

# 黏性流体环境下 V 型悬臂梁结构 流固耦合振动特性研究<sup>1)</sup>

胡 璐 闫 寒 张文明<sup>2)</sup> 彭志科 孟 光

(上海交通大学机械系统与振动国家重点实验室, 上海 200240)

(上海交通大学机械与动力工程学院, 上海 200240)

**摘要** V 型悬臂梁结构在原子力显微镜、微纳机械传感器件中得到了广泛应用, 该结构通常在黏性流体环境下实现精密检测、传感与性能表征, 同时也会使得结构的流固耦合振动特性更为复杂, 直接影响器件的动态性能. 本文针对 V 型结构变截面、变刚度等复杂几何特征, 建立了黏性流体环境下 V 型悬臂梁结构的流固耦合动力学模型, 导出了基于截面孔宽比参数的梁结构的修正水动力函数, 确定了截面孔宽比和频率参数影响下 V 型悬臂梁结构的水动力函数; 理论分析得到了黏性流体中 V 型梁结构的频率响应特性. 同时, 设计了多种不同几何尺寸的 V 型梁结构, 并在水环境中开展了实验验证, 结果表明, 实验所得频率响应与理论分析结果吻合较好, 验证了 V 型梁结构水动力函数修正表达式及流固耦合动力学模型. 此外, 基于该流固耦合动力学模型, 详细分析了不同流体黏度、V 型梁角度及尺寸变化对耦合系统振动特性的影响.

**关键词** V 型悬臂梁, 流固耦合, 水下振动, 水动力函数, 频响分析

中图分类号: O327 文献标识码: A doi: 10. 6052/0459-1879-18-028

## ANALYSIS OF FLEXURAL VIBRATION OF V-SHAPED BEAMS IMMERSED IN VISCOUS FLUIDS<sup>1)</sup>

Hu Lu Yan Han Zhang Wenming<sup>2)</sup> Peng Zhike Meng Guang

(State Key Laboratory of Mechanical System and Vibration, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

(School of Mechanical Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

**Abstract** V-shaped beams have been widely used in atomic force microscope (AFM) and micro-nano mechanical sensing applications. The structure is usually used for sophisticated detection, sensing and performance characterization in viscous fluids, thus making it complex to study the vibration characteristics of the structure by considering the fluid-structure interaction between the complicated geometry and viscous fluids. It is of fundamental importance to investigate the vibration characteristics of V-shaped beams submerged in viscous fluids owing to the fact that the vibration characteristics will directly affect the dynamic properties of the applications. In this paper, an underwater vibration model is developed to depict the dynamic characteristics of V-shaped beams immersed in viscous fluids by taking into account the fact that the cross-section and bending stiffness of the V-shaped beam are variable along the beam axis. A complex hydrodynamic function in terms of the gap to width ratio and the frequency parameter is developed to describe the

2018-01-29 收稿, 2018-03-20 录用, 2018-03-20 网络版发表.

1) 国家杰出青年科学基金 (11625208) 和国家自然科学基金 (11572190) 资助项目.

2) 张文明, 教授, 主要研究方向: 动力学与振动控制. E-mail: wenmingz@sjtu.edu.cn

**引用格式:** 胡璐, 闫寒, 张文明, 彭志科, 孟光. 黏性流体环境下 V 型悬臂梁结构流固耦合振动特性研究. 力学学报, 2018, 50(3): 643-653

Hu Lu, Yan Han, Zhang Wenming, Peng Zhike, Meng Guang. Analysis of flexural vibration of V-shaped beams immersed in viscous fluids. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2018, 50(3): 643-653

hydrodynamic loading where the complex hydrodynamic function is derived from the modified hydrodynamic function based on the gap to width ratio in beam's cross-section. Besides, the frequency response of V-shaped beams vibrating in viscous fluids is obtained theoretically. Moreover, the experimental verifications on flexural vibrations of several V-shaped beams with different geometrical sizes are carried out. It demonstrates that the experimental data is in good agreement with the theoretical results, thus validating the modified expression of hydrodynamic function and the underwater dynamic model. Besides, the effect of different fluid viscosities, angles of V-shaped beams and the scale of the geometry on the vibration characteristics of the coupling system is analyzed based on the proposed fluid-structure interaction model.

**Key words** V-shaped beams, fluid-structure interaction, underwater vibration, hydrodynamic function, frequency response

## 引 言

V 型悬臂梁作为一种新颖柔性结构,在原子力显微镜 (AFM)<sup>[1-6]</sup>、能量采集器<sup>[7-8]</sup>以及微纳机械传感器<sup>[9-11]</sup>等检测、传感器件或系统中得到广泛应用。V 型悬臂梁结构因其在表面接触中不易发生侧扭或旋转<sup>[12]</sup>,能够显著提升器件或系统性能,但是其变截面、变刚度<sup>[13]</sup>等复杂几何特征严重影响结构的动力学性能。

近年来, V 型悬臂梁结构设计、性能表征及其力学行为得到广泛关注。Sader 等<sup>[14]</sup>提出了 V 型悬臂梁刚度系数的校准方法,并在商用 V 型梁器件制备中得到成功应用<sup>[15]</sup>。Lee 等<sup>[16-18]</sup>基于经典梁理论和修正后的偶应力理论,分别分析了矩形梁和 V 型悬臂梁的灵敏度,结果表明,在接触刚度较低时, V 型悬臂梁比矩形梁的振动模态灵敏度高。Korayem 等<sup>[19-21]</sup>研究了 V 型梁结构几何变化对其刚度系数的影响,并分析了非接触、轻敲两种模式下的 V 型悬臂梁结构的动力学特性。

虽然许多学者研究了真空和空气环境下 V 型悬臂梁的动力学行为,但是实际上液体环境中 V 型梁的应用更普遍<sup>[22]</sup>,如组织液中细胞表面结构的表征<sup>[23]</sup>,培养液中蛋白质碳链长度的测定<sup>[24]</sup>,抗体工作液浓度的检验<sup>[25]</sup>等。由此,研究 V 型悬臂梁在液体环境下的动力学特性,对于提升相关器件或系统的性能具有重要意义。而研究的关键在于,分析水动力载荷对流固耦合动力学行为的影响。水动力载荷是由流体惯性、黏度及对流现象相互作用引起的复杂作用力<sup>[26-28]</sup>,可分解成同相和异相分量,分别代表附加质量和流体阻尼<sup>[29-31]</sup>。Turk<sup>[32]</sup>研究了矩形悬臂梁的流固耦合振动,给出了仅由雷诺数决定的水动力载荷表达式。Sader<sup>[33]</sup>引入水动力函数对载荷进行了定量描述,函数的实部和虚部分别表示附加质量和流体阻尼。Aureli 等<sup>[34-35]</sup>引入频率参数给出了矩形梁水动力函数表达式,并针对定截面

和变截面矩形梁开展了水下振动实验,验证了该函数表达式。但相比于矩形梁, V 型梁几何结构更为复杂,其在流体环境下的水动力函数表达式尚未见报道。与同等宽度和厚度的矩形梁截面相比, V 型梁截面所受附加质量和流体阻尼力减小,采用矩形梁水动力函数描述 V 型梁所受载荷,会导致附加质量及流体阻尼产生较大偏差,因此迫切需要对矩形梁水动力函数进行修正,以得到 V 型悬臂梁结构的水动力函数表达式。

本文基于 Euler-Bernoulli 梁理论,针对 V 型结构变截面、变刚度等复杂几何特征,建立了 V 型梁结构在黏性流体环境下的流固耦合振动模型。引入 V 型梁结构的截面孔宽比参数对矩形梁水动力函数进行修正,得到截面孔宽比和频率参数影响下 V 型悬臂梁结构的水动力函数。开展 V 型悬臂梁结构在水环境下的流固耦合振动实验研究,将实验测得的频率响应结果与模型求解结果进行对比,对水动力函数表达式及流固耦合振动模型进行了验证。基于 V 型悬臂梁结构流固耦合振动模型,分析了不同流体黏度、V 型梁角度及尺寸变化对流固耦合动力学特性的影响。

