

成层饱和介质平面波斜入射问题的一维化时域方法<sup>1)</sup>李伟华<sup>\*,2)</sup> 夏佩林<sup>†</sup> 张奎<sup>\*</sup> 赵成刚<sup>\*</sup><sup>\*</sup>(北京交通大学土木建筑工程学院, 北京 100044)<sup>†</sup>(中铁工程设计咨询集团有限公司, 北京 100055)

**摘要** 地震波斜入射下自由场的输入是大型结构抗震分析中亟待解决的问题之一, 尤其是成层饱和多孔介质自由场问题, 由于问题的复杂性, 目前研究甚少. 本文基于 Biot 提出的饱和多孔介质动力方程, 建立了一种新的求解平面波斜入射下基岩上覆饱和多孔介质成层场地自由场分析的一维化时域计算方法. 该方法首先根据 Snell 定律将饱和多孔介质二维空间问题转化为一维时域问题, 通过对深度方向的有限元离散, 得到饱和多孔介质波动问题的一维化有限元方程, 然后采用单相弹性介质精确人工边界条件模拟基岩半空间的波动辐射和输入特征, 通过考虑基岩与饱和多孔介质间透水或不透水边界条件以及不同饱和多孔介质交界面边界条件, 形成基岩上覆成层饱和介质系统的整体有限元方程, 最后采用中心差分法与 Newmark 平均加速度近似格式相结合的方法对时间进行离散, 得到节点的动力时程的显式表达. 典型场地的地震反应分析表明, 本文方法的计算结果与传递矩阵法结合傅里叶变换的计算结果完全吻合, 证明了其有效性.

**关键词** 成层饱和多孔介质, 自由场, 斜入射, Snell 定律, 时域有限元

中图分类号: TU45 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-17-393

ONE-DIMENSIONAL TIME-DOMAIN METHOD FOR FREE FIELD IN LAYERED SATURATED POROELASTIC MEDIA BY PLANE WAVE OBLIQUE INCIDENCE<sup>1)</sup>Li Weihua<sup>\*,2)</sup> Xia Peilin<sup>†</sup> Zhang Kui<sup>\*</sup> Zhao Chenggang<sup>\*</sup><sup>\*</sup>(School of Civil Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)<sup>†</sup>(China Railway Engineering Consulting Group Limited Company, Beijing 100055, China)

**Abstract** The input of free field under oblique incidence of seismic waves is one of the urgent problems to be solved in the seismic analysis of large structures. Because of the complexity of the problem, there are few studies on the free field of layered saturated poroelastic media at present. In this paper, a 1-D time-domain finite element method is proposed to simulate the plane wave motion in layered saturated poroelastic media overlaid on bedrock subjected to the oblique incidence plane wave. The method is on the basis of Biot dynamic theory for saturated poroelastic media. Firstly, the spatially 2-D problem is transformed into a 1-D time-domain problem along the vertical direction according to Snell's law. 1-D finite element equations for poroelastic media are established by discretization principle and finite element. Then an exact artificial boundary condition for elastic media is used to model the wave absorption and input effects of the truncated bedrock half space. The global finite element equations for the system of layered saturated poroelastic media overlaid on bedrock are developed according to the drained or undrained boundary conditions between the poroelastic medium and

2017-11-22 收稿, 2018-02-26 录用, 2018-03-03 网络版发表.

1) 国家自然科学基金项目 (51378058, 51778386) 和国家重点基础研究发展计划项目 (2015CB057800) 资助.

2) 李伟华, 副教授, 主要研究方向: 土动力学和地震工程. E-mail: whli@bjtu.edu.cn

**引用格式:** 李伟华, 夏佩林, 张奎, 赵成刚. 成层饱和介质平面波斜入射问题的一维化时域方法. 力学学报, 2018, 50(2): 349-361

Li Weihua, Xia Peilin, Zhang Kui, Zhao Chenggang. One-dimensional time-domain method for free field in layered saturated poroelastic media by plane wave oblique incidence. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2018, 50(2): 349-361

the bedrock. By solving the 1D equations, the displacements of nodes in any vertical line can be obtained combining the method of central differences and Average acceleration of Newmark, and the wave motions in layered poroelastic medium system are finally determined based on the characteristic of traveling wave. The method is verified and by comparing with the frequency-domain transfer matrix method with fast Fourier transform in analyzing two engineering site.

