

含芯拧绞绳非线性弯曲动力学特性分析与研究¹⁾过佳雯* 魏承^{*,2)} 谭春林[†] 赵阳*

*(哈尔滨工业大学航天学院, 哈尔滨 150001)

[†](中国空间技术研究院, 北京 100190)

摘要 建立细长缆索大柔性多体动力学模型时, 现实存在的复杂捻制几何构型多不予考虑, 而是将柔索简化为材料均匀梁进行描述, 致使运动仿真模型与物理实际存在一定差距. 为此, 研究一种典型非线性拧绞绳股的大变形等效动力学建模方法, 考虑准静态与大范围运动情况下绳股内的线接触, 计算了受摩擦力及弯曲曲率影响的绳股可变弯曲刚度, 通过等效梁模型避免了绳股精细建模时的大规模计算消耗. 基于连续介质力学与绝对节点坐标方法, 建立了拧绞绳惯性广义坐标下的多柔体动力学模型. 为了验证等效模型的可行性, 与基于有限段方法建立的精细模型进行对比仿真分析, 通过位形验证了等效模型的精度. 进一步地, 根据力载作用下的准静态构型, 研究了特定构型绳股弯曲刚度沿轴向的分布规律; 通过自重力下一端固定柔性绳摆自由运动仿真并与传统均匀梁模型相比, 研究了模型弯曲特性的差异. 最后, 根据能量守恒原理分析了摩擦耗散系统内各种能量间的相互转化. 拧绞绳大变形等效动力学模型能够提高绳索动力系统运动预测的仿真计算效率, 还能为钢丝绳参数与构型设计提供依据.

关键词 拧绞绳, 可变弯曲刚度, 大变形, 绝对节点坐标法, 接触摩擦

中图分类号: O313.7 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-17-297

ANALYSIS OF THE CORED STRANDED WIRE ROPE ON THE NONLINEAR BENDING DYNAMIC CHARACTERISTICS¹⁾Guo Jiawen* Wei Cheng^{*,2)} Tan Chunlin[†] Zhao Yang*

*(School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

[†](China Academy of Space Technology, Beijing 100086, China)

Abstract When modeling the slender structures such as cable and tether with large flexibility, the complex twirling geometry in practical situation is usually ignored and the cable is simplified as a general beam with homogeneous material. In doing so, the result of dynamic simulation diverges from the physical significance. Therefore, this paper provides an equivalent dynamic method for the typical nonlinear helix wire strand considering the inner line contact under the static and large scale dynamic conditions. The variable bending stiffness affected by the contact friction and bending curvature is obtained through the equivalent constitutive law, by which the massive computation resulting from fine modeling method is able to be avoided. Based on the absolute nodal coordinate formulation, a series of the generalized coordinates have been selected to establish the dynamic differential equations. To verify the equivalent method, a fine strand model based on

2017-09-01 收稿, 2018-02-06 录用, 2018-02-07 网络版发表.

1) 国家重点基础研究发展计划(973 计划)(2013CB733004)和微小型航天器技术国防重点学科实验室开放基金(HIT.KLOF.MST.201703)资助项目.

2) 魏承, 副教授, 主要研究方向: 多柔体系统动力学与控制. E-mail: weicheng@hit.edu.cn

引用格式: 过佳雯, 魏承, 谭春林, 赵阳. 含芯拧绞绳非线性弯曲动力学特性分析与研究. 力学学报, 2018, 50(2): 373-384

Guo Jiawen, Wei Cheng, Tan Chunlin, Zhao Yang. Analysis of the cored stranded wire rope on the nonlinear bending dynamic characteristics. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2018, 50(2): 373-384

the finite segment element has been provided to test the accuracy according to the practical strand configuration. Furtherer, the distribution of the variable bending stiffness in practical strand under certain load is obtained through the quasi-static analysis. Compared with traditional ANCF model, the dynamic simulation of the one-tip-fixed equivalent beam under gravity coincides with the fact that the stiffness decreases as well as the flexibility increases in twirling strand. At last, the conversion among each kind of the energy component has been researched. The equivalent model of the twirling strand with large deformation can be used to improve the efficiency of the motion prediction in cable dynamic systems. Besides, the results provide the evidence for wire rope design.

Key words stranded wire rope, variable bending stiffness, large deformation, absolute nodal coordinate formulation, contact friction

引 言

拧绞绳指由数根绳线单元按一定规则绞合、捻制成股的一束绳索^[1]。目前对拧绞绳力学性能的研究主要包括：风力载荷输电线缆^[2]、公路桥梁拉索、升降拖曳绳缆^[3]等张拉结构的小范围振动分析与静态力学特性分析。近年来随着绳系结构在空间机构中的广泛使用，其质轻、柔软、易折叠的特点使得钢丝绳、纤维绳更多用于机械臂传动^[4]、绳系卫星^[5]、空间非合作目标^[6]捕获等空间任务中。由绳索组成的执行机构对操作、控制对象的运动控制精度与效率有一定影响，因此，本文旨在研究绳索微观力学特性并得到符合其实际构型的大变形动力学描述。

绳索复杂的捻制几何构型会大大增加描述绳索柔性变形所需要的自由度，因而在动力学建模与求解时，很少以多根绳线捻制而成的复合构型绳股为研究对象。本文的研究重点之一是绳股大变形柔性体的动力学建模，目前，基于三维梁理论得到了一系列以绳股为研究对象的精细模型。国内刘延柱和薛纭^[7-8]对螺旋型大生物分子结构进行了基于 Kirchhoff 弹性杆理论的动力学模拟，推导了受拉、扭细杆的等效弯曲及等效扭转刚度。20 世纪末，为了从传统 Kirchhoff-Love 杆理论延伸出更易参数化的三维梁方法，Simo^[9]在 Reissner^[10]的基础上提出了完全几何精确梁方法，梁的初始曲率及初始截面形状可任意选取，截面转动由欧拉角或四元数给定。但是偏微分形式的几何精确梁控制方程不适合多体动力学问题的求解，需要将连续模型通过数值离散的方法改进为便于实施动力学仿真的模型，尤其是梁单元转动自由度的表现形式^[11]。其中，Shabana 等^[12-13]提出的绝对节点坐标方法 (absolute nodal coordinate formulation, ANCF) 通过梯度定义了全局系下的转动运动与弹性变形，从而避免了小转角、小应变对模型变形

描述的限制，并发展了一系列三维梁单元模型^[14-15]。

许多学者根据梁理论研究了典型螺旋形拧绞绳的动力学建模方法。Foti 等^[16-17]对历经大转动运动的绳索在共旋坐标系下表示了部分运动自由度，结合几何精确梁方法改进了两种传统模型在处理运动耦合上的缺陷，分析了源于几何、材料及环境载荷等因素的梁非线性响应，但受到小应变限制，难以做到柔索运动的实时仿真计算。类似地，Provasi 与 Martins^[18]建立了螺旋曲梁单元，充分考虑了绳索内部的弯曲、扭转耦合，避免了剪切闭锁。Wang 等^[3]直接把拧绞绳离散为由刚体质点组成的系统，将螺旋构型的质量-弹簧模型集成在计算机辅助设计软件中实现了拧绞绳的快速建模与运动学实时仿真。

除了考虑三维梁模型自身几何材料非线性、单元描述不当导致的应变耦合^[19]等影响，在数值仿真中能够动态地确定多组元绳股内梁-梁之间接触、摩擦的分布状态才能从本质上提高绳股动力学模型强非线性描述的准确性。Gnanavel 等^[20]给出了单层拧绞绳绳芯-绳线之间的详细径向接触力、及其引起的切向接触应力与绳芯受压变形的细杆平衡方程。Hong 等^[21]严格推导了复杂螺旋几何与梁假设条件、滑动曲率上界之间的关系。更一般的拧绞绳包含多层，为了增强抗磨损性能，相邻两层交叉捻制，Lalonde 等^[22-23]据此引入了多级摩擦系数，使绳股的弯曲刚度在最大与最小值之间平滑地更加变化，通过有限元疲劳计算估计了风载荷激励下输电电缆的使用寿命。

显然，三维梁模型一旦引入接触摩擦力后不可避免会增加绳股运动动态捕获过程中的数值计算消耗，所以上述研究的对象大多跨度、运动范围较小，且难以进行高效多体动力学仿真。本文提出了针对大变形拧绞绳的一维介质等效梁模型，在同时考虑

绳股微观捻制几何与接触分布的前提下, 采用 ANCF 柔性梁离散方法推导拧绞绳多柔体动力学模型. 为了验证等效模型, 基于有限段梁离散方法 [24] 建立了拧绞绳精细模型. 另一方面, 与传统 ANCF 梁模型对比, 输出大柔性绳股在大范围运动中的运动、变形及能量变化曲线. 结果表明, 等效模型高效预测了强非线性绳股的运动规律且在宏观层面体现出拧绞绳的微观力学特性.