## 1 动力学模型与分析

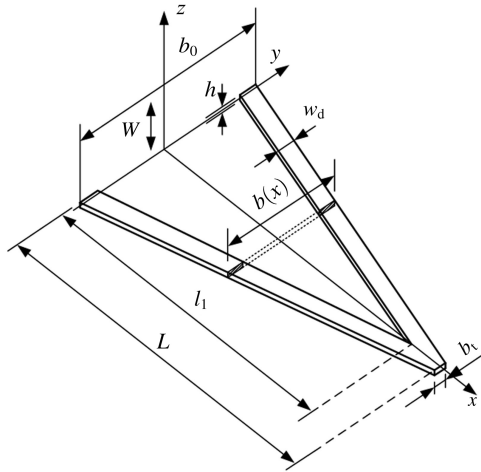
### 1.1 V 型梁流固耦合动力学模型

图 1 所示为 V 型梁结构及其流固耦合动力学模型,梁长度、宽度及厚度分别为  $L$ ,  $h$ ,  $b(x) = b_0 - ax$ , 式中  $a = (b_0 - b_1)/L$ ,  $b_0$  和  $b_1$  为梁末端和顶端宽度。梁的弯曲刚度、单位长度质量及截面孔宽比分别为  $K(x)$ ,  $m_s(x)$ ,  $\gamma(x) = g/b(x)$ , 式中,  $g$  为梁截面的间隙宽度。由图 1(b) 可得  $K(x)$ ,  $m_s(x)$  的表达式为

$$K(x) = \begin{cases} Ew_d h^3/6, & 0 < x < l_1 \\ Eb(x)h^3/12, & l_1 < x < L \end{cases} \quad (1a)$$

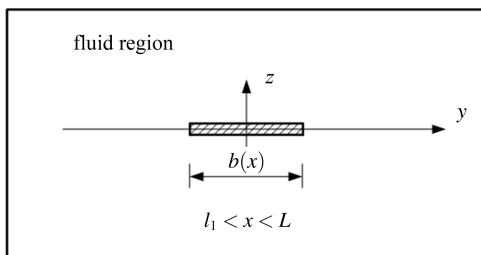
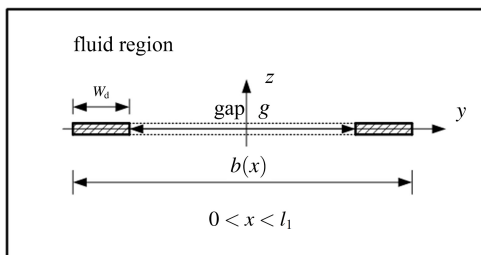
$$m_s(x) = \begin{cases} 2\rho_s w_d h, & 0 < x < l_1 \\ \rho_s b(x) h, & l_1 < x < L \end{cases} \quad (1b)$$

式中,  $E, w_d, \rho_s$  分别为梁结构的弹性模量、腿宽和密度.



(a) V 型悬臂梁结构

(a) Geometry of the V-shaped beam



(b) 流固耦合模型

(b) Sketch of the associated fluid-structure interaction model

图 1 V 型梁结构及其流固耦合模型

Fig.1 Geometry of the V-shaped beam and sketch of the associated fluid-structure interaction model

基于 Euler-Bernoulli 梁理论, V 型梁的动力学方程可表示为

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ K(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right] + m_s(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} [w(x, t) + W(t)] = H(x, t) + s(x, t) \quad (2)$$

式中, 梁结构末端所受基础激励为  $W(t) = W_0(\omega) \sin(\omega t)$ ,  $\omega$  和  $W_0(\omega)$  分别为激励的频率和幅

值.  $H(x, t)$  和  $s(x, t)$  分别表示作用在梁上的水动力载荷及梁的结构阻尼, 其中,  $x \in [0, l_1) \cup (l_1, L]$ . 为简化方程 (2), 采用滞后阻尼模型描述  $s(x, t)$ , 此时, 频域内弯曲刚度  $K(x)$  可替换为  $K(x)(1 + i\eta)$ , 式中,  $i$  为虚数单位,  $\eta$  为松弛因子, 且其值由实验确定. 在频域内,  $H(x, t)$  可变换为

$$\hat{H}(x, \omega) = \frac{\pi}{4} \rho_f \omega^2 b(x)^2 \Theta(\beta(x, \omega), \gamma(x)) \hat{A}(x, \omega) \quad (3)$$

式中,  $\rho_f$  为流体密度,  $\hat{A}(x, \omega) = W_0(\omega) + \hat{w}(x, \omega)$  为梁结构的变形相量,  $\Theta$  为水动力函数. 无量纲频率参数  $\beta(x, \omega)$  和截面孔宽比参数  $\gamma(x)$  的表达式分别为

$$\beta(x, \omega) = \frac{\rho_f \omega b(x)^2}{2\pi\mu} \quad (4a)$$

$$\gamma(x) = \begin{cases} \frac{b(x) - 2w_d}{b(x)}, & 0 < x < l_1 \\ 0, & l_1 < x < L \end{cases} \quad (4b)$$

式中,  $\mu$  为流体黏度.

由此, 可得方程 (2) 在频域内的表达式为

$$\frac{1 + i\eta}{m_s(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ k(x) \frac{\partial^2 \hat{w}(x, \omega)}{\partial x^2} \right] - \omega^2 [W_0(\omega) + \hat{w}(x, \omega)] = \omega^2 M(x) \Theta(\beta(x, \omega), \gamma(x)) [W_0(\omega) + \hat{w}(x, \omega)] \quad (5)$$

式中,  $M(x) = \pi \rho_f b(x)^2 / (4m_s(x))$ .

水动力函数  $\Theta(\beta, \gamma)$  描述了耦合系统中 V 型梁所受载荷, 对于求解 V 型梁流固耦合动力学模型, 分析其动力学特性具有重要意义. Aureli 等<sup>[35]</sup>提出的水动力函数  $\Gamma(\beta)$  仅适用于矩形梁, 用其分析 V 型梁所受载荷, 会导致附加质量力及流体阻尼力出现严重的偏差, 因此, 为得到适用于 V 型梁的水动力函数  $\Theta(\beta, \gamma)$ , 亟需对矩形梁水动力函数  $\Gamma(\beta)$  进行修正.

### 1.2 水动力函数修正

在黏性流体环境下, Aureli 等引入黏滞层无量纲厚度的仿射相关变量  $\beta^{-0.5}$ , 得到矩形梁水动力函数  $\Gamma(\beta)$  为<sup>[33-35]</sup>

$$\Gamma(\beta) = 1.02 + 2.45\beta^{-0.5} - i2.49\beta^{-0.5} \quad (6)$$

如图 1(b) 所示, 当  $x \in [0, l_1)$  时, V 型梁截面孔隙为  $g(x)$ , 需引入截面孔宽比参数  $\gamma(x)$  对式 (6) 进行修正. 修正后的水动力函数  $\Theta(\beta, \gamma)$  由频率参数  $\beta(x, \omega)$  及截面孔宽比  $\gamma(x)$  共同确定.

当  $x \in [0, l_1]$  即  $\gamma(x) \neq 0$  时, V 型梁截面可视为间距为  $g(x)$  的两根梁, 两梁在黏性流体环境下相互耦合. 此时通过研究不同频率下, 若干多组不同宽度截面的流固耦合振动, 可得水动力函数与频率参数和截面孔宽比的关系, 从而给出  $\Theta(\beta, \gamma)$  的表达式.

流体速度场和压力场的二维 Navier-Stokes 方程如下

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(y, z, t) = 0 \tag{7a}$$

$$\rho_f \frac{D\mathbf{u}(y, z, t)}{Dt} = -\nabla p(y, z, t) + \mu \nabla^2 \mathbf{u}(y, z, t) \tag{7b}$$

式中,  $\mathbf{u}(y, z, t)$  和  $p(y, z, t)$  分别为流体速度场和压力场,  $D(\cdot)/Dt$  是随体导数,  $\nabla$  是微分算子.