**Key words** layered saturated poroelastic media, free field, oblique incident, Snell law, time-domain finite element

## 引 言

地震波输入是目前大型结构抗震分析中亟待解决的问题之一。以往很多工程的抗震设计中,常假定地震波垂直入射,从而将场地反应分析简化为一维问题。而实际上,地震波从震源传播至地表的过程中,因传播路径、地质条件等复杂因素的影响,到达工程场地时并不是垂直入射的<sup>[1-2]</sup>。现有研究表明,不同方向入射波产生的结构反应与垂直入射的结果有明显差别,尤其对于较大尺寸的工程结构<sup>[3-4]</sup>,如大跨度桥梁、大坝、大型水电站、地下管道和地铁隧道<sup>[5]</sup>等。为了确保工程结构在地震作用下的安全性,应考虑地震波斜入射的影响。

近年来,地震波斜入射时场地的地震反应研究取得了很大进展<sup>[6]</sup>。以传递矩阵法和刚度矩阵法等方法为代表的频域方法,基于解析求解,可以得到弹性场地或者非线性场地的等效线性化反应。目前,已在地震波斜入射时二维成层弹性介质自由场<sup>[7-8]</sup>以及非线性场地等效线性化<sup>[9-10]</sup>求解方面得到广泛应用。但频域方法无法反应地震过程中土体实际的非线性行为,且其计算精度往往与时域有限元方法不匹配,随着大型结构-地基系统抗震分析的发展,建立高精度和实用性强的时域分析方法已经迫在眉睫。廖河山等<sup>[11]</sup>用黏性吸收边界条件模拟底层半空间的吸收波效应,基于 Snell 定律将水平方向无限的二维空间问题转化为一维问题,建立了 SH 波倾斜入射时土层的非线性响应时域分析方法;李山有等<sup>[12]</sup>基于波动传播水平视波速不变且已知的特点,利用局部透射边界条件及显式有限差分法的内部节点位移计算公式,给出了地震波斜入射下水平成层半空间自由场的简化时域计算方法。刘晶波和王艳<sup>[13-15]</sup>仍采用黏性吸收边界条件来近似模拟截断半空间的吸波效应,在集中质量有限元法和时间中心差分相结合建立结点运动方程组的基础上,根据 Snell 定律,将水平方向相邻结点的运动用该结点相邻时刻的运动表示,从而将水平成层弹性半空间在 SH 波和 P-

SV 波斜入射下二维自由波场的计算问题简化为时域内的一维问题求解;赵密等<sup>[16]</sup>在刘晶波等<sup>[14]</sup>算法的基础上,提出一种模拟基岩半空间辐射阻尼的人工边界条件代替黏性边界条件,可获得更高的计算精度;卓卫东等<sup>[17]</sup>在刘晶波等<sup>[14]</sup>算法的基础上,建立 P-SV 波斜入射下有阻尼成层弹性半空间自由波场求解的一维化时域算法;Zhao 等<sup>[18]</sup>提出一种精确人工边界条件模拟底部半空间的波动辐射和输入特性,并利用 Snell 定律将水平方向无限的二维空间问题转化为沿深度方向的一维空间问题,建立了一种计算平面波斜入射下成层半空间自由场地反应的一维化有限元时域解法。