1 绳股非线性弯曲模型

引起拧绞绳弯曲刚度非线性的主要原因在于张紧状态下绳线之间存在法向接触压力产生的切向摩擦 [25]. 弯曲变形较小时, 材料内部弹性力足以平衡摩擦力, 绳线之间无相对滑动; 当变形继续增大, 绳股截面上不同相位处的绳线先后出现相对滑动, 绳股内部的受力因此会在完全黏滞、部分滑动与完全滑动三个阶段之间切换 [26], 弯曲刚度特性也随之改变. 本节将建立不同摩擦状态下绳股的非线性弯曲本构力学模型.

1.1 螺旋线几何构型

定义一根钢丝或细纤维束为组成拧绞绳的基本单元, 即绳线单元, 首先在绳股平直构型下建立螺旋线的几何关系. 经捻制、绞合得到捻角为 α 的螺旋线, 紧密缠绕于中心绳线周围构成实际的绳索结构. 其螺旋构型带来的几何上而非变形上的扭转使得绳线截面近似为一圆截面.

图 1 中, 螺旋线形心轴的切线与绳股轴线的夹角 α 为捻角, 捻角决定了外层绳线的螺旋程度与节距 $P = R_w / \tan \alpha$, R_w 为螺旋线中心到绳股轴线距离. 在绳股一端面中心建立局部坐标系 (x, y, z) , 则任意螺旋截面中心点 p_w 在 (x, y, z) 下的位置矢量为

$$\mathbf{r}_{p_w} = \left[\frac{P}{2\pi} (\varphi_w - \varphi_w^0), R_w \sin \varphi_w, R_w \cos \varphi_w \right]^T \quad (1)$$

式中, 点 p_w 投影至绳股截面后对应相位极角为 φ_w .

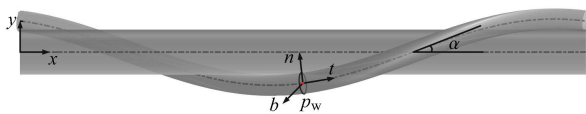


图 1 局部螺旋线 Frenet 参考坐标系

Fig. 1 Local Frenet frame of the helix wire

为描述螺旋线曲梁截面特性, 在点 p_w 建立表示截面方向的 Frenet 局部坐标系 (t, n, b) , 单位矢量分

别沿形心轴切线方向、主法线方向与副法线方向, 切向矢量 t

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}'_{p_w}}{\sqrt{\mathbf{r}'_{p_w} \cdot \mathbf{r}'_{p_w}}}, \quad \mathbf{r}'_{p_w} = \frac{d\mathbf{r}_{p_w}}{ds_w} \quad (2)$$

螺旋线的弯曲程度由螺旋曲率矢量 κ_w 表示, 矢量 κ_w 沿主法线方向 n

$$\kappa_w = \frac{d\mathbf{t}}{ds_w} = |\kappa_w| \mathbf{n} = \kappa_w \mathbf{n} \quad (3)$$

图 2 描述了螺旋线的局部几何特征, 微弧段的螺旋曲率半径 $\rho_w = 1/\kappa_w$, 投影至绳股横截面上对应微弧段, 弧长 $R_w d\varphi_w$ 有

$$R_w d\varphi_w = \sin \alpha ds_w \quad (4)$$

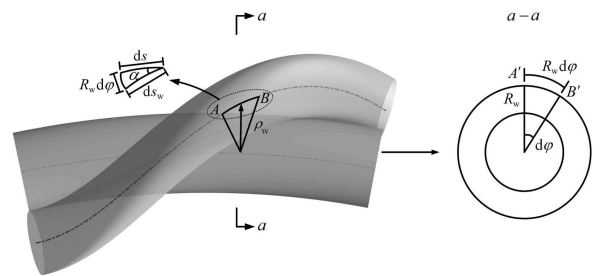


图 2 螺旋微弧段横截面投影

Fig. 2 Projection of the differential arc segment on the strand cross section

将式 (4) 代入式 (2) 和式 (3) 后分别对 φ_w 求偏导, 最终得到螺旋曲率

$$\kappa_w = \frac{\sin^2 \alpha}{R_w} \quad (5)$$

1.2 基础结构弯曲模型

绳线由于自身的结构材料属性具有一定抗弯能力, 对应无摩擦、完全滑动状态下的纯结构弯曲, 是绳股变形过程中体现的最小弯曲刚度. 绳芯为半径 R_c 、弹性模量 E_c 的平直圆截面梁, 可直接计算得到弯曲刚度 $K_c^{b_{min}} = E_c I_c$, $I_c = \pi R_c^4 / 4$ 为绳芯截面惯性矩. 外层绳线为半径 r_w 、弹性模量 E_w 的螺旋圆截面梁, 弯曲时会附带有绕螺旋形心轴的扭转变形, 同时引起单元剪切变形. Lanteigne [27]、Costello [28]、Doocy 等 [29] 在建立考虑螺旋线剪切、扭转效应的弯曲模型时发现, 绳线捻角在一定范围内时可忽略此耦合效应. 因此, 本文将绳股简化为截面刚性的 Euler-Bernoulli 梁进行建模.

对发生图 3 中弯曲变形的绳股，微元段弯曲曲率 $\kappa = 1/\rho_c$ ，又有微分关系 $\kappa = d\psi/dx$ ， ψ 表示绳股的弯曲圆心角，在螺旋线内分别引起轴向弯曲应力

$$\sigma_w^{b_{\min}} = E_w \varepsilon_w^b (y_w - y_{w0}) \quad (6)$$

式中， y_w 为螺旋线截面位置，螺旋线弯曲应变

$$\varepsilon_w^b = \kappa (y_w - y_{w0}) \quad (7)$$

其在坐标系 (t, n, b) 中沿 t 轴的分量为 $\tilde{\varepsilon}_w^b$ ，代表螺旋形心轴方向上的弯曲应变，后文将坐标系 (t, n, b) 下定义的变量表示为 $\tilde{\cdot}$ 的形式。

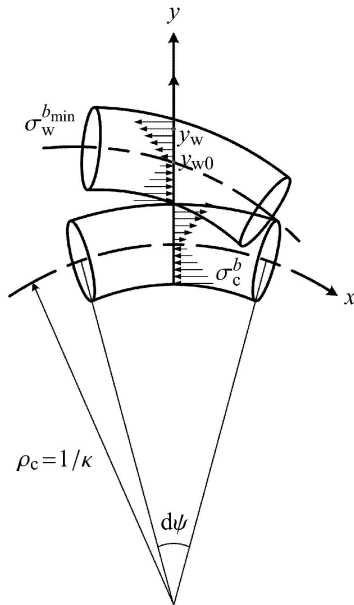


图 3 纯弯曲状态绳线应力分布

Fig. 3 Wire stress distribution under pure bending

根据应变张量坐标转换规律，这一应变可由以下关系得到

$$\tilde{\varepsilon}_w^b = \varepsilon_w^b \cos^2 \alpha \quad (8)$$

此时，可通过材料本构方程给出螺旋线沿形心轴的弯曲应力 $\tilde{\sigma}_w^{b_{\min}} = E_w \tilde{\varepsilon}_w^b$ ，则圆截面上的弯曲力矩为

$$\tilde{M}_w^{b_{\min}} = \int_{A_w} \tilde{\sigma}_w^{b_{\min}} \tilde{y} dA = E_w I_w \kappa \cos^2 \alpha \quad (9)$$