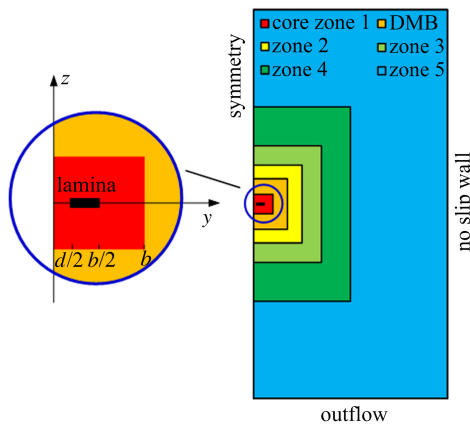
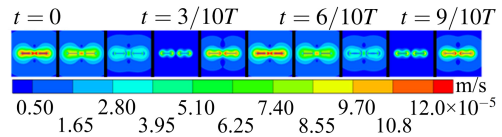


图 2 流场划分及边界条件

Fig.2 Representation of the computational domain and boundary conditions

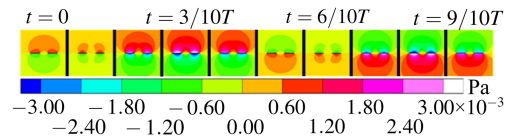
在 Fluent 中开展流场分析, 流场划分及边界条件如图 2 所示. 为减弱边缘效应对流场的影响, 整个流场区域的大小为  $\max\{20b(x) \times 20b(x)\}$ , 其中  $b(x)$  为 V 型梁截面宽度. 频率参数和截面孔宽比的范围分别取为  $\beta \in [50, 1000]$  和  $\gamma \in [0.1, 0.7]$ . 间距  $g(x)$  的两根梁宽度和厚度固定为  $w_d = 2 \text{ mm}$ ,  $h = 0.1 \text{ mm}$ . 梁在  $z$  方向上的振动规律采用 UDF 定义为  $z(t) = A_0 \sin(\omega t)$ , 振幅  $A_0$  为  $10^{-3}b(x)$ .

图 3 为一个周期内流体速度场和压力场的变化情况. 由图 3 可知, 速度和压力随时间的变化呈现周期性分布. 当  $t = 0$  时, 梁从平衡位置点开始振动, 经过  $1/2T$  再次到达平衡点, 在  $t = 0$  和  $t = 5/10T$  时梁速度最大, 流体速度也取到最大值.  $t$  时刻和  $t + 1/2T$  时刻的压力云图明显反向, 且当梁处于上下两个极限位置时, 流体压力取到最大值.



(a) 速度场分布 ( $\beta = 100, \gamma = 0.3$ )

(a) Contours of velocity magnitude for  $\beta = 100$  and  $\gamma = 0.3$



(b) 压力场分布 ( $\beta = 100, \gamma = 0.3$ )

(b) Contours of pressure for  $\beta = 100$ , and  $\gamma = 0.3$

图 3 速度场及压力场分布 ( $\beta = 100, \gamma = 0.3$ )

Fig.3 Contours of velocity magnitude and pressure for  $\beta = 100$  and  $\gamma = 0.3$

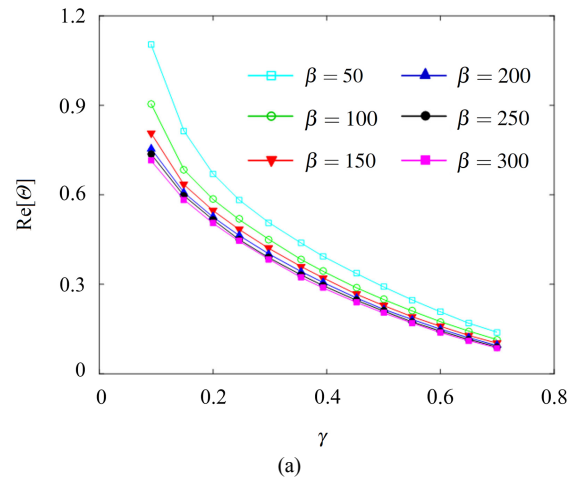
流体作用在梁上的水动力载荷分布可采用正弦函数拟合<sup>[36]</sup>, 即

$$F(t) = F_0 \sin(\omega t + \psi) \tag{8}$$

式中,  $F_0$  为载荷的幅值,  $\psi$  为载荷与位移之间的相位差. 由此, 可得水动力函数  $\Theta(\beta, \gamma)$  的计算式为

$$F_0 e^{i\psi} = \frac{\pi}{4} \rho_f \omega^2 b^2 \Theta(\beta, \gamma) A_0 \tag{9}$$

图 4 给出了水动力函数实部和虚部随频率参数和截面孔宽比变化的规律. 当截面孔宽比  $\gamma$  一定时,  $\text{Re}[\Theta]$  和  $-\text{Im}[\Theta]$  随频率参数  $\beta$  的增大而减小, 表明振动频率增大, 结构所受附加质量和流体阻尼力减小. 而  $\beta$  不变时,  $\text{Re}[\Theta]$  和  $-\text{Im}[\Theta]$  随  $\gamma$  的增大显著减小, 表明结构所受附加质量和流体阻尼力会随着截面孔宽比的增大而不断减小, 结构谐振频率与品质因子将明显增大.



(a)

图 4 水动力函数  $\Theta(\beta, \gamma)$  的实部和虚部

Fig.4 Real and imaginary parts of hydrodynamic function  $\Theta(\beta, \gamma)$



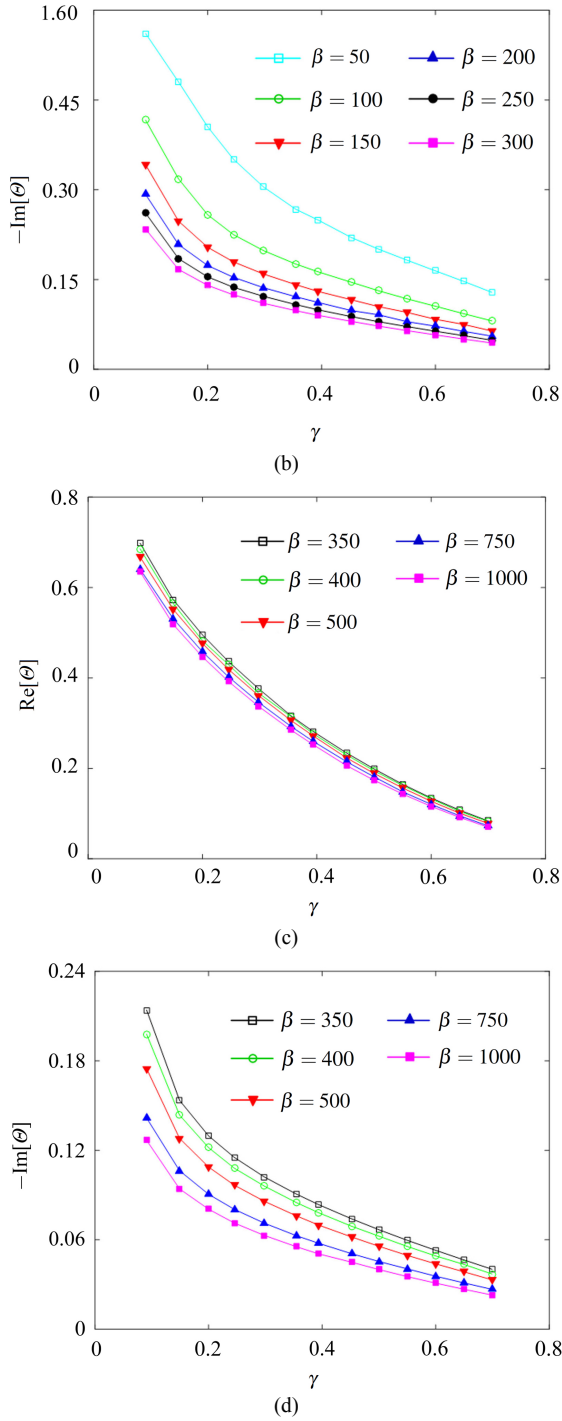


图 4 水动力函数  $\Theta(\beta, \gamma)$  的实部和虚部 (续)

