $A-\Omega$ 曲线的影响

Fig.2 The effect of θ, α, τ , and k on the curve of $A-\Omega$



(c) $k = 0.1, \alpha = 0.1, \theta = 0.3$



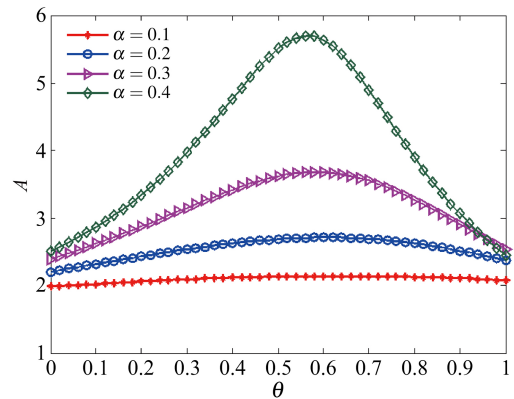
(d) $\tau = 0.4, \alpha = 0.1, \theta = 0.3$

图 2 θ, α, τ , 和 k 对 $A-\Omega$ 曲线的影响 (续)

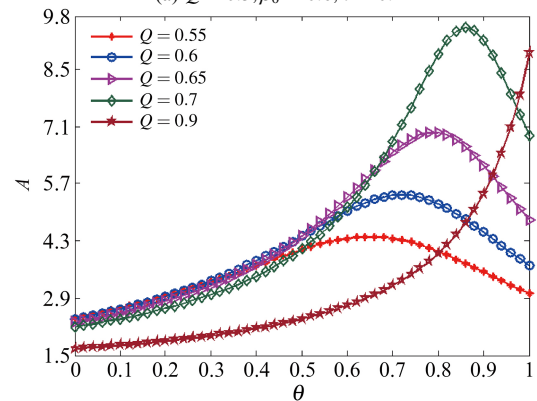
Fig.2 The effect of θ, α, τ , and k on the curve of $A-\Omega$ (continued)

率处出现真实共振现象,但随着相关率的增大,系统转换加快,重新出现传统的单峰共振现象.

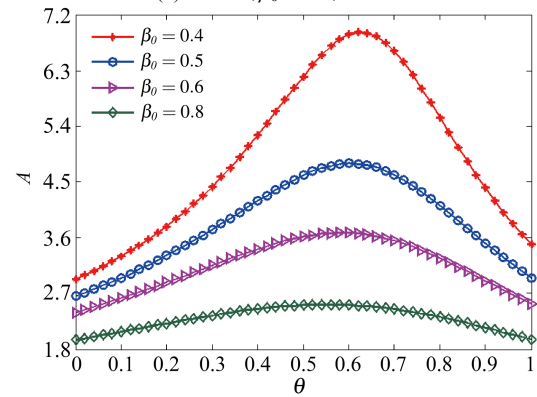
稳态响应振幅 A 也是时滞 θ 的函数,图 3(a)~图 3(d) 分别展示了此函数随反馈强度 α , 质量涨落噪声强度 Q , 阻尼系数 β_0 以及记忆时间 τ 的变化情况 (固定参数 $\Omega = 1.2$ 和 $k = 1$). 从图 3(a) 中可观察到,随着 α 的增大, $A-\theta$ 曲线出现了参数诱导的共振现象,其峰值显著上升.但对于较弱的反馈强度 $\alpha = 0.1$, A 几乎不再随着 θ 的变化而改变.时滞与反馈强度反映了时滞反馈在该系统中对输出响应的作用,上述结果表明合理调整时滞反馈参数将能够有效提升系统对于驱动信号的输出响应.在图 3(b) 中,随着 Q 的逐渐增大,共振峰位置向时滞增大的方向移动且峰值依次升高,即质量涨落噪声强度与时滞对增强系统响应的作用呈现正相关关系,这与图 1(a) 所示的结果一致.但是,当质量涨落噪声强度持续增大到一定值时 ($Q = 0.9$),共振现象消失.此外,阻尼系数 β_0 与记忆时间 τ 是反映系统记忆效应的两个重要特征参数.在图 3(c) 中,共振峰随着 β_0 的增大而下降,系统响应被减弱,即阻尼