从这些成果上看,地震波斜入射时场地地震反应的时域分析方法已经得到很大发展,但这些成果都是基于成层单相介质展开的。实际上地球表面的地震波在从震源通过各种途径传播时,通常要穿过饱和土层和非饱和土层最后到达地面,当将充满液体的土层进行动力分析时,按饱和和多孔介质理论分析比按单相介质理论更为合理。自 1956 年 Biot<sup>[19]</sup>建立饱和和多孔介质波传播理论至今,人们对于饱和和多孔介质层的波动问题已经有了系统深入的认识<sup>[20]</sup>,但对于地震波斜入射下成层饱和和多孔介质自由场地的时域分析研究还处在起步阶段。王子辉<sup>[21]</sup>在赵成刚等<sup>[22]</sup>建立的饱和和多孔介质时域显式有限元方法的基础上,采用刘晶波等<sup>[14]</sup>提出的一维化求解方法,发展形成了基岩上覆单相固体介质与两相饱和和介质互层分布的二维自由波场的一维化时域计算方法。该方法可用于地震波斜入射下成层饱和和多孔介质自由场的计算,但其中,同样采用黏性吸收边界条件来近似模拟基岩的吸波效应,使得求解精度降低;且因为水平方向也要划分网格,使得有限元离散误差与二维有限元方法一致。为了克服这些缺点,本文建立了一种新的求解地震波斜入射下基岩上覆饱和和多孔介质成层场地自由场分析的一维化时域计算方法。首先根据 Snell 定律将饱和和多孔介质二维空间问题转化为一维时域问题,通过对深度方向的有限

元离散, 推导饱和多孔介质一维化有限元方程, 然后基于 Zhao 等<sup>[18]</sup>建立了单相弹性介质精确人工边界条件, 在考虑基岩与饱和多孔介质间透水或不透水边界条件以及不同饱和多孔介质交界面边界条件的基础上, 形成基岩上覆成层饱和介质系统的整体有限元方程, 最后采用中心差分法与 Newmark 平均加速度近似格式相结合的方法对时间进行离散, 得到节点的动力时程的显式表达. 通过与已有的矩阵传递法的解进行对比, 验证了本文方法的有效性.

### 1 成层饱和多孔介质模型

分析模型如图 1 所示, 基岩上覆成层饱和多孔介质, 平面 P(SV) 波从基岩层以  $\theta(\beta)$  角入射到成层饱和多孔介质层中. 饱和多孔介质共  $N$  层, 编号由上至下分别为 1, 2,  $\dots$ ,  $N$ , 厚度分别为  $h_1, h_2, \dots, h_N$ , 总厚度为  $H$ .

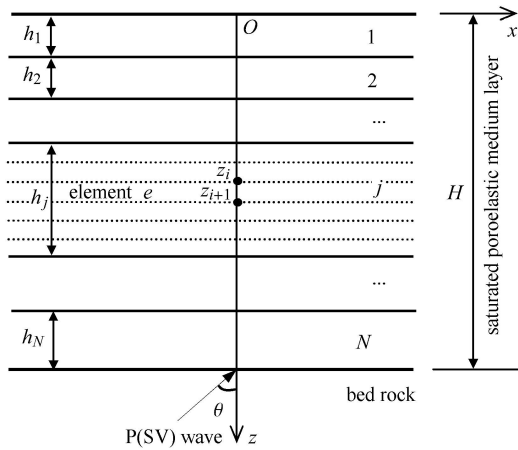


图 1 成层饱和多孔介质场地模型

Fig. 1 The field model of layered saturated poroelastic medium

考虑固体颗粒及孔隙流体的压缩性以及流固两相的惯性耦合和黏性耦合, Biot<sup>[19]</sup>给出了流体饱和多孔介质的矢量波动方程

$$N\nabla^2 \mathbf{u}^s + \nabla[(A + N)\mathbf{e} + Q\boldsymbol{\varepsilon}] = \rho_{11}\ddot{\mathbf{u}}^s + \rho_{12}\ddot{\mathbf{u}}^f + b(\dot{\mathbf{u}}^s - \dot{\mathbf{u}}^f) \quad (1a)$$

$$\nabla[Q\mathbf{e} + R\boldsymbol{\varepsilon}] = \rho_{12}\ddot{\mathbf{u}}^s + \rho_{22}\ddot{\mathbf{u}}^f - b(\dot{\mathbf{u}}^s - \dot{\mathbf{u}}^f) \quad (1b)$$

其中,  $\mathbf{u}^s$  和  $\mathbf{u}^f$  分别为固相和液相位移;  $\mathbf{e} = \nabla \cdot \mathbf{u}^s$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \cdot \mathbf{u}^f$ ;  $\rho_{11} = \rho_1 + \rho_a$ ,  $\rho_{22} = \rho_2 + \rho_a$ ,  $\rho_{12} = -\rho_a$ ,  $\rho_1 = (1 - n)\rho_s$ ,  $\rho_2 = n\rho_f$ ;  $\rho_s$  为固相质量密度,  $\rho_f$  为液相质量密度,  $\rho_a$  为液固两相耦合质量密度;  $n$  为孔隙率;  $b = \eta n^2/k$  ( $\eta$  为流体黏滞系数,  $k$  为渗透系数);  $A$ ,