Fig.4 Real and imaginary parts of hydrodynamic function  $\Theta(\beta, \gamma)$ (continued)

对水动力函数进行最小二乘拟合, 可得  $\Theta(\beta, \gamma)$  表达式为

$$\Theta(\beta, \gamma) = (1.02 + 0.8\gamma - 1.8\gamma^{0.5}) + (2.45 - 6\gamma + 2.4\gamma^{0.5})\beta^{-0.5} - i(2.49 + 10.9\gamma^{0.5} - 25.4\gamma + 14.7\gamma^2)\beta^{-0.5}, x \in [0, l_1] \quad (10)$$

水动力函数  $\Theta(\beta, \gamma)$  的拟合优度如图 5 所示, 其实部和虚部的拟合确定系数  $R^2$  分别为 0.990 和 0.970, 表明式 (10) 对数值结果的拟合程度较好。

当  $x \in (l_1, L]$  时,  $\gamma(x) = 0$ . 此时 V 型梁截面为矩形, 水动力函数满足

$$\Theta(\beta, \gamma) = \Theta(\beta, 0) = \Gamma(\beta), x \in (l_1, L] \quad (11)$$

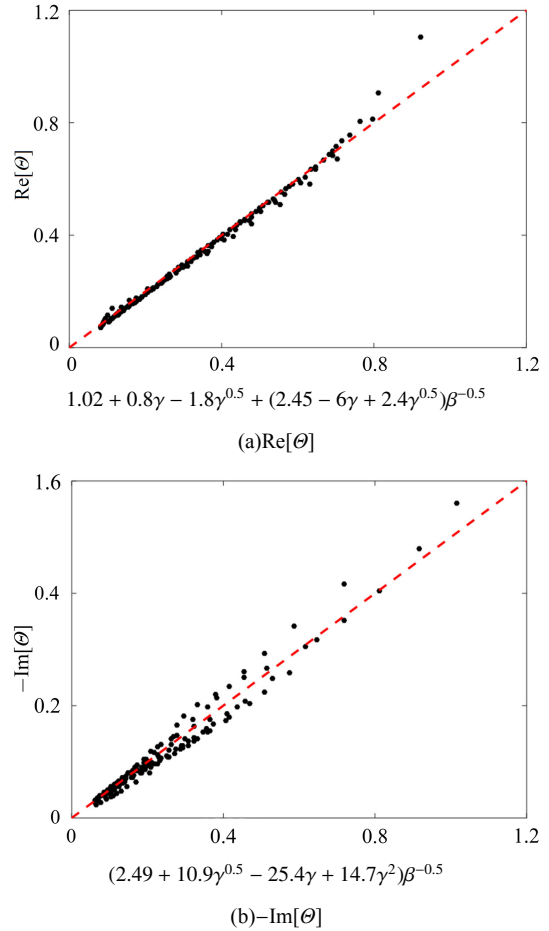


图 5 水动力函数  $\Theta(\beta, \gamma)$  的拟合优度

Fig.5 Goodness of fit on hydrodynamic function  $\Theta(\beta, \gamma)$

## 2 求解与分析

采用 Galerkin 方法对方程 (5) 进行求解, 选取无量纲化的特征函数  $\{\phi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$  为

$$\phi_i(x) = a_i \left\{ \left[ \sin\left(\frac{\lambda_i x}{L}\right) - \sinh\left(\frac{\lambda_i x}{L}\right) \right] - \frac{\sin(\lambda_i) + \sinh(\lambda_i)}{\cos(\lambda_i) + \cosh(\lambda_i)} \left[ \cos\left(\frac{\lambda_i x}{L}\right) - \cosh\left(\frac{\lambda_i x}{L}\right) \right] \right\} \quad (12)$$

且特征函数满足  $\frac{1}{L} \int_0^L \phi_i(x)\phi_j(x)dx = \delta_{ij}$ , 式中,  $\lambda_i$  是特征方程  $\cos\lambda\cosh\lambda + 1 = 0$  的第  $i$  个特征值,  $\delta_{ij}$  为克罗内克  $\delta$  函数。

由特征函数  $\{\phi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$  可得 V 型悬臂梁结构的变形表达式, 即

$$\hat{w}(x, \omega) = W_0(\omega) \sum_{j=1}^{\infty} q_j(\omega) \phi_j(x) \quad (13)$$

将式 (13) 代入方程 (5), 方程两边同乘  $\phi_i(x) (i = 1, 2, \dots, n)$ , 并对方程两边同时积分, 可得

$$\sum_{j=1}^{\infty} q_j(\omega) \int_0^L \left\{ \frac{1 + i\eta}{m_s(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ K(x) \frac{\partial^2 \phi_j(x)}{\partial x^2} \right] - \omega^2 [1 + M(x)\Theta(\beta(x, \omega), \gamma(x))] \phi_j(x) \right\} \phi_i(x) dx = \omega^2 W_0(\omega) \int_0^L [1 + M(x)\Theta(\beta(x, \omega), \gamma(x))] \phi_i(x) dx \quad (14)$$

取前  $m$  阶模态函数, 将式 (10) 和式 (11) 代入方程 (14), 可得关于模态系数  $\{q_i(\omega)\}_{i=0}^m$  的  $m$  元线性方程组,

$$\mathbf{B}(\omega)\mathbf{q}(\omega) = \mathbf{f}(\omega) \quad (15)$$

式中,  $\mathbf{B}(\omega)$  为  $m$  阶方阵,  $\mathbf{q}(\omega) = [q_1(\omega), q_2(\omega), \dots, q_m(\omega)]^T$  为模态系数,  $\mathbf{f}(\omega)$  为  $m$  维列向量. 将  $\mathbf{q}(\omega)$  代入方程 (13), 可得 V 型悬臂梁结构的弯曲变形量.

V 型悬臂梁顶端弯曲变形频率响应的传递函数为

$$G(\omega) = \frac{\hat{w}(L, \omega)}{W_0(\omega)} = |G|e^{i\omega\varphi} \quad (16)$$

式中,  $|G|$  和  $\varphi$  分别为响应幅值和相位.

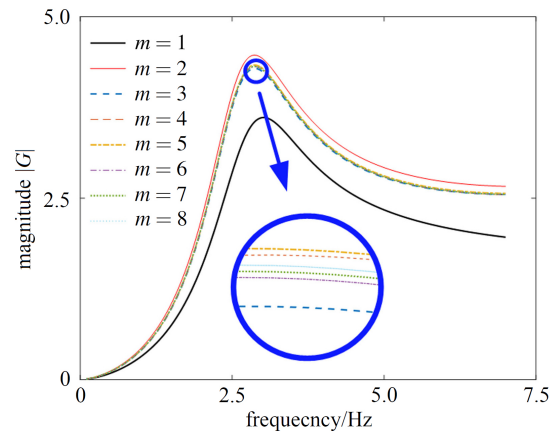
图 6 给出了  $m = 1, 2, \dots, 8$  时 V 型悬臂梁顶端弯曲变形的频率响应对比图. V 型梁的参数取为  $L = 50 \text{ mm}$ ,  $l_1 = 33 \text{ mm}$ ,  $b_0 = 10 \text{ mm}$ ,  $b_t = 1 \text{ mm}$ ,  $h = 95 \text{ }\mu\text{m}$ ,  $E = 3.8 \text{ GPa}$ ,  $w_d = 2 \text{ mm}$ ,  $\rho_s = 1365.8 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ,  $\eta = 0.09$ .