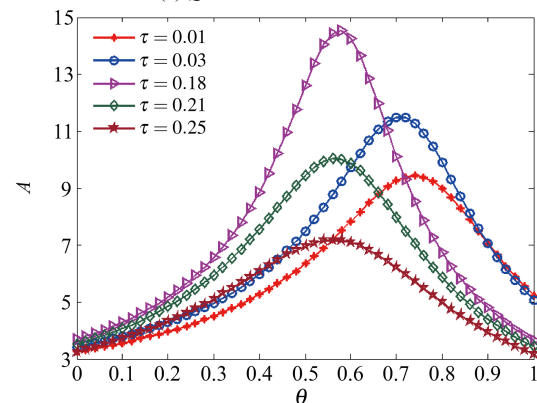
(a) $Q = 0.5, \beta_0 = 0.6, \tau = 0.4$



(b) $\alpha = 0.3, \beta_0 = 0.6, \tau = 0.4$



(c) $Q = 0.5, \alpha = 0.3, \tau = 0.4$



(d) $Q = 0.5, \beta_0 = 0.6, \alpha = 0.3$

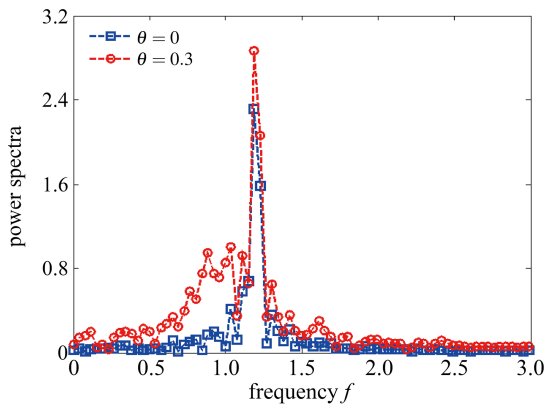
图 3 α, Q, β_0 和 τ 对 $A-Q$ 曲线的影响

Fig.3 The effect of α, Q, β_0 and τ on the curve of $A-Q$

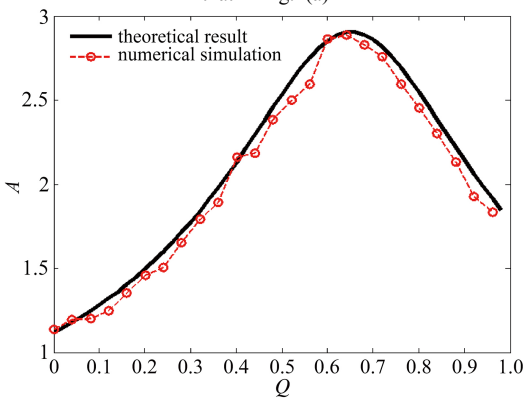
效应增强对共振行为起到减弱作用. 而从图 3(d) 中观察到, 随着 τ 的增大, $A-\theta$ 曲线的峰值先变大, 后变小. 故在复杂无序的非均匀环境中, 不同长短的记忆时间分别对系统的共振效应呈现增强作用和抑制作用, 然而合理协调时滞与记忆时间的关系将有助于提升系统的输出响应强度.