式中， $I_w = \pi r_w^4 / 4$ 为螺旋线的截面惯性矩。

进一步根据 $\tilde{M}_w^{b_{\min}}$ 沿绳股弯曲方向的分量 $M_w^{b_{\min}} = \tilde{M}_w^{b_{\min}} \cos \alpha$ 确定螺旋线的基础弯曲刚度

$$K_w^{b_{\min}} = E_w I_w \cos^3 \alpha \quad (10)$$

式中， $\cos^3 \alpha$ 是由于忽略螺旋线剪切、扭转变形而引入的弯曲刚度损失因子，取 $\eta = \cos^3 \alpha$ 。

绳股的基础弯曲模型是绳芯与全体螺旋线弯曲刚度的总和，则 $1 + m$ 型拧绞绳有弯曲刚度

$$K_s^{b_{\min}} = K_c^{b_{\min}} + \sum_{i=1}^m K_{wi}^{b_{\min}} \quad (11)$$

$K_s^{b_{\min}}$ 代表的抗弯特性仅与绳线的结构尺寸与材料属性相关，对螺旋线还需考虑捻角大小的影响，记为最小弯曲刚度。

1.3 附加弯曲模型

螺旋线沿绳芯成型后，依靠两者之间的接触摩擦阻碍相对滑移的出现以维持螺旋构型，接触摩擦引起螺旋线的附加变形在宏观上也体现为绳股抗弯特性变化，是拧绞绳弯曲非线性的主要来源之一。

无摩擦作用时，绳线变形独立，当绳股受轴向拉伸，内部沿螺旋形心轴分布的轴向力会引起外层绳线对绳芯挤压，因此螺旋线受到径向反作用力 $d\tilde{N}$ ，如图 4 所示，进而产生切向接触摩擦。微元段的接触线压力分布载荷 $\tilde{q}_c = d\tilde{N}/ds_w$ ，又有 $\tilde{q}_c = \tilde{T}_w/\rho_w$ ，再将式 (4) 中几何关系与式 (5) 中螺旋曲率代入分布载荷表达式得到

$$d\tilde{N} = \tilde{T}_w \sin \alpha d\varphi_w \quad (12)$$

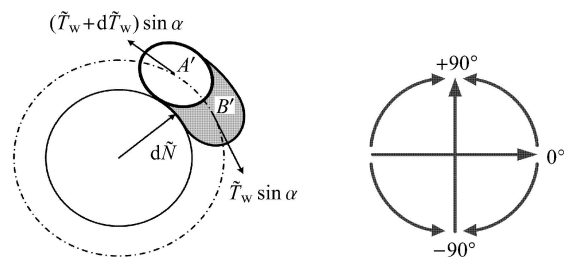


图 4 绳股径向接触力

Fig. 4 Strand radical contact force

根据库伦摩擦模型： $d\tilde{f} = \mu d\tilde{N}$ ， μ 为接触摩擦系数，绳线截面受力平衡状态下有

$$d\tilde{f} = d\tilde{T}_w = \mu \tilde{T}_w \sin \alpha d\varphi_w \quad (13)$$

沿截面分布角积分，得到轴向拉力 \tilde{T}_w 随 φ_w 的变化规律

$$\ln \tilde{T}_w = \int_0^{\varphi_w} \mu \sin \alpha d\varphi_w \quad (14)$$

$$\tilde{T}_w = \tilde{T}_w^0 e^{\mu \varphi_w \sin \alpha} \quad (15)$$

$\varphi_w = 0$ 处的螺旋线微元在弯曲状态下与绳股轴线均处在中性层, 轴向拉力 $\tilde{T}_w^0 = A_w \tilde{\sigma}_w^a$, $\tilde{\sigma}_w^a$ 为螺旋线轴向拉伸应力. 该位置处的轴向力无径向分量, 故滑动不受接触摩擦制约. 弯曲过程中, 螺旋线内为平衡接触摩擦而产生的附加轴向力为

$$\tilde{T}_w^{\text{add}} = \tilde{T}_w - \tilde{T}_w^0 \quad (16)$$

继而得到其引起的螺旋线附加弯曲应力

$$\tilde{\sigma}_w^{\text{badd}} = \tilde{T}_w^{\text{add}} / A_w \quad (17)$$

螺旋线与绳芯之间接触状态为黏滞摩擦时, 二者视为一个整体, 对应的附加黏滞弯曲应变、弯曲应力可根据绳股曲率直接计算

$$\tilde{\varepsilon}_w^{\text{bstick}} = \kappa R_w \sin \varphi_w \cos^2 \alpha \quad (18)$$

$$\tilde{\sigma}_w^{\text{bstick}} = \kappa E_w R_w \sin \varphi_w \cos^2 \alpha \quad (19)$$

绳股弯曲继续增大, 当黏滞摩擦力不足以平衡螺旋线变形力时, 黏滞摩擦转为滑动摩擦, 对应的附加滑动弯曲应力与式 (17) 一致

$$\tilde{\sigma}_w^{\text{bslip}} = \tilde{\sigma}_w^a (e^{\mu \varphi_w \sin \alpha} - 1) \quad (20)$$

两种状态下的附加弯曲应力在螺旋线截面上积分得到附加弯曲力矩

$$\tilde{M}_w^{\text{badd}} = \int_{A_w} \tilde{\sigma}_w^{\text{badd}} R_w \sin \varphi_w dA \quad (21)$$

分别将式 (19) 与式 (20) 代入上式, 最终得到绳股弯曲平面内的附加弯曲刚度

$$\left. \begin{aligned} K_w^{\text{bstick}} &= \eta E_w A_w (R_w \sin \varphi_w)^2 \\ K_w^{\text{bslip}} &= \eta A_w \sigma_w^a (e^{\mu \varphi_w \sin \alpha} - 1) R_w \sin \varphi_w / \kappa \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

绳线接触摩擦黏滞与滑动状态相互转换的判定由临界曲率确定, 临界条件下式 (19) 与式 (20) 相等 $\tilde{\sigma}_w^{\text{bstick}} = \tilde{\sigma}_w^{\text{bslip}}$, 得到绳股临界曲率 κ_c

$$\kappa_c = \frac{\tilde{\sigma}_w^a (e^{\mu \varphi_w \sin \alpha} - 1)}{E_w R_w \sin \varphi_w \cos^2 \alpha} \quad (23)$$

综上, 本节给出了绳股绳线在不同接触状态下的弯曲非线性模型.

2 柔性多体动力学等效模型

柔性体的大变形动力学 ANCF 建模方法由 Shabana^[12] 提出, 与浮动坐标系方法所不同的是:

节点处的广义坐标表示在绝对参考坐标系下, 转动与变形共同由位移梯度表示, 得到的 ANCF 模型质量矩阵为常值矩阵, 避免了柔性体描述方法对小转角、小应变的限制. 本文基于 ANCF 一维介质梁模型描述其大弯曲变形过程, 建立拧绞绳的等效模型. 等效模型根据绳线之间的微观力学状态与几何拓扑结构引入材料本构关系, 绳线由均匀且各向同性的线弹性材料制成, 假设螺旋线的捻角与未变形平直状态保持一致.