为定量描述模态阶数对求解精度的影响, 以 5 阶模态阶数下的频响幅值作为基准, 定义频响幅值的均方根误差为

$$e_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i^{(m)} - y_i^{(5)})^2} \quad (17)$$

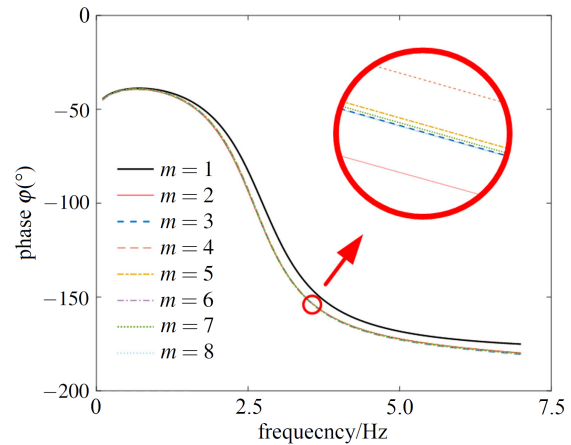
式中,  $y_i^m$  为  $m$  阶模态阶数下求得的频响幅值,  $N$  为数据点个数.

表 1 给出了不同模态阶数下频响幅值的均方根误差. 对比发现,  $m$  在 1 至 4 范围内时, 随着模态阶数的增大, 求解精度逐渐提升. 当  $m$  增加至 5 阶及其以上后, 频响幅值的差异很小, 求解精度变化



(a) 频率响应幅值图

(a) Magnitude of the frequency response



(b) 频率响应相位图

(b) Phase of the frequency response

图 6 不同模态阶数下频率响应对比图

Fig.6 Frequency response of the V-shaped beam for different values of  $m$

不大. 结果表明, 取前 5 阶模态函数已能准确描述 V 型悬臂梁结构的变形. 在后续讨论过程中, 为保证求解精度, 动力学模型均取前 5 阶模态函数进行求解.

表 1 不同模态阶数下频响幅值的均方根误差

Table1 Root mean square error of frequency response' s magnitude for different values of  $m$

Modes $m$	Root mean square error $e_{\text{rms}}/\%$
1	50.69
2	10.56
3	2.50
4	1.20
5	0
6	1.54
7	1.24
8	0.93

### 3 实验验证

为验证修正后的水动力函数表达式以及 V 型悬臂梁流固耦合振动模型的准确性, 本文设计了多种不同几何尺寸的 V 型梁结构, 并在水环境中开展了流固耦合振动实验研究. 图 7 所示为 V 型悬臂梁水下振动实验装置图. 其中, 高速摄像机用于记录梁

在水下的振动情况, 为避免频率混叠, 高速摄像机的采样频率设置为 250 Hz.

实验测试了空气中 V 型悬臂梁的频率响应, 得到了 3 组不同 V 型梁结构的弹性模量  $E$  及松弛因子  $\eta$ . 图 8 所示为空气中 V 型悬臂梁理论分析与实验测得的频率响应对比图. 图 8(a)、图 8(b)、图 8(c)

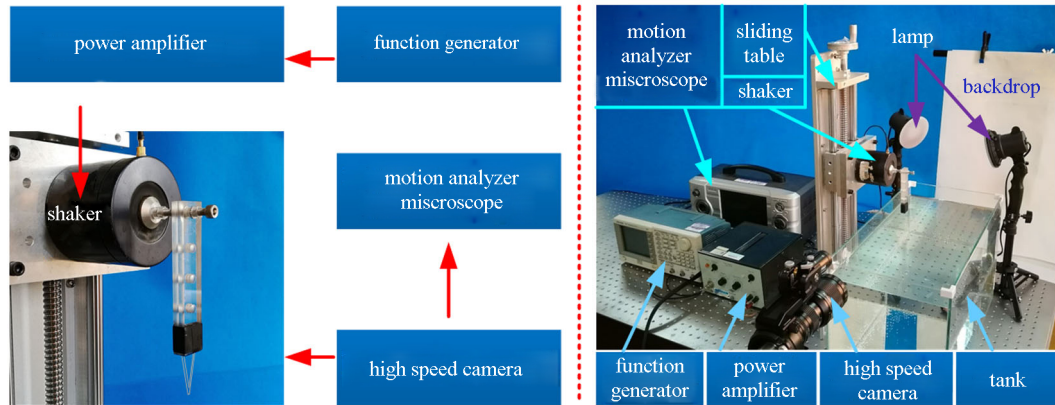


图 7 实验装置图

Fig.7 Experimental set up

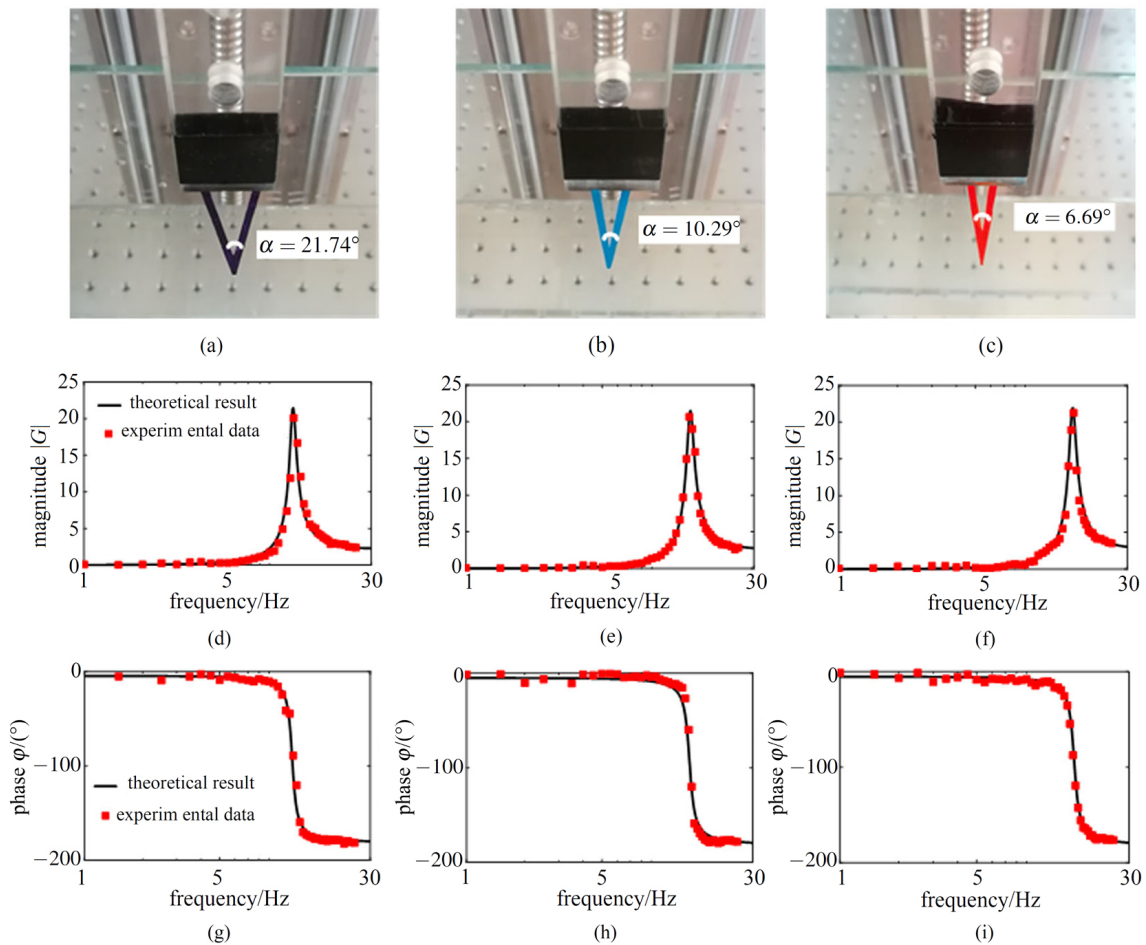


图 8 空气中 V 型梁结构理论分析与实验结果对比图

Fig.8 Frequency response of V-shaped beams' tip deflection in the in-air experiments

为 V1, V2, V3 梁的实物图, 图 8(d)、图 8(e)、图 8(f) 和图 8(g)、图 8(h)、图 8(i) 分别为 3 组梁顶端弯曲变形的频率响应幅值及相位图. 由空气中实验结果可得, 梁结构弹性模量  $E = 3.8 \text{ GPa}$ , V1, V2, V3 梁的松弛因子  $\eta$  分别为 0.08, 0.09, 0.09. 3 组 V 型梁 V1, V2, V3 的参数如表 2 所示.