3.2 数值验证

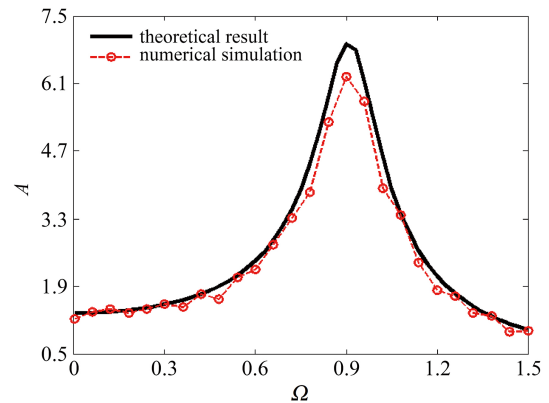
为检验上述理论结果的有效性, 有必要进行数值模拟验证. 采用四阶 Runge-Kutta 算法对方程 (1) 进行数值离散化, 为最大化减小误差, 选择时间步长为 $\Delta t = 0.01$, 数据长度为 $N = 1.0 \times 10^4$. 在相同参数条件下重复获取 600 次系统的时间历程, 并对其作整体平均. 最后, 利用快速 Fourier 变换, 取采样频率 $F_s = 100$, 得到系统的响应功率谱, 如图 4(a) 所示. 响应功率谱在频率值 $f \approx 1.2$ 处出现显著针状尖峰, 与周期驱动频率 Ω 的值一致, 其峰值代表了系统对周期驱动信号的响应幅值. 可见, 在适当噪声强度下, 该响应幅值受时滞作用增大. 进一步, 在图 4(b) ~ 图 4(d) 中, 数值模拟分别给出了系统稳态响



(a) $Q = 0.64, k_B = T = 0.1$, 其他函数同图 1(a)
 (a) $Q = 0.64, k_B = T = 0.1$, the other parameters are same as that in Fig. 1(a)

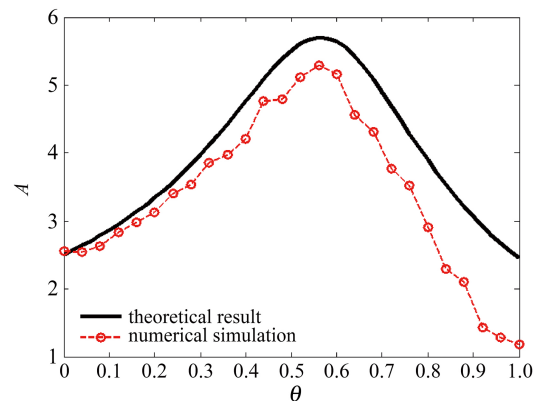


(b) $\theta = 0.3$, 其他参数同图 1(a)
 (b) $\theta = 0.3$, the other parameters are same as that in Fig. 1(a)



(c) $\theta = 0.4$, 其他参数同图 2(a)

(c) $\theta = 0.4$, the other parameters are same as that in Fig. 2(a)



(d) $\alpha = 0.4$, 其他参数同图 3(a)

(d) $\alpha = 0.4$, the other parameters are same as that in Fig. 3(a)

图 4 系统 (1) 的响应功率谱, 稳态响应振幅的理论结果与数值模拟对比

Fig. 4 The power spectra of the system (1), the contrast between theoretical and numerical simulation

应振幅关于质量涨落噪声强度 Q , 周期驱动信号频率 Ω 以及时滞 θ 的变化曲线, 并与理论结果对比. 数值结果与理论结果具有较好的吻合, 验证了理论结果的有效性. 但在不同系统参数下, 数值结果与理论结果的吻合程度略有差别, 在图 4(c) 中, 当驱动频率 Ω 处于共振峰周围时, 由于噪声在该频段较为集中, 系统输出受噪声影响较大, 故吻合程度相对较差. 在图 4(d) 中, 随着时滞 θ 的增大, 误差相对增大, 这是由于理论结果是依据小时滞近似所获得, 符合实际现象. 总之, 通过数值仿真充分地体现了理论结果的合理性.