2.1 绝对节点坐标梁位移场

ANCF 一维梁模型的横截面保持刚性, 连续梁经物理离散后每个单元的自由度在图 5 中绝对坐标系 (X, Y, Z) 下通过单元两端节点坐标表示.

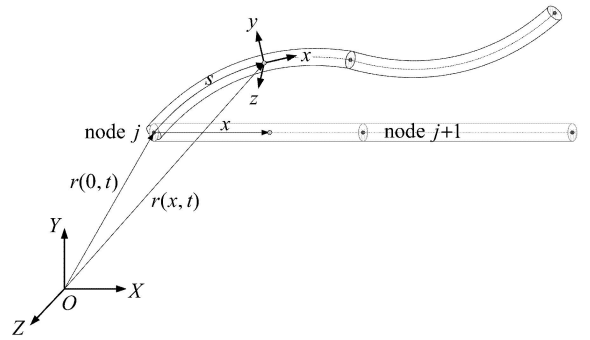


图 5 梁单元变形位移场

Fig. 5 Deformed displacement field of beam element

取节点 j 的广义坐标, 包含 6 个自由度

$$\mathbf{q} = [r_1, r_2, r_3, r_{1x}, r_{2x}, r_{3x}]^T, \quad r_{kx} = \left. \frac{\partial r_k}{\partial x} \right|_{k=1,2,3} \quad (24)$$

式中, x 为单元物质坐标. 单元上任意一点位置矢量 \mathbf{r} 由物质坐标的三次 Hermite 插值定义

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \\ b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 \\ c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 \end{bmatrix} \quad (25)$$

建立位置矢量 \mathbf{r} 与单元广义坐标 \mathbf{q} 之间的关系

$$\mathbf{r} = [S_1 \mathbf{I}_3 \quad S_2 \mathbf{I}_3 \quad S_3 \mathbf{I}_3 \quad S_4 \mathbf{I}_3] \begin{bmatrix} \mathbf{q}^1 \\ \mathbf{q}^2 \end{bmatrix} = \mathbf{S}(x) \mathbf{q} \quad (26)$$

式中, 形函数矩阵 $\mathbf{S}(x)$ 中的 \mathbf{I}_3 为三阶单位矩阵, 各系数分别为

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, \quad S_2 = L(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \\ S_3 &= 3\xi^2 - 2\xi^3, \quad S_4 = L(-\xi^2 + \xi^3) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

式中, 插值系数 S_i 为 ξ 的三次多项式, 参数 $\xi = x/L$, 每一列向量对应一个广义坐标.

2.2 单元广义弹性力

计算变刚度绳股的梁单元弹性力, 需要在位于同一轴向物质坐标处对绳芯及螺旋线单元力进行加和. 基于连续介质力学原理, 在给定的虚应变上计算弹性力所做虚功. 为统一表示, 将绳芯参量下标 c 用 w_0 表示, 对应 $\alpha = 0, \cos \alpha = 1$

$$\delta W_e = \sum_{i=0}^m \left(\int_{V_i} \sigma_{wi}^a \delta \varepsilon dV_i + \int_{V_i} \sigma_{wi}^b \delta \kappa dV_i \right) = \sum_{i=0}^m \left[\int_{V_i} (K_{wi}^a \varepsilon) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{q}} dV_i + \int_{V_i} (K_{wi}^b \kappa) \frac{\partial \kappa}{\partial \mathbf{q}} dV_i \right] \cdot \delta \mathbf{q} = (\mathbf{Q}_e^a + \mathbf{Q}_e^b) \cdot \delta \mathbf{q} \quad (28)$$

式中, \mathbf{Q}_e^a 与 \mathbf{Q}_e^b 分别为单元广义轴向力与弯曲力.

关于轴向刚度系数 K_{wi}^a 的计算, 首先给出绳股、绳芯与螺旋线三者轴向应变关系

$$\varepsilon = \varepsilon_c^a = \varepsilon_w^a = \frac{\tilde{\varepsilon}_w^a}{\cos^2 \alpha} \quad (29)$$

根据式 (29) 分别建立绳芯与螺旋线的拉伸本构关系

$$T_c = E_c A_c \varepsilon_c^a \quad (30)$$

$$T_w^0 = \tilde{T}_w^0 \cos \alpha = \eta E_w A_w \varepsilon_w^a \quad (31)$$

式中, \tilde{T}_w^0 即引起螺旋线拉伸变形的轴向力分量, 此处认为弯曲应力不引起轴向长度的改变, 则 $K_c^a = E_c A_c, K_w^a = \eta E_w A_w$.

将轴向刚度系数 K_{wi}^a 与弯曲刚度系数 K_{wi}^b 分别代入式 (28), 先得到轴向广义弹性力 \mathbf{Q}_e^a 为

$$\mathbf{Q}_e^a = \int_0^L (E_c A_c + m \eta E_w A_w) \varepsilon \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{q}} \right)^T dx \quad (32)$$

弯曲广义弹性力 \mathbf{Q}_e^b 对应接触状态也分为基础值 \mathbf{Q}_e^{bmin} 及附加值 \mathbf{Q}_e^{badd} 两部分

$$\mathbf{Q}_e^{bmin} = \int_0^L (E_c A_c + m \eta E_w A_w) \kappa \left(\frac{\partial \kappa}{\partial \mathbf{q}} \right)^T dx \quad (33)$$

由于每根螺旋线与绳芯的接触状态不一致, 有的与绳芯间相对静止而有的出现相对滑动, 需要根据临界曲率对螺旋线一一单独判断再加和方可得到绳股附加广义弯曲弹性力.

$\kappa \leq \kappa_c$ 时

$$\mathbf{Q}_{ei}^{bstick} = \int_0^L \eta E_w A_w R_w^2 \sin^2 \varphi_{wi} \kappa \left(\frac{\partial \kappa}{\partial \mathbf{q}} \right)^T dx \quad (34)$$

$\kappa > \kappa_c$ 时

$$\mathbf{Q}_{ei}^{bslip} = \int_0^L \eta A_w \sigma_w^a (e^{\mu \varphi_{wi} \sin \alpha} - 1) R_w \sin \varphi_{wi} \left(\frac{\partial \kappa}{\partial \mathbf{q}} \right)^T dx \quad (35)$$

式中, 螺旋线相位角 φ_{wi} 关于物质坐标 x 的表达式及相邻螺旋线间的相位角满足

$$\varphi_{wi}(x) = \varphi_{wi}(0) + \frac{2\pi x}{P_w} \quad (36)$$

$$\varphi_{wi}(x) = \varphi_{w(i-1)}(x) + \frac{2\pi}{m} \quad (37)$$

2.3 单元应变能

进一步研究绳股运动变形过程中的弹性应变能, 不考虑阻尼效应, 每一时刻的应变能仅与当前广义变量状态相关, 而与广义速度状态无关.

$$U_e = \sum_{i=0}^m \left[\int_{V_i} \left(\int \sigma_{wi}^a d\varepsilon \right) dV_i + \int_{V_i} \left(\int \sigma_{wi}^b d\kappa \right) dV_i \right] \quad (38)$$

轴向本构关系为线性, 轴向应变能由应变能密度在单元体积上的积分导出

$$U_e^a = \frac{1}{2} \int_0^L (E_c A_c + m \eta E_w A_w) \varepsilon^2 dx \quad (39)$$

弯曲变形的基础应变能部分

$$U_e^{bmin} = \sum_{i=0}^m \int_{V_i} \left(\int \sigma_{wi}^{bmin} d\kappa \right) dV_i = \frac{1}{2} \int_0^L (E_c I_c + m \eta E_w I_w) \kappa^2 dx \quad (40)$$