图 9 所示为水下 V 型悬臂梁理论分析与实验测得的频率响应对比图. 图 9(a)、图 9(b)、图 9(c) 和图 9(d)、图 9(e)、图 9(f) 为 V1, V2, V3 梁顶端弯曲变形的频率响应幅值及相位图. 由图 9 可知, 采用未经修正的水动力函数  $\Gamma(\beta)$  求得的频率响应与实验结果差异较大, 理论频响曲线的一阶谐振频率明

显偏小, 原因在于, 未经修正的水动力函数实部大于实际值, 求解过程中附加质量力相对实际值偏大, 因此模型求解出的谐振频率降低. 而采用  $\Theta(\beta, \gamma)$  所得求解结果与实验数据吻合良好, 说明该水动力函数可以有效地描述 V 型梁结构的水下振动情况, 从而验证了修正后的水动力函数表达式以及 V 型悬臂梁流固耦合振动模型. 此外, 如图 9 所示, 随着 V 型梁角度变小, 3 组 V 型梁结构的谐振频率及响应峰值均增大, 说明几何参数对 V 型梁流固耦合动力学特性的影响显著. 因此, 针对 V 型悬臂梁流固耦合动力学特性进行参数分析具有重要意义.

表 2 实验用 V 型梁结构几何及物理参数表

Table 2 Geometry and physical properties of the V-shaped beams

Type	$h/\mu\text{m}$	$L/\text{mm}$	$l_1/\text{mm}$	$b_0/\text{mm}$	$b_l/\text{mm}$	$\alpha/(\text{^\circ})$	$\rho_s/(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$	$E/\text{GPa}$	$\eta$
V1			41.7	16	1.6	21.74			0.08
V2	95	50	33.3	10	1.0	10.29	1365.8	3.80	0.09
V3			21.4	6.5	0.65	6.69			0.09

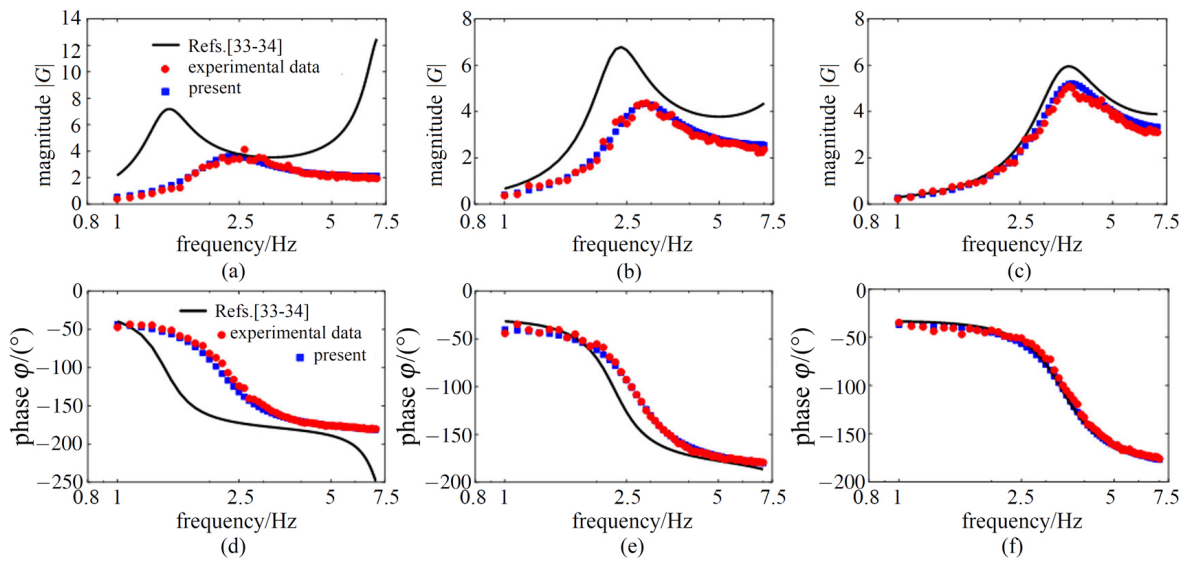


图 9 水下 V 型梁结构的理论分析与实验结果对比图

Fig.9 Frequency response of V-shaped beams' tip deflection in underwater experiments

### 4 参数分析与结果

基于 V 型悬臂梁结构流固耦合振动模型, 本节讨论不同流体黏度、V 型梁角度及尺寸变化对流固耦合动力学特性的影响.

由式 (4a) 可知, 黏性流体环境下, 黏度显著影响振动的频率参数. 以 V2 梁为例, 计算不同黏度下其顶端弯曲变形的幅频响应, 并给出响应谐振频率

及品质因子随黏度变化的关系, 如图 10 所示.

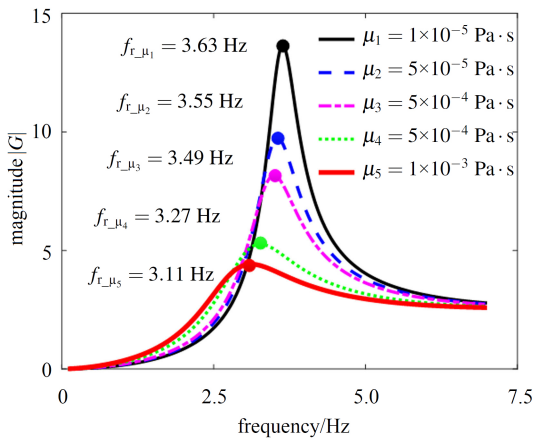
随着黏度增大, 频率参数  $\beta$  明显减小, 水动力函数  $\Theta(\beta, \gamma)$  的实部和虚部随之增大, 梁在流体环境下所受附加质量力和流体阻尼力也随之增大, 从而使得 V 型悬臂梁结构的一阶谐振频率及品质因子明显减小. 同时由图 10 可知, 流体阻尼力的增大明显降低了结构的谐振峰值.

当 V 型梁长度和腿宽一定时, 角度  $\alpha$  的变化会



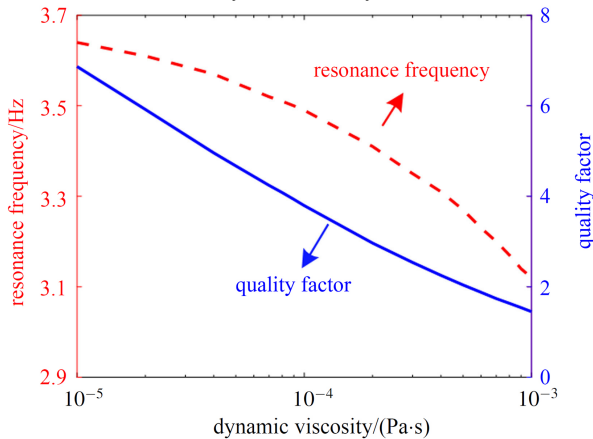
引起 V 型梁宽度和截面孔宽比的明显变化. 固定梁长、腿宽和顶端宽度为  $L = 50 \text{ mm}$ ,  $w_d = 2 \text{ mm}$ ,  $b_t = 1 \text{ mm}$ ,  $h = 100 \mu\text{m}$ . 分析不同角度 V 型梁顶端弯曲变形的幅频响应, 并给出其谐振频率及品质因子随角度  $\alpha$  变化的关系, 结果如图 11 所示.