4 结论

本文研究了由时滞反馈、质量涨落噪声及周期驱动信号共同作用的具有记忆效应的欠阻尼系统的随机共振. 通过引入新变量, 并利用小时滞展开

理论, 将广义 Langevin 方程描述的非马尔科夫系统嵌入为等价的马尔科夫线性系统. 进一步, 获得系统稳态响应振幅的解析表达式, 并分析了时滞反馈、质量涨落噪声及记忆核对其影响. 研究表明: 稳态响应振幅随质量涨落噪声强度的变化出现随机共振现象, 且共振行为随着时滞的增大而增强, 随着记忆时间的增大而减弱; 随着周期驱动信号频率的变化出现真实共振行为, 其中存在最优记忆时间使得共振峰值达到最优, 且较小的质量涨落噪声相关率使得系统出现随机多共振现象. 此外, 在适当参数范围内, 稳态响应振幅随着时滞的变化也出现共振现象. 相反于时滞对系统响应的增强作用, 较长的记忆时间仍对系统共振行为起到抑制作用, 合理控制时滞与记忆时间的变化关系将有助于增强系统对周期驱动信号的响应强度. 最后, 通过数值计算的输出响应振幅验证了理论结果的有效性.

该记忆阻尼模型在实际的物理及生物系统中被广泛应用, 特别地被应用于研究反常扩散现象, 比如研究黑体辐射中带电粒子的弹道扩散现象^[14]. 上述结论分析了此非马尔科夫系统的共振行为, 在复杂环境中, 为深入研究介质分子的吸附能力及时滞反馈对系统共振行为的影响提供了理论依据.

参 考 文 献

- 1 Benzi R, Sutera A, Vulpiani A. The mechanism of stochastic resonance. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1981, 14(11): L453-L457
- 2 Gammaitoni L, Hänggi P, Jung P, et al. Stochastic Resonance. *Reviews of Modern Physics*, 1998, 70(1): 223-287
- 3 Jin YF, Ma ZM, Xiao SM. Coherence and stochastic resonance in a periodic potential driven by multiplicative dichotomous and additive white noise. *Chaos Solitons & Fractals*, 2017, 103: 470-475
- 4 Gitterman M, Shapiro I. Stochastic resonance in a harmonic oscillator with random mass subject to asymmetric dichotomous noise. *Journal of Statistical Physics*, 2011, 144(1): 139-149
- 5 Wu J, Xu Y, Wang HY. Information-based measures for logical stochastic resonance in a synthetic gene network under Lévy flight superdiffusion. *Chaos*, 2017, 27(6): 339-342
- 6 Nicolis C, Nicolis G. Stochastic resonance across bifurcation cascades. *Physical Review E*, 2017, 95(3): 032219-8
- 7 Kang YM, Wang M, Xie Y. Stochastic resonance in coupled weakly-damped bistable oscillators subjected to additive and multiplicative noises. *Acta Mechanica Sinica*, 2012, 28(2): 505-510
- 8 Zheng RC, Nakano K, Hu HG, et al. An application of stochastic resonance for energy harvesting in a bistable vibrating system. *Journal of Sound & Vibration*, 2014, 333(12): 2568-2587
- 9 Berdichevsky V, Gitterman M. Stochastic resonance in linear systems subject to multiplicative and additive noise. *Physical Review E*, 1999, 60(2): 1494-1499
- 10 Li JM, Chen XF, He Z. Multi-stable stochastic resonance and its application research on mechanical fault diagnosis. *Journal of Sound & Vibration*, 2013, 332(22): 5999-6015
- 11 Siegle P, Goychuk I, Hänggi P. Origin of hyperdiffusion in generalized Brownian motion. *Physical Review Letters*, 2010, 105(10): 100602-4
- 12 Wang KG, Tokuyama M. Nonequilibrium statistical description of anomalous diffusion. *Physica A*, 1996, 265(3): 341-351
- 13 Plyukhin AV. Nonergodic solutions of the generalized Langevin equation. *Physical Review E*, 2011, 83(6): 062102-3
- 14 Bao JD, Bai ZW. Ballistic diffusion of a charged particle in a black-body radiation field. *Chinese Physics Letters*, 2005, 22(8): 1845-1847
- 15 Bao JD. Numerical integration of a non-markovian langevin equation with a thermal band-passing noise. *Journal of Statistical Physics*, 2004, 114(1-2): 503-513
- 16 Bao JD, Zhuo YZ. Ballistic diffusion induced by a thermal broadband noise. *Physical Review Letters*, 2003, 91(13): 138104-4
- 17 谢文贤, 许鹏飞, 蔡力等. 随机双指数记忆耗散系统的非马尔科夫扩散. *物理学报*, 2013, 62(8): 080503-6 (Xie Wenxian, Xu Pengfei, Cai Li, et al. Non-markovian diffusion of the stochastic system with a biexponential dissipative memory kernel. *Acta Physica Sinica*, 2013, 62(8), 080503-6 (in Chinese))
- 18 Srokowski T. Bistable generalised langevin dynamics driven by correlated noise possessing a long jump distribution: Barrier crossing and stochastic resonance. *European Physical Journal B*, 2013, 86(5): 239-245
- 19 Neiman A, Sung W. Memory effects on stochastic resonance. *Physics Letters A*, 1996, 223(5): 341-347
- 20 Kim S, Park SH, Pyo HB. Stochastic resonance in coupled oscillator systems with time delay. *Physical Review Letters*, 1999, 82(8): 1620-1623
- 21 胡海岩, 赵永辉, 黄锐. 飞机结构气动弹性分析与控制研究. *力学学报*, 2016, 48(1): 1-27 (Hu Haiyan, Zhao Yonghui, Huang Rui. Studies on aeroelastic analysis and control of aircraft structures. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2016, 48(1): 1-27 (in Chinese))
- 22 Morse R, Longtin A. Coherence and stochastic resonance in threshold crossing detectors with delayed feedback. *Physics Letters A*, 2006, 359(6): 640-646
- 23 申永军, 赵永香, 田佳雨等. 一类含时滞的半主动悬架系统的动力学分析. *力学学报*, 2013, 45(5): 755-762 (Shen Yongjun, Zhao Yongxiang, Tian Jiayu, et al. Dynamical analysis on a kind of semi-active suspension with time delay. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2013, 45(5): 755-762 (in Chinese))
- 24 Sun ZK, Yang XL, Xiao YZ. Modulating resonance behaviors by noise recycling in bistable systems with time delay. *Chaos*, 2014, 24(2): 023126-6
- 25 张舒, 徐鉴. 时滞耦合系统非线性动力学的研究进展. *力学学报*, 2017, 49(3): 565-587 (Zhang Shu, Xu Jian. Review on nonlin-