同理计算弯曲变形的附加应变能部分

$\kappa \leq \kappa_c$ 时

$$U_{ei}^{bstick} = \frac{1}{2} \int_0^L \eta E_w A_w R_w^2 \sin^2 \varphi_{wi} \kappa^2 dx \quad (41)$$

$\kappa > \kappa_c$ 时

$$U_{ei}^{bslip} = \int_0^L \eta A_w \sigma_w^a (e^{\mu \varphi_{wi} \sin \alpha} - 1) R_w \sin \varphi_{wi} \kappa dx \quad (42)$$

2.4 绳股多柔体动力学方程组

由虚功原理计算广义惯性力虚功

$$\delta W_{inertia} = \left(\int_V \rho \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} dV \right) \cdot \delta \mathbf{q} = (\mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}) \cdot \delta \mathbf{q} \quad (43)$$

根据质量守恒, 将单元惯性力的体积积分转化为沿物质坐标的一维积分, 得到单元广义质量矩阵

$$\mathbf{M} = \int_0^L \rho \left(A_c + m \frac{A_w}{\cos \alpha} \right) (\mathbf{S}^T \mathbf{S}) dx \quad (44)$$

下面推导柔性多体系统外部作用力的广义形式, 以分布载荷外力为例, 等效至单元节点后的单元广义分布载荷虚功

$$\delta W_f = \int_V \rho \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{r} dV = \mathbf{Q}_g \cdot \delta \mathbf{q} \quad (45)$$

依据达朗贝尔原理建立绞绳的梁单元动力学方程组

$$\delta W_{inertia}^j + \delta W_c^j - \delta W_g^j = 0 \quad (46)$$

将单元方程组扩展至含约束的绳股柔性多体系统, 引入拉格朗日乘子 λ , 得到增广形式的可变弯曲刚度绞绳动力学模型

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{C}_q^T \\ \mathbf{C}_q & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_g - (\mathbf{Q}_c^a + \mathbf{Q}_c^{bmin} + \mathbf{Q}_c^{badd}) \\ \mathbf{Q}_c \end{bmatrix} \quad (47)$$

式中, \mathbf{C}_q 为绳股约束方程组 \mathbf{C} 的雅可比矩阵, \mathbf{Q}_g 为广义外力, \mathbf{Q}_c 为广义约束力. 等效动力学模型中, 将绳股内绳芯与螺旋线之间的微观接触状态通过截面应力分析, 避免了对螺旋线及接触的单动力学建模, 减少了计算量.

2.4 模型验证

为验证等效模型的精度, 本文采用有限段离散梁方法建立绞绳精细模型进行对比. 精细模型中, 对每根螺旋线进行独立建模, 分别沿螺旋线心轴均匀划分出一定数目刚性小段, 在单元两端处添加段间弹簧力以捕捉螺旋线柔性特征; 螺旋线与绳芯之间引入接触摩擦力, 模拟绞绳的内部摩擦力.

本文以 1+6 型钢丝绳为建模研究对象, 结构与材料参数见表 1. 将其一端固定, 沿绳股轴线均匀加载 $-Y$ 方向上的分布载荷, 如图 6 所示.

表 1 绳股结构与材料参数

Table 1 Structure and inaterial parameters of the strand

Parameter	Value
strand length/m	0.4
helix wire diameter/m	2.0×10^{-3}
core wire diameter/m	3.0×10^{-3}
laying angle/(°)	20
pitch length/m	4.32×10^{-2}
number of helix wire	6
Young's modulus/Pa	2.0×10^8
density/($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)	7 801

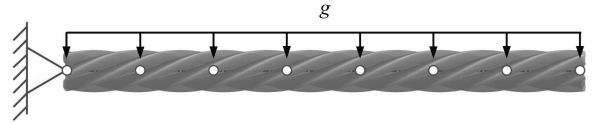


图 6 分布载荷作用下的一端固定柔性绳股

Fig. 6 Cantilevered flexible strand with distributed load

首先, 研究不同大小载荷作用下的准静态构型, g 分别取 $-8 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$, $-10 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$ 与 $-12 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$. 对 FS 模型的独立螺旋线划分 77 个单元; 对 ANCF 等效梁模型划分 8 个单元, 所得结果如图 7 所示.

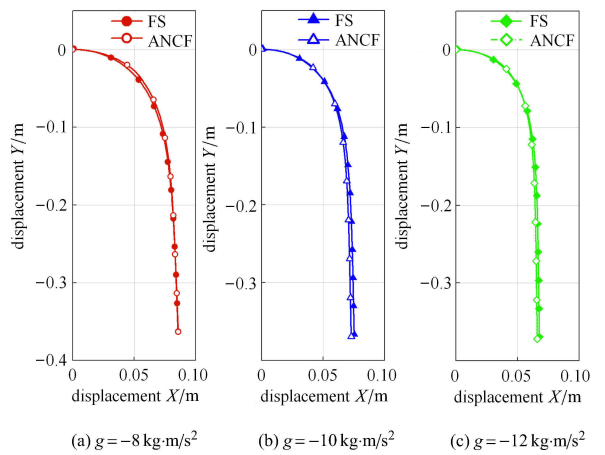


图 7 准静态构型

Fig. 7 Quasi-static configuration

可知, 等效模型在准静态构型上与精细模型的符合度较高. 随着力载的增大, 绞绳根部弯曲变形逐渐加大, 该区域内的变形描述是影响位形精度的主要因素, 位置误差为 10^{-3} m , 量级较小.

图 8 显示了自重力作用下, $g = -9.8065 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$ 时柔性绳摆由水平静止状态释放后的位形. 可知,

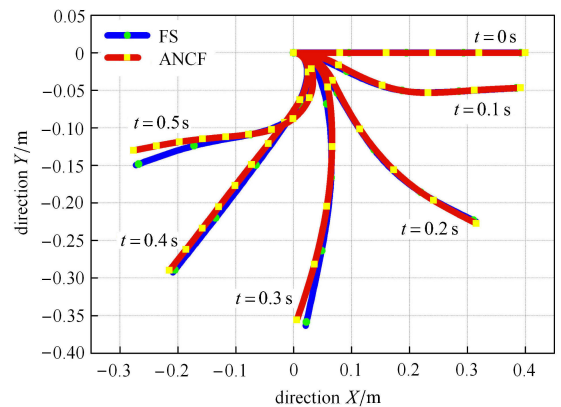


图 8 不同时刻的绳摆位形

Fig. 8 Position of the strand pendulum at various times

两种方法得到的位形在 0~0.2 s 较好地吻合, 0.3 s 之后位形差异略有增大. 根据同一时刻相对位形, 0.5 s 内位置误差在 $10^{-2}m$ 量级.

3 拧绞绳力学特性分析

3.1 悬臂梁静力学分析

在验证了等效模型可行性的基础上, 本节进一步详细研究拧绞绳的力学特性, 拧绞绳的结构与材料参数取值变为: 绳长 1 m、弹性模量 $2.0 \times 10^9 Pa$ 、密度 $5747 kg \cdot m^{-3}$, 其他与表 1 一致.

首先, 对绳股划分 30 个单元, 研究准静态力学特性. 绳股上加载沿 $-Y$ 方向的均匀分布载荷 g , 对比等效 ANCF 拧绞绳与传统 ANCF 梁的静态构型. 传统单元计算所采用的柔索弯曲刚度为常值, 仅与弹性模量及截面尺寸有关, 截面按拧绞绳外包络线所构成的圆柱面给定.

静平衡状态下, 绳股在运动平面内的位形如图 9 所示, 等效模型在固定端根部的弯曲变形明显大于传统模型, 整体沿 X, Y 方向的偏移量也更大, 体现出绳股较大柔性, 力载变化范围内的位形差别较小.