$N, R, Q$  为材料常数, 可以分别用土骨架和孔隙流体的材料常数表示<sup>[23]</sup>

$$N = \mu \quad (2a)$$

$$A = K_b - \frac{2}{3}\mu + \frac{K_s^2}{K_d - K_b} \left(1 - \frac{K_b}{K_s} - n\right)^2 \quad (2b)$$

$$R = \frac{n^2 K_s^2}{K_d - K_b} \quad (2c)$$

$$Q = n \left(1 - \frac{K_b}{K_s} n\right) \frac{K_s^2}{K_d - K_b} \quad (2d)$$

其中,  $K_d = K_s \left[1 + n \left(\frac{K_s}{K_f} - 1\right)\right]$ , 且  $K_s, K_b$  分别为土颗粒和土骨架的体积模量;  $\lambda, \mu$  是土骨架的 Lamé 常数;  $K_f$  是孔隙流体的体积模量.

在 Biot 模型中, 固相、液相部分的应力-应变关系分别为

$$\sigma_{ij}^s = 2N\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}(A\mathbf{e} + Q\boldsymbol{\varepsilon}), \quad \sigma^f = Q\mathbf{e} + R\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3)$$

式中,  $\sigma_{ij}^s$  和  $\sigma^f$  分别为固体骨架部分和流体部分承担的应力,  $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$  为土骨架应变.

基岩视为弹性单相介质, 其弹性常数为  $\lambda^j, \mu^j$ , 质量密度为  $\rho^j$ .

### 2 饱和多孔介质一维化显式有限元方法

一维化方法的关键是根据 Snell 定理将动力方程中对水平方向的偏导数转化为对时间的导数, 将二维平面问题转化为一维时域问题.

#### 2.1 饱和多孔介质波动方程的空间一维化

饱和多孔介质波动方程用矩阵形式表示为<sup>[22]</sup>

$$\mathbf{L}^T \mathbf{D}_1 \mathbf{L} \mathbf{u}^s + \mathbf{L}^T \mathbf{D}_2 \mathbf{L} \mathbf{u}^f = \rho_{11}\ddot{\mathbf{u}}^s + \rho_{12}\ddot{\mathbf{u}}^f + b(\dot{\mathbf{u}}^s - \dot{\mathbf{u}}^f) \quad (4a)$$

$$\mathbf{L}^T \mathbf{D}_2 \mathbf{L} \mathbf{u}^s + \mathbf{L}^T \mathbf{D}_3 \mathbf{L} \mathbf{u}^f = \rho_{12}\ddot{\mathbf{u}}^s + \rho_{22}\ddot{\mathbf{u}}^f - b(\dot{\mathbf{u}}^s - \dot{\mathbf{u}}^f) \quad (4b)$$

其中,  $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \mathbf{D}_3$  为参数矩阵, 表达式分别如下

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D}_1 &= \begin{bmatrix} A + 2N & A & 0 \\ A & A + 2N & 0 \\ 0 & 0 & N \end{bmatrix} \\ \mathbf{D}_2 &= \begin{bmatrix} Q & Q & 0 \\ Q & Q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_3 = \begin{bmatrix} R & R & 0 \\ R & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$\mathbf{L}$  为微分算子矩阵

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} = \mathbf{L}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{L}_2 \frac{\partial}{\partial z} \quad (6)$$

根据 Snell 定理, 水平成层介质水平方向视波速相等, 所以有

$$\frac{\partial}{\partial x} = -\frac{1}{c_x} \frac{\partial}{\partial t} \quad (7)$$

其中,  $c_x$  是波沿  $x$  轴的视波速

$$c_x = \begin{cases} \frac{c_p}{\sin \theta}, & \text{incident P waves} \\ \frac{c_s}{\sin \beta}, & \text{incident SV waves} \end{cases} \quad (8)$$