- ear dynamics in systems with coupling delays. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, 49(3): 565-587 (in Chinese))
- 26 Jin YF. Noise-induced dynamics in a delayed bistable system with correlated noises. *Physica A*, 2012, 391(5): 1928-1933
- 27 Zhong SC, Zhang L, Wang HQ, et al. Nonlinear effect of time delay on the generalized stochastic resonance in a fractional oscillator with multiplicative polynomial noise. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 89(2): 1324-1340
- 28 Yu HT, Wang J, Du JW, et al. Effects of time delay on the stochastic resonance in small-world neuronal networks. *Chaos*, 2013, 23(1): 013128-7
- 29 Gitterman M. Harmonic oscillator with fluctuating damping parameter. *Physical Review E*, 2004, 69(4): 041101-4
- 30 谢文贤, 李东平, 许鹏飞等. 具有固有频率涨落的记忆阻尼非线性系统的随机共振. *物理学报*, 2014, 63(10): 100502-8 (Xie Wenxian, Li Dongping, Xu Pengfei, et al. Stochastic resonance of a memorial-damped linear system with natural frequency fluctuation. *Acta Physica Sinica*, 2014, 63(10): 100502-8 (in Chinese))
- 31 Gitterman M. Oscillator with random trichotomous mass. *Physica A*, 2012, 391(22): 5343-5348
- 32 Rubi JM, Gadomski A. Nonequilibrium thermodynamics versus model grain growth: derivation and some physical implications. *Physica A*, 2003, 326(3): 333-343
- 33 Pérez AT, Saville D, Soria C. Modeling the electrophoretic deposition of colloidal particles. *Europhysics Letters*, 2001, 55(3): 425-431
- 34 Guillouzic S, L'Heureux I, Longtin A. Small delay approximation of stochastic delay differential equations. *Physical Review E*, 1999, 59(4): 3970-3982
- 35 Shapiro VE, Loginov VM. "Formulae of differentiation" and their use for solving stochastic equations. *Physica A*, 1978, 91(3): 563-574
- 36 刘秉正, 彭建华. 非线性动力学. 北京: 高等教育出版社, 2004 (Liu Bingzheng, Peng Jianhua. *Nonlinear Dynamics*. Beijing: Higher Education Press, 2004 (in Chinese))
- 37 Gammaitoni L, Marchesoni F, Santucci S. Stochastic resonance as a bona fide resonance. *Physical Review Letters*, 1995, 74 (7): 1052-1055