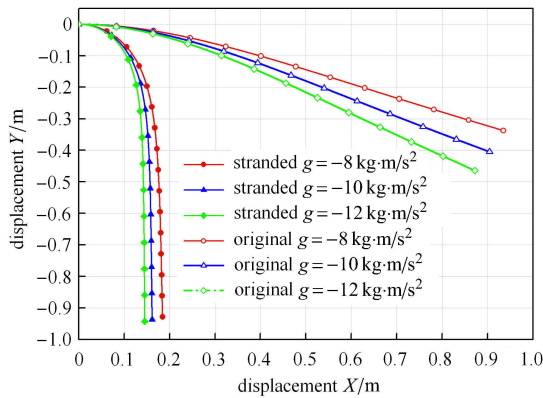


图 9 不同分布载荷下的静态位形

Fig. 9 Static configuration under different distribution loads

根据式 (11)、式 (22) 导出受力平衡状态下绳股弯曲刚度沿轴向的分布, 如图 10 所示. 可以看到等效 ANCF 模型反映出了绳股抗弯特性的变化, 弯曲刚度随外力加载的差异沿不同路径在最小与最大值区间内变化, 梁根部值对应式 (11) 的基础结构弯曲刚度, 梁末端对应绳线间完全黏滞时包含式 (22) 中一式的最大弯曲刚度. 传统 ANCF 模型的弯曲刚度为常值, 不因外力加载发生变化, 其值高于等效 ANCF 模型的最大弯曲刚度.

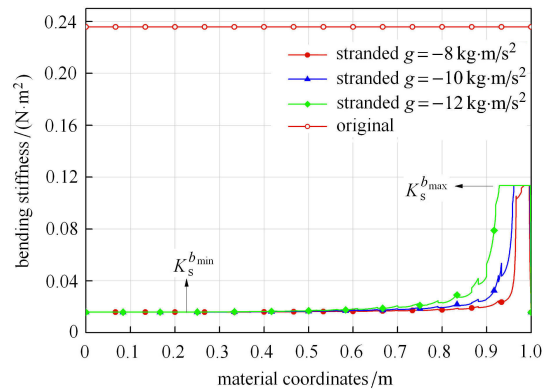


图 10 绳股弯曲刚度沿轴向分布

Fig. 10 Distribution of the strand bending stiffness along the axis line

等效 ANCF 模型非线性弯曲刚度对应的接触状态主要依据弯曲曲率进行判定. 绳股曲率的分布如图 11 所示, 等效模型在根部具有较大弯曲变形, 曲率大于全部绳线的临界值, 处于滑动摩擦状态; 0~0.4 m 区间内曲率迅速递减, 末端的外力方向与位形接近一致, 几乎不引起弯曲变形, 曲率小于全部绳线的临界值, 处于黏滞摩擦状态. 图 11 中曲率的变化规律一定程度上解释了图 10 中弯曲刚度的分布特征. 局部放大末端曲率曲线, 传统模型的末端仍受外载荷作用发生弯曲, 因而曲率有起伏并未直接减小至零.

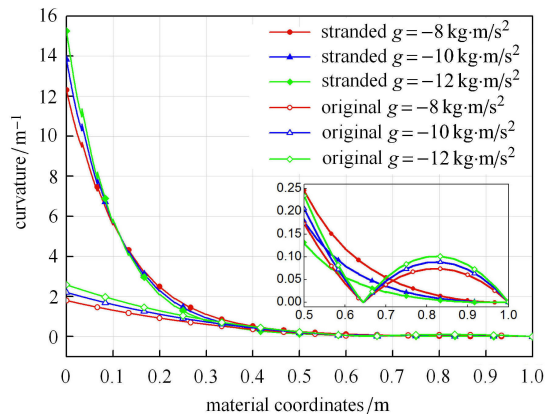


图 11 绳股静态弯曲曲率分布

Fig. 11 Bending curvature of the strand

另一影响绳股附加弯曲刚度值的因素为轴向张紧力, 如图 12 所示, 它直接与绳线接触摩擦力相关. 选取 $g = -12 kg \cdot m/s^2$ 情况, 研究位于绳股轴向 0.92 m, 0.925 m, 0.93 m 处特征点一周螺旋线与绳芯之间的接触状态, 图 10 显示, 这段绳股的弯曲刚度呈上升趋势. 根据图 12, 3 个位置处的轴向张紧力分别为

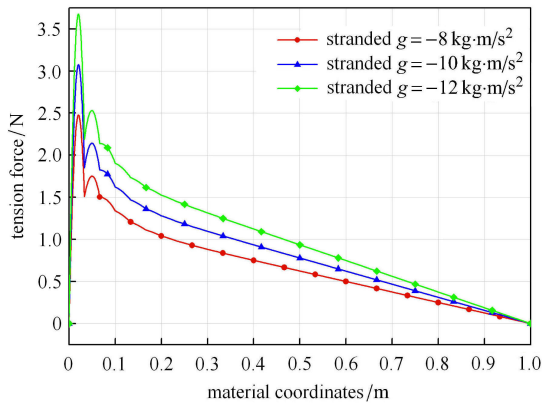
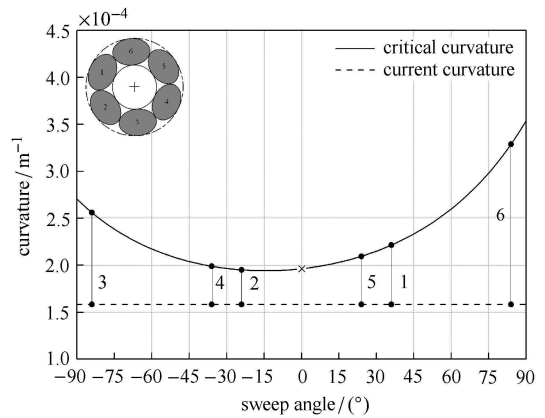


图 12 轴向张紧力
Fig. 12 Axial tension force

0.149 N, 0.14 N, 0.13 N, 通过比较绳股当前弯曲曲率与螺旋线的临界值, 可得螺旋线的接触状态.

图 13 显示了特征点曲率与螺旋线临界曲率之间的关系, 并根据式 (36) 与式 (37) 按逆时针标注出实际结构中螺旋线在绳股截面所处位置与对应相位



(c) $x = 0.93$ m
图 13 曲率随相位角的变化曲线
Fig. 13 Curves of curvature versus the sweep angle

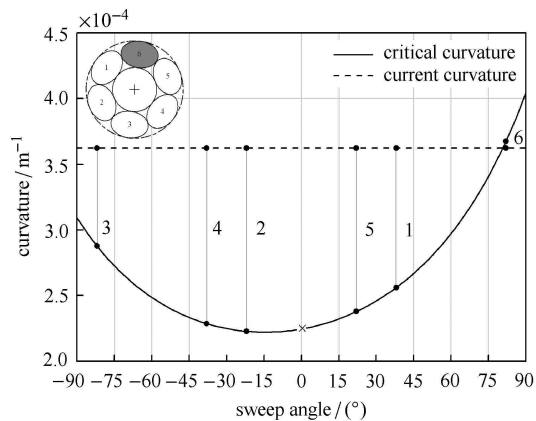
角, 特征点当前弯曲曲率低于临界值的螺旋线对应黏滞接触摩擦状态, 截面标注为深色. 显然, 随着黏滞接触状态的螺旋线数目增大, 绳股等效模型的弯曲刚度也逐步增大. 另外, 临界曲率在绳股中性层上下部分的分布是不对称的, 相位角小于 0° 的区域更易出现滑动.