由图 11 可知, 随着角度  $\alpha$  增大, V 型悬臂梁结构的一阶谐振频率及品质因子均逐渐减小. 一方面, 角度  $\alpha$  增大, 对应 V 型梁截面孔宽比  $\gamma(x)$  增大和频率参数  $\beta(x, \omega)$  增大, 水动力函数  $\Theta(\beta, \gamma)$  实部和虚部将减小; 另一方面, 角度  $\alpha$  增大, V 型梁宽度  $b(x)$  增大, 而 V 型梁所受水动力载荷正比于  $b(x)^2\Theta(\beta, \gamma)$ , 在  $\Theta(\beta, \gamma)$  减小和  $b(x)$  增大的共同作用下水动力载荷仍呈增大趋势, 附加质量及流体阻尼力增大, 从而导致谐振频率和品质因子均降低.



(a) V2 梁在不同黏度下的幅频响应曲线

(a) Frequency response of the beam V2' s tip deflection for different dynamic viscosity

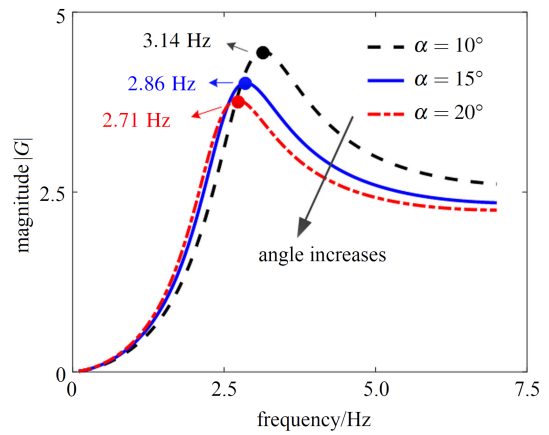


(b) 谐振频率及品质因子随黏度变化的关系

(b) The effect of dynamic viscosity on resonance frequency and quality factor

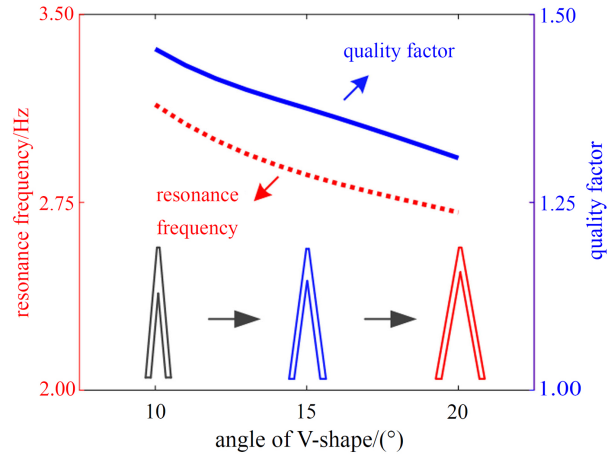
图 10 流体黏度对动力学特性的影响

Fig.10 The effect of dynamic viscosity on the vibration characteristics



(a) 不同角度 V 型悬臂梁的幅频响应曲线

(a) Frequency response of V-shaped beams with different angles

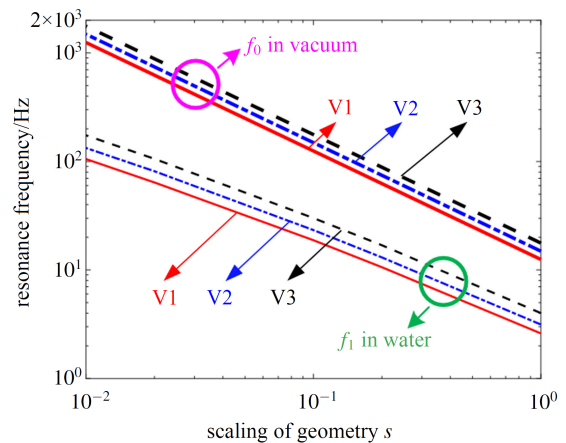


(b) 谐振频率及品质因子随角度变化的关系

(b) The effect of angle on resonance frequency and quality factor

图 11 V 型梁角度对动力学特性的影响

Fig.11 The effect of angle on the vibration characteristics

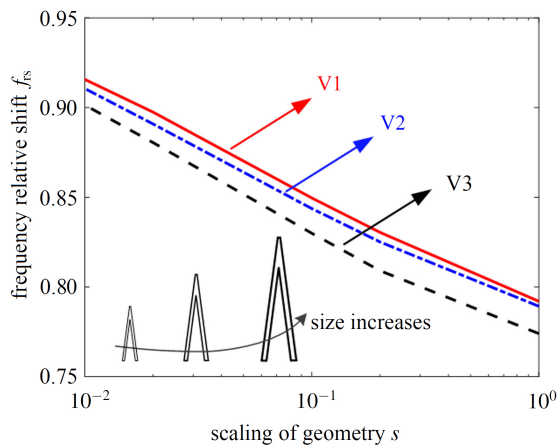


(a) 尺寸变化对谐振频率的影响

(a) The effect of scale variations on resonance frequency

图 12 尺寸变化对 V 型梁动力学特性的影响

Fig.12 The effect of scale variations on the vibration characteristics of V-shaped beams



(b) 尺寸变化对谐振频率相对偏移量的影响

(a) The effect of scale variations on resonance frequency relative shift

图 12 尺寸变化对 V 型梁动力学特性的影响 (续)

Fig.12 The effect of scale variations on the vibration characteristics of V-shaped beams(continued)

考虑尺寸变化对 V 型梁结构动力学特性的影响, 3 组 V 型悬臂梁动力学特性随尺寸变化的关系如图 12 所示. 定义 V 型梁结构的尺寸参数为  $s$ , 其范围为  $s \in [10^{-2}, 10^0]$ , 当  $s$  取为  $10^{-2}$  时, 表示 V 型梁结构的尺寸整体缩减为原尺寸的  $1/100$ . 定义 V 型梁结构在真空和水中的一阶谐振频率分别为  $f_0$  和  $f_1$ , 频率绝对偏移量  $f_s = f_0 - f_1$ , 相对偏移量  $f_{rs} = 1 - f_1/f_0$ . V 型梁结构的谐振频率和尺寸参数的关系为  $\omega \propto s^{-1}$ , 因此, 随着尺寸的缩减, 真空和水中的谐振频率均明显增大. 此外, 随着尺寸的不断缩小, 谐振频率的相对偏移量逐渐增大, 表明相对宏观而言, 微观下流体阻尼对谐振频率相对偏移量的影响更加突出.

## 5 结论

本文以 V 型悬臂梁为研究对象, 建立了其在黏性流体环境下的流固耦合动力学模型. 引入截面孔宽比参数对矩形梁结构水动力函数进行了修正, 通过流场分析得到了 V 型悬臂梁结构的水动力函数, 该水动力函数由截面孔宽比和频率参数共同确定. 结果表明, 梁结构截面孔宽比及频率参数增大时, V 型梁结构所受附加质量力和流体阻尼力均减小.

将修正后的水动力函数代入动力学模型并采用 Galerkin 方法求解该模型, 得到黏性流体中 V 型悬臂梁的频率响应特性. 同时, 设计了 V 型悬臂梁结构在水环境下的振动试验装置, 测得不同尺寸 V

型梁的实验结果与理论模型的分析结果均吻合良好, 从而验证了修正后的水动力函数表达式及 V 型悬臂梁流固耦合振动模型.

基于 V 型悬臂梁结构流固耦合振动模型, 分析了不同流体黏度、V 型梁角度及尺寸变化对振动特性的影响. 结果表明, 流体黏度、V 型梁角度增大, 均会导致 V 型悬臂梁结构流固耦合振动的一阶谐振频率和品质因子的减小. 而随着尺寸的缩减, V 型梁结构的谐振频率及其相对偏移量明显增大, 说明尺度越小, 流体阻尼对谐振频率相对偏移量的影响越突出.