附录 A

系数 $g_{mn}(m, n = 1, 2, 3, 4)$ 的具体表达式

$$\begin{aligned} g_{11} &= (m + 0.5\alpha\theta^2)s^2 + (\beta_0 - \alpha\theta)s + \omega^2 + \alpha \\ g_{12} &= -1 \\ g_{13} &= m(s + k)^2 \\ g_{14} &= [(m + 0.5\alpha\theta^2)s + (\beta_0 - \alpha\theta)]u_1(0) + (m + 0.5\alpha\theta^2)\dot{u}_1(0) + m(s + 2k)u_3(0) + m\dot{u}_3(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{21} &= -\tau^{-1}\beta_0 \\ g_{22} &= (s + \tau^{-1}) \\ g_{23} &= -\tau^{-1}\beta_0u_1(0) + u_2(0) \\ g_{31} &= mQs^2 \\ g_{32} &= (m + 0.5\alpha\theta^2)(s + k)^2 + (\beta_0 - \alpha\theta)(s + k) + \omega^2 + \alpha \\ g_{33} &= -1 \\ g_{34} &= mQ[su_1(0) + \dot{u}_1(0)] + [(m + 0.5\alpha\theta^2)(s + 2k) + \beta_0 - \alpha\theta]u_3(0) + (m + 0.5\alpha\theta^2)\dot{u}_3(0) \\ g_{41} &= -\tau^{-1}\beta_0(s + k) \\ g_{42} &= s + k + \tau^{-1} \\ g_{43} &= -\tau^{-1}\beta_0u_3(0) + u_4(0) \end{aligned}$$