3.2 柔性单摆自由运动仿真分析

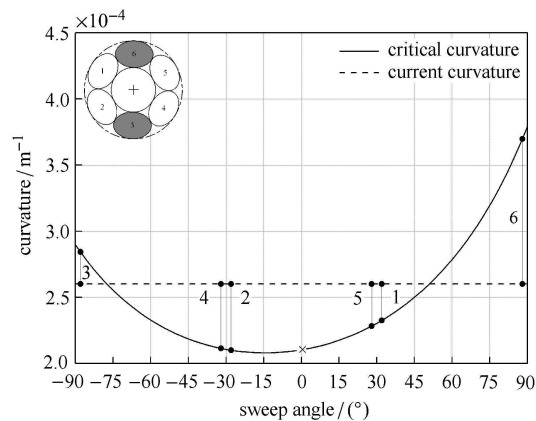
上述静力学仿真分析从数值上验证了变化弯曲刚度的拧绞绳等效模型静态弯曲力学性能. 为了进一步研究等效模型在大范围运动中的动态非线性弯曲特性, 将拧绞绳从水平静止状态释放, 重力作用下做 XY 面内的自由摆动运动, 重力加速度 $g = -9.8 \text{ kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2$, 方向沿 $-Y$ 向, 仿真时长 1 s. 动力学仿真数值计算采用相对稳定的保结构二阶 Stomer-Verlet 几何积分方法 [30].

根据图 14(a) 中 X, Y 方向上位移曲线, 0.1 s 内, 两种模型得到的末端位移曲线大体一致, 随着重力作用下的绳股弯曲继续增加, 变化弯曲刚度的等效 ANCF 模型末端点沿水平、竖直方向上摆动所能达到的运动范围均大于传统模型. 根据图中末端运动轨迹进一步分析可知, 柔性较大的等效 ANCF 模型摆动周期大于传统 ANCF 模型, 传统模型的弯曲刚度较大, 做较小范围的往复运动.

图 14 (b) 显示了绳股末端点速度变化曲线, 等效模型沿水平、竖直方向上达到的最大速度大于传统模型, 运动开始阶段 0.2~0.4 s 内等效模型末端速度突然增大, 这一现象主要由固定端弯曲变形超过临界曲率, 螺旋线与绳芯之间的接触摩擦逐渐由黏滞转为滑动摩擦, 因而导致绳股弯曲刚度骤减.



(a) $x = 0.92$ m



(b) $x = 0.925$ m

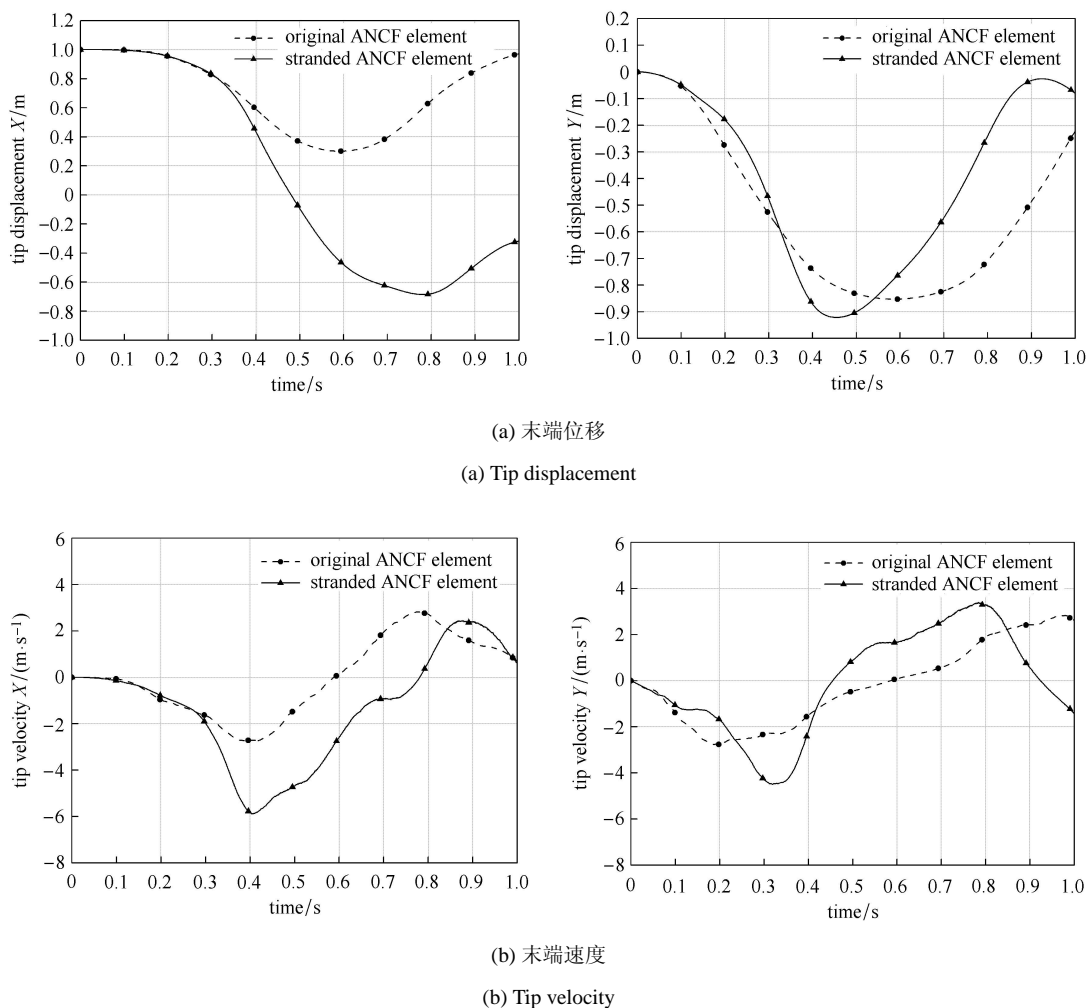


图 14 梁水平、竖直方向末端位移、速度

Fig.14 Tip displacement and velocity along the horizontal and vertical direction

最后研究动态过程中系统各部分能量的变化，如图 15 所示. 图 15 (a) 中，等效 ANCF 模型的系统

总能量略有下降，是由滑动摩擦引起；图 15 (b) 中，传统 ANCF 模型忽略了绳股微观接触，因而为保守

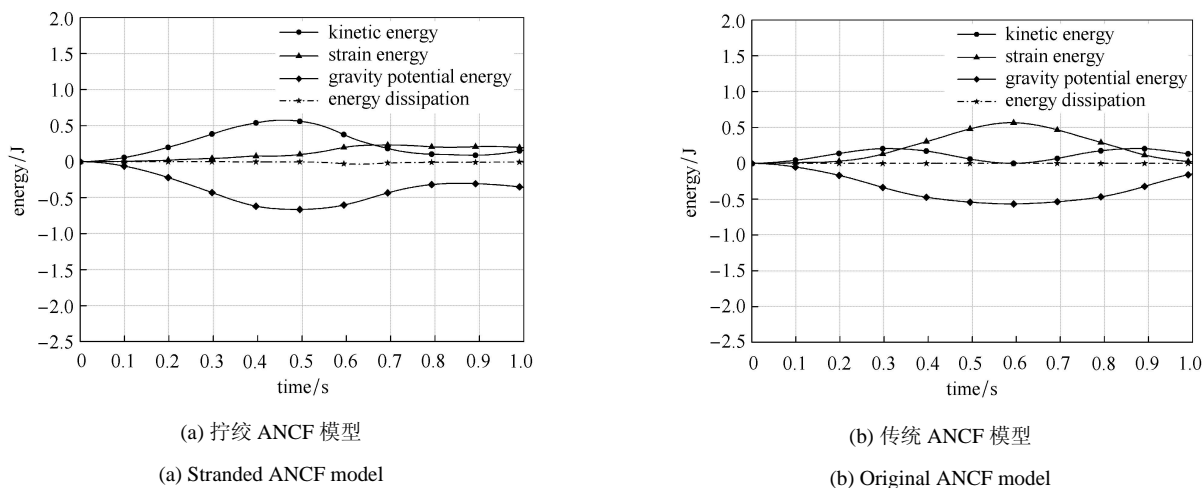


图 15 能量转换

Fig. 15 Energy conversion

系统, 满足能量守恒. 相对保守的传统模型而言, 等效模型在运动仿真中能量曲线没有明显周期性变化.