## 参 考 文 献

- 1 Stark RW, Drobek T, Heckl WM. Thermomechanical noise of a free v-shaped cantilever for atomic-force microscopy. *Ultramicroscopy*, 2001, 86(1): 207-215
- 2 Hu QQ, Chen LQ. Bifurcation and chaos in atomic force microscope. *Chaos Solitons & Fractals*, 2007, 33(2): 711-715
- 3 Chen LQ, Lim CW, Hu QQ, et al. Asymptotic analysis of a vibrating cantilever with a nonlinear boundary. *Science in China*, 2009, 52(9): 1414-1422
- 4 徐金明, 白以龙. 原子力显微镜形貌测量偏差的机理分析及修正方法. *力学学报*, 2011, 43(1): 112-21 (Xu Jinming, Bai Yilong. Analysis of topography measurement error in atomic force microscope (AFM) and its revision method. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2011, 43(1): 112-121 (in Chinese))
- 5 Sader JE, Borgani R, Gibson CT, et al. A virtual instrument to standardise the calibration of atomic force microscope cantilevers. *Review of Scientific Instruments*, 2016, 87(9): 846-856
- 6 魏征, 孙岩, 王冉冉等. 轻敲模式下原子力显微镜的能量耗散. *力学学报*, 2017, 49(6): 1301-1311 (Wei Zheng, Sun Yan, Wang Zairan, et al. Energy dissipation in tapping mode atomic force microscopy. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, 49(6): 1301-1311 (in Chinese))
- 7 Hosseini R, Hamed M. An investigation into resonant frequency of trapezoidal V-shaped cantilever piezoelectric energy harvester. *Microsystem Technologies*, 2016, 22(5): 1127-1134
- 8 Litak G, Abadal G, Rysak A, et al. Complex dynamics of a bistable electrically charged microcantilever: Transition from single well to cross well oscillations. *Chaos Solitons & Fractals*, 2017, 99: 85-90
- 9 Lee GB, Kuo TY, Wu WY. A novel micromachined flow sensor using periodic flapping motion of a planar jet impinging on a V-shaped plate. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 2002, 26(5): 435-444
- 10 Steiner H, Keplinger F, Schalko J, et al. Highly efficient passive thermal micro-actuator. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 2015, 24(6): 1981-1988
- 11 Wu S, Liu X, Zhou X, et al. Quantification of cell viability and rapid screening anti-cancer drug utilizing nanomechanical fluctuation. *Biosensors & Bioelectronics*, 2016, 77: 164-173



- 12 Enikov ET, Kedar SS, Lazarov KV. Analytical model for analysis and design of V-shaped thermal microactuators. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 2005, 14(4): 788-798
- 13 Cleveland JP, Manne S, Bocek D, et al. A nondestructive method for determining the spring constant of cantilevers for scanning force microscopy. *Review of Scientific Instruments*, 1993, 64(2): 403-405
- 14 Sader JE, Larson I, Mulvaney P, et al. Method for the calibration of atomic force microscope cantilevers. *Review of Scientific Instruments*, 1995, 66(7): 3789-3798
- 15 Sader JE, Sanelli J A, Adamson BD, et al. Spring constant calibration of atomic force microscope cantilevers of arbitrary shape. *Review of Scientific Instruments*, 2012, 83(10): 103705
- 16 Lee HL, Chang WJ, Yang YC. Flexural sensitivity of a V-shaped cantilever of an atomic force microscope. *Materials Chemistry and Physics*, 2005, 92(2): 438-442
- 17 Lee HL, Chang WJ. Sensitivity of V-shaped atomic force microscope cantilevers based on a modified couple stress theory. *Microelectronic Engineering*, 2011, 88(11): 3214-3218
- 18 Lee HL, Chang WJ. Sensitivity analysis of rectangular atomic force microscope cantilevers immersed in liquids based on the modified couple stress theory. *Micron*, 2016, 80: 1-5
- 19 Korayem AH, Hoshiar AK, Badrlou S, et al. A comprehensive model for stiffness coefficients in V-shaped cantilevers. *International Journal of Nanoscience and Nanotechnology*, 2016, 12(1): 27-36
- 20 Korayem AH, Kianfar A, Korayem MH. Modeling and simulating of V-shaped piezoelectric micro-cantilevers using MCS theory considering the various surface geometries. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 2016, 84: 268-279
- 21 Korayem MH, Nahavandi A. Analyzing the effect of the forces exerted on cantilever probe tip of atomic force microscope with tapering-shaped geometry and double piezoelectric extended layers in the air and liquid environments. *Journal of Sound & Vibration*, 2016, 386: 251-264
- 22 Berthold T, Benstetter G, Frammelsberger W, et al. Numerical study of hydrodynamic forces for AFM operations in liquid. *Scanning*, 2017, 2017: 1-12
- 23 Dufrène YF, Ando T, Garcia R, et al. Imaging modes of atomic force microscopy for application in molecular and cell biology. *Nature Nanotechnology*, 2017, 12(4): 295-307
- 24 Wu S, Liu H, Cheng T, et al. Highly sensitive nanomechanical assay for the stress transmission of carbon chain. *Sensors & Actuators B Chemical*, 2013, 186(9): 353-359
- 25 Wu S, Liu H, Liang XM, et al. Highly sensitive nanomechanical immunosensor using half antibody fragments. *Analytical Chemistry*, 2014, 86(9): 4271-4277
- 26 Phan CN, Aureli M, Porfiri M. Finite amplitude vibrations of cantilevers of rectangular cross sections in viscous fluids. *Journal of Fluids and Structures*, 2013, 40(7): 52-69
- 27 吴应湘, 林黎明, 钟兴福. 带有新型涡激振动抑制罩的圆柱体的水动力特性. *力学学报*, 2016, 48(2): 307-317 (Wu Yingxiang, Lin Liming, Zhong Xingfu. Investigation in hydrodynamics of a circular cylinder with the new suppressing shroud for vortex-induced vibration. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2016, 48(2): 307-317 (in Chinese))
- 28 牛文栋, 王延辉, 杨艳鹏等. 混合驱动水下滑翔机水动力参数辨识. *力学学报*, 2016, 48(4): 813-822 (Niu Wendong, Wang Yanhui, Yang Yanpeng, et al. Hydrodynamic parameter identification of hybrid-driven underwater glider. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2016, 48(4): 813-822 (in Chinese))
- 29 Maali A, Hurth C, Boisgard R, et al. Hydrodynamics of oscillating atomic force microscopy cantilevers in viscous fluids. *Journal of Applied Physics*, 2005, 97(7): 074907
- 30 白玉川, 冀自青, 徐海珏. 摆动河槽水动力稳定性特征分析. *力学学报*, 2017, 49(2): 274-288 (Bai Yuchuan, Ji Ziqing, Xu Haijue. Hydrodynamic instability characteristics of laminar flow in a meandering channel with moving boundary. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, 49(2): 274-288 (in Chinese))
- 31 Trivedi C. A review on fluid structure interaction in hydraulic turbines: A focus on hydrodynamic damping. *Engineering Failure Analysis*, 2017, 77: 1-22
- 32 Tuck E. Calculation of unsteady flows due to small motions of cylinders in a viscous fluid. *Journal of Engineering Mathematics*, 1969, 3(1): 29-44
- 33 Sader JE. Frequency response of cantilever beams immersed in viscous fluids with applications to the atomic force microscope. *Journal of Applied Physics*, 1998, 84(1): 64-76
- 34 Aureli M, Porfiri M. Low frequency and large amplitude oscillations of cantilevers in viscous fluids. *Applied Physics Letters*, 2010, 96(16): 164102
- 35 Aureli M, Basaran M, Porfiri M. Nonlinear finite amplitude vibrations of sharp-edged beams in viscous fluids. *Journal of Sound and Vibration*, 2012, 331(7): 1624-1654
- 36 Falcucci G, Aureli M, Ubertini S, et al. Transverse harmonic oscillations of laminae in viscous fluids: a lattice Boltzmann study. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2011, 369(1945): 2456-2466