附录 B

系数 $f_i(i = 1, 2, 3, 4)$ 的具体表达式

$$\begin{aligned} f_1 &= -1.5\Omega^2\alpha\theta^2k^2 + 2\Omega^2k\alpha\theta + \Omega^4m - \Omega^2\omega^2 - \Omega^2\alpha - 3\Omega^2mk^2 + 0.5\Omega^4\alpha\theta^2 - 2\Omega^2k\beta_0 + \tau^{-1}(-2.5\alpha\theta^2\Omega^2k + k^2\beta_0 + \omega^2k + \alpha k - \Omega^2\beta_0 + mk^3 - 5m\Omega^2k + 0.5\alpha\theta^2k^3 - k^2\alpha\theta + 2\Omega^2\alpha\theta) + \tau^{-2}(\omega^2 + \alpha - m\Omega^2 + mk^2 - 0.5\alpha\theta^2\Omega^2 + 0.5\alpha\theta^2k^2 - k\alpha\theta) \\ f_2 &= \Omega(k^2\beta_0 + \omega^2k + \alpha k - 1.5\Omega^2\alpha\theta^2k + mk^3 - \Omega^2\beta_0 - 3m\Omega^2k + 0.5\alpha\theta^2k^3 - \alpha\theta k^2 + \alpha\theta\Omega^2) + \Omega\tau^{-1}(-\alpha\theta^2\Omega^2 + 2\omega^2 + 2\alpha - 2m\Omega^2) \\ f_3 &= [\Omega^2(m\alpha\theta - 0.5\beta_0\alpha\theta^2 - m\beta_0 + 0.5\alpha^2\theta^3) + \tau^{-1}(m^2Q\Omega^2 - 0.25\alpha^2\theta^4\Omega^2 + 0.5\omega^2\alpha\theta^2 + m\omega^2 - m\alpha\theta^2\Omega^2 + 0.5\alpha^2\theta^2 + am + 4mk^2 + 2k\beta_0 + 2\alpha\theta^2k^2 - 3k\alpha\theta) + \Omega\tau^{-2}(-\alpha\theta + k\alpha\theta^2 + 2km) - m^2\Omega^2]k^3 + [\Omega^2(3m^2\Omega^2 - 3m\alpha + 2\alpha\theta\beta_0 + 0.75\alpha^2\theta^4\Omega^2 - 3mQ\Omega^2 - \beta_0^2 - 2.5\alpha^2\theta^2 - 3m\omega^2 + 3m\alpha\theta^2\Omega^2 - 1.5\omega^2\alpha\theta^2) + \tau^{-1}(\alpha\beta_0 - 2m\beta_0\Omega^2 - \alpha\theta^2\beta_0\Omega^2 - \alpha^2\theta + \omega^2\beta_0 + 2.5\alpha^2\theta^3\Omega^2 - \omega^2\alpha\theta + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 5m\Omega^2\alpha\theta)]k^2 + [\Omega^2(5m\beta_0\Omega^2 + \\
 & 3\omega^2\alpha\theta - 3\omega^2\beta_0 + 3\alpha^2\theta + \\
 & 2.5\alpha\theta^2\beta_0\Omega^2 - 2.5\alpha^2\theta^3\Omega^2 - \\
 & 5m\Omega^2\alpha\theta - 3\alpha\beta_0) + \tau^{-1}(\alpha^2 - \\
 & 6\alpha^2\theta^2\Omega^2 + 2\omega^2\alpha + 5m^2\Omega^4 + \\
 & 5m\Omega^4\alpha\theta^2 - 3\alpha\theta^2\Omega^2\omega^2 - 6m\Omega^2\alpha - \\
 & 6m\Omega^2\omega^2 + 3\alpha\theta\beta_0\Omega^2 + \omega^4 + \\
 & 1.25\alpha^2\theta^4\Omega^4 - 5m^2Q\Omega^4) + \\
 & \tau^{-2}(3m\alpha\theta\Omega^2 + 1.5\alpha^2\theta^3\Omega^2 - \omega^2\alpha\theta - \\
 & \alpha^2\theta)]k + \Omega^2(\Omega^2\beta_0^2 - \alpha^2 - 2\omega^2\alpha + \\
 & \alpha\theta^2\Omega^2\omega^2 - m\Omega^4\alpha\theta^2 + 2m\Omega^2\alpha + \\
 & 2m\Omega^2\omega^2 + m^2Q\Omega^4 - m^2\Omega^4 - \omega^4 + \\
 & 2\alpha^2\theta^4\Omega^2 - 2\alpha\theta\beta_0\Omega^2 - \\
 & 0.25\alpha^2\theta^4\Omega^4) + \Omega^2\tau^{-1}(4\alpha^2\theta + \\