综上, 在拧绞绳大变形动力学建模的同时考虑螺旋线空间几何构型与微观接触摩擦, 仿真结果体现了等效模型较强的弯曲非线性特性.

4 结论

本文针对实际应用中具有捻制螺旋结构的拧绞钢丝绳研究了一种大变形等效动力学建模方法, 经仿真验证得到以下五点结论:

(1) 拧绞绳结构宏观力学特性复杂, 具有较强的材料非均匀、非线性特性, 通过对微观结构及受力的分析, 得到了拧绞绳可变弯曲刚度模型;

(2) 基于绝对节点坐标方法, 建立了变刚度拧绞绳的大变形等效动力学模型, 将绳股的捻制微观力学行为在大范围的宏观动力学特性中予以反映;

(3) 通过与拧绞绳精细模型进行准静态与动态位形对比, 验证了等效模型的可行性与精度;

(4) 通过数值仿真分析了变刚度大变形梁模型动态过程中的运动规律、力学性能与能量转化, 验证了等效模型由于接触状态的改变引起的模型抗弯特性变化及能量消耗;

(5) 该等效模型避免了对螺旋线单元精细划再由接触力描述相互作用关系而导致的大规模运算消耗, 可对多种边界条件下的绳股运动状态进行预测、验证、设计与分析.

参 考 文 献

- Leech C. The Modelling and Analysis of the Mechanics of Ropes. New York: Springer, 2014
- Langlois S, Legeron F, Levesque F. Time history modeling of vibrations on overhead conductors with variable bending stiffness. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 2014, 29(2): 607-614
- Wang Z, Zhang L, Song J, et al. A novel approach for modeling and simulation of helix twisting structure based on mass-spring model. *Advances in Mechanical Engineering*, 2013, 5: 971251
- 文浩, 陈辉, 金栋平等. 带可控臂绳系卫星释放及姿态控制. 力学学报, 2012, 44(2): 408-414 (Wen Hao, Chen Hui, Jin Dongping, et al. Deployment and attitude control of a tethered subsatellite with controllable arm. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2012, 44(2): 408-414 (in Chinese))
- 蔡洪, 杨育伟, 郭才发. 电动力绳系研究进展. 宇航学报, 2014, 35(11): 1223-1232 (Cai Hong, Yang Yuwei, Guo Caifa. Review of electrodynamic tether system. *Journal of Astronautics*, 2014, 35(11): 1223-1232 (in Chinese))
- 潘冬, 张越, 魏承等. 空间大型末端执行器绳索捕获动力学建模与仿真. 振动与冲击, 2015, 34(1): 74-79 (Pan Dong, Zhang Yue, Wei Cheng, et al. Dynamic modeling and simulation on rope capturing by space large end effector. *Journal of Vibration and Shock*, 2015, 34(1): 74-79 (in Chinese))
- 刘延柱, 薛纭. 受拉扭弹性细杆超螺旋形态的定性分析. 物理学报, 2009, 58(9): 5936-5941 (Liu Yanzhu, Xue Yun. Qualitative analysis of supercoiling configuration of a thin elastic rod under tension and twist. *Acta Physica Sinica*, 2009, 58(9): 5936-5941 (in Chinese))
- 刘延柱, 薛纭. 受圆柱面约束螺旋杆伸展为直杆的动力学分析. 力学学报, 2011, 43(6): 1151-1156 (Liu Yanzhu, Xue Yun. Dynamical analysis of structural process of helical rod to straight rod under constraint of cylinder. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2011, 43(6): 1151-1156 (in Chinese))
- Simo JC. A finite strain beam formulation. The three-dimensional dynamic problem. Part I. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1985, 49(1): 55-70
- Reissner E. On one-dimensional finite-strain beam theory: the plane problem. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 1972, 23(5): 795-804
- Romero I. A comparison of finite elements for nonlinear beams: the absolute nodal coordinate and geometrically exact formulations. *Multibody System Dynamics*, 2008, 20(1): 51-68
- Shabana AA. Definition of the slopes and the finite element absolute nodal coordinate formulation. *Multibody System Dynamics*, 1997, 1(3): 339-348
- Shabana AA, Yakoub RY. Three dimensional absolute nodal coordinate formulation for beam elements: theory. *Journal of Mechanical Design*, 2001, 123(4): 606-613
- Nachbagger K, Gerstmayr J. Structural and continuum mechanics approaches for a 3D shear deformable ANCF beam finite element: Application to buckling and nonlinear dynamic examples. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2014, 9(1): 011-013
- Ebel H, Matikainen MK, Hurskainen VV, et al. Higher-order beam elements based on the absolute nodal coordinate formulation for three-dimensional elasticity. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 88(2): 1075-1091
- Foti F. A corotational beam element and a refined mechanical model for the nonlinear dynamic analysis of cables. [PhD Thesis]. Milano: Doctoral Dissertation, Politecnico di Milano, 2013
- Foti F, Martinelli L, Perotti F. Numerical integration of the equations of motion of structural systems undergoing large 3D rotations: Dynamics of corotational slender beam elements. *Meccanica*, 2015, 50(3): 751-765
- Provasi R, Martins CDA. A three-dimensional curved beam element for helical components modeling. *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, 2014, 136(4): 041601
- 张越, 赵阳, 谭春林等. ANCF 索梁单元应变耦合问题与模型解耦. 力学学报, 2016, 48(6): 1406-1415 (Zhang Yue, Zhao Yang, Tan Chunlin, et al. The strain coupling problem and model decoupling of ANCF cable/beam element. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2016, 48(6): 1406-1415 (in Chinese))
- Gnanavel B, Parthasarathy N. Effect of interfacial contact forces in radial contact wire strand. *Archive of Applied Mechanics*, 2011, 81(3): 303-317

- 21 Hong K-J, Yi C, Lee Y-K. Geometry and friction of helically wrapped wires in a cable subjected to tension and bending. *International Journal of Steel Structures*, 2012, 12(2): 233-242
- 22 Lalonde S, Guilbault R, Légeron F. Modeling multilayered wire strands, a strategy based on 3D finite element beam-to-beam contacts-Part I: Model formulation and validation. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2017, 126: 281-296
- 23 Lalonde S, Guilbault R, Langlois S. Modeling multilayered wire strands, a strategy based on 3D finite element beam-to-beam contacts-Part II: Application to wind-induced vibration and fatigue analysis of overhead conductors. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2017, 126: 297-307
- 24 Hamper MB, Recuero AM, Escalona JL, et al. Use of finite element and finite segment methods in modeling rail flexibility: a comparative study. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2012, 7(4): 041-007
- 25 Spak K, Agnes G, Inman D. Cable modeling and internal damping developments. *Applied Mechanics Reviews*, 2013, 65(1): 010801
- 26 Hong K-J, Der Kiureghian A, Sackman JL. Bending behavior of helically wrapped cables. *Journal of Engineering Mechanics*, 2005, 131(5): 500-511
- 27 Lantaigne J. Theoretical estimation of the response of helically armored cables to tension, torsion, and bending. *Journal of Applied Mechanics*, 1985, 52(2): 423-432.
- 28 Costello GA. *Theory of Wire Rope*. New York: Springer Science & Business Media, 1997
- 29 Doocy ES, Hard AR, Rawlins CB, et al. *Transmission Line Reference Book: Wind Induced Conductor Motion*. Electric Power Research Institute, 2009
- 30 过佳雯. 大变形柔性多体系统高效数值计算方法研究. [硕士论文]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2016 (Guo Jiawen. Research on high efficient numerical algorithm of the flexible multibody dynamics with large deformation. [Master Thesis]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2016 (in Chinese))