将式 (7) 代入式 (4), 得到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c_x^2} \mathbf{A}_1 \ddot{\mathbf{u}}^s - \frac{1}{c_x} (\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2^T) \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}^s}{\partial z} + \mathbf{A}_3 \frac{\partial^2 \mathbf{u}^s}{\partial z^2} + \\ & \frac{1}{c_x^2} \mathbf{B}_1 \ddot{\mathbf{u}}^f - \frac{1}{c_x} (\mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_2^T) \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}^f}{\partial z} + \mathbf{B}_3 \frac{\partial^2 \mathbf{u}^f}{\partial z^2} = \\ & \rho_{11} \ddot{\mathbf{u}}^s + \rho_{12} \ddot{\mathbf{u}}^f + b (\dot{\mathbf{u}}^s - \dot{\mathbf{u}}^f) \end{aligned} \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c_x^2} \mathbf{B}_1 \ddot{\mathbf{u}}^s - \frac{1}{c_x} (\mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_2^T) \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}^s}{\partial z} + \mathbf{B}_3 \frac{\partial^2 \mathbf{u}^s}{\partial z^2} + \\ & \frac{1}{c_x^2} \mathbf{C}_1 \ddot{\mathbf{u}}^f - \frac{1}{c_x} (\mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_2^T) \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}^f}{\partial z} + \mathbf{C}_3 \frac{\partial^2 \mathbf{u}^f}{\partial z^2} = \\ & \rho_{12} \ddot{\mathbf{u}}^s + \rho_{22} \ddot{\mathbf{u}}^f - b (\dot{\mathbf{u}}^s - \dot{\mathbf{u}}^f) \end{aligned} \quad (9b)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \mathbf{L}_1^T \mathbf{D}_1 \mathbf{L}_1, \quad \mathbf{A}_2 = \mathbf{L}_1^T \mathbf{D}_1 \mathbf{L}_2, \quad \mathbf{A}_3 = \mathbf{L}_2^T \mathbf{D}_1 \mathbf{L}_2 \\ \mathbf{B}_1 &= \mathbf{L}_1^T \mathbf{D}_2 \mathbf{L}_1, \quad \mathbf{B}_2 = \mathbf{L}_1^T \mathbf{D}_2 \mathbf{L}_2, \quad \mathbf{B}_3 = \mathbf{L}_2^T \mathbf{D}_2 \mathbf{L}_2 \\ \mathbf{C}_1 &= \mathbf{L}_1^T \mathbf{D}_3 \mathbf{L}_1, \quad \mathbf{C}_2 = \mathbf{L}_1^T \mathbf{D}_3 \mathbf{L}_2, \quad \mathbf{C}_3 = \mathbf{L}_2^T \mathbf{D}_3 \mathbf{L}_2 \end{aligned} \right\}$$

根据式 (3), 饱和多孔介质中的应力与位移的关系, 可以表示为如下的矩阵关系

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{zz}^s & \sigma_{xz}^s & \sigma^f \end{bmatrix}^T = \mathbf{T}_1 \mathbf{u}^s + \mathbf{T}_2 \mathbf{u}^f \quad (10)$$

其中

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} A \frac{\partial}{\partial x} & (A + 2N) \frac{\partial}{\partial z} \\ N \frac{\partial}{\partial z} & N \frac{\partial}{\partial x} \\ Q \frac{\partial}{\partial x} & Q \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} Q \frac{\partial}{\partial x} & Q \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 \\ R \frac{\partial}{\partial x} & R \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (11)$$

将式 (7) 代入, 得

$$\boldsymbol{\sigma} = \left( -\frac{1}{c_x} \mathbf{T}_{11} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{T}_{12} \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{u}^s + \left( -\frac{1}{c_x} \mathbf{T}_{21} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{T}_{22} \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{u}^f \quad (12)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{T}_{11} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & N \\ Q & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & A + 2N \\ N & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \\ \mathbf{T}_{21} &= \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \\ R & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & Q \\ 0 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

## 2.2 一维化方程的有限元离散

将每一层饱和多孔介质在  $z$  轴方向上离散为一定数量的二节点有限元单元, 单元和节点编号由上而下进行编号. 第  $j$  层饱和多孔介质的网格划分示意图 1. 单元