 & \alpha\beta_0\theta^2\Omega^2 - 2\beta_0\omega^2 - 2\beta_0\alpha + \\
 & 2\beta_0m\Omega^2 - 4m\alpha\theta\Omega^2 + 4\alpha\theta\omega^2 - \\
 & 2\alpha^2\theta^3\Omega^2) + \tau^{-2}(\alpha^2 - m^2Q\Omega^4 - \\
 & 2\alpha^2\theta^2\Omega^2 + m\alpha\theta^2\Omega^4 + \omega^4 - \\
 & \alpha\theta^2\Omega^2\omega^2 - 2m\Omega^2\omega^2 + 2\alpha\omega^2 + \\
 & 0.25\alpha^2\theta^4\Omega^4 + m^2\Omega^4 - 2m\alpha\Omega^2) \\
 f_4 = & \Omega[(m^2Q\Omega^2 + m\alpha + 0.5\alpha^2\theta^2 - \\
 & 0.25\alpha^2\theta^4\Omega^2 + 0.5\omega^2\alpha\theta^2 - m^2\Omega^2 - \\
 & m\alpha\theta^2\Omega^2 + m\omega^2) + \tau^{-1}(-0.5\alpha\theta^2\beta_0 - \\
 & m\alpha\theta + 0.5\beta_0\alpha\theta^2 - 0.5\alpha^2\theta^3)]k^3 - \\
 & \Omega[(\alpha\theta\omega^2 - 4m\alpha\theta\Omega^2 - \omega^2\beta_0 - \\
 & 2\alpha^2\theta^3\Omega^2 - \beta_0\alpha + 4m\beta_0\Omega^2 + \alpha^2\theta + \\
 & 2\alpha\theta^2\beta_0\Omega^2) + \tau^{-1}(-\beta_0\alpha\theta + \beta_0^2 + \\
 & 4m\alpha\theta^2\Omega^2 - 2\omega^2\alpha\theta^2 - 4m^2Q\Omega^2 - \\
 & 4m\alpha - 4m\omega^2 + \alpha^2\theta^4\Omega^2 - 3\alpha^2\theta^2 + \\
 & 4m^2\Omega^2 - \beta_0^2 + 2\beta_0\alpha\theta) + \tau^{-2}(0.5\alpha^2\theta^3 + \\
 & m\alpha\theta)]k^2 + \Omega[2\omega^2\alpha - 3m^2Q\Omega^4 + \\
 & 0.75\alpha^2\theta^4\Omega^4 - 2\Omega^2\beta_0^2 + 3m^2\Omega^4 - \\
 & 4m\Omega^2\omega^2 + \alpha^2 - 4m\Omega^2\alpha - \\
 & 2\alpha\theta^2\Omega^2\omega^2 + 4\alpha\theta\beta_0\Omega^2 + 3m\alpha\theta^2\Omega^4 - \\
 & 4\alpha^2\theta^2\Omega^2 + \omega^4 + 2\tau^{-1}(\beta_0\omega^2 + \beta_0\alpha - \\
 & 2m\beta_0\Omega^2 - \alpha\beta_0\theta^2\Omega^2 + 2\alpha^2\theta^3\Omega^2 - \\
 & 2\alpha\theta\omega^2 - 2\alpha^2\theta + 4m\alpha\theta\Omega^2) + \\
 & \tau^{-2}(2m^2Q\Omega^2 + 2m\omega^2 + \omega^2\alpha\theta^2 - \\
 & 2m\alpha\theta^2\Omega^2 - 0.5\alpha^2\theta^4\Omega^2 - 2m^2\Omega^2 + \\
 & 2\alpha^2\theta^2 + 2m\alpha)]k - \Omega^3(2\omega^2\beta_0 + \\
 & 2\alpha\beta_0 - 2m\beta_0\Omega^2 - \alpha\beta_0\theta^2\Omega^2 - \\
 & 2\alpha\theta\omega^2 - 2\alpha^2\theta + \alpha^2\theta^3\Omega^2 + \\
 & 2m\alpha\theta\Omega^2) + \Omega\tau^{-1}(2\alpha\beta_0\theta\Omega^2 + \\
 & 2\omega^2 - 4m\alpha\Omega^2 + 4\omega^2\alpha - 4m\Omega^2\omega^2 - \\
 & 2\alpha\theta^2\Omega^2\omega^2 + 2\alpha^2 - 4\alpha^2\theta^2\Omega^2 + \\
 & 2m^2\Omega^4 + 0.5\alpha^2\theta^4\Omega^4 + 2m\alpha\theta^2\Omega^4 - \\
 & 2m^2Q\Omega^4) + \Omega\tau^{-2}(\alpha^2\theta^3\Omega^2 - \\
 & 2m\beta_0\Omega^2 - 2\alpha\theta\omega^2 - 2\alpha^2\theta + 2m\alpha\theta\Omega^2)
 \end{aligned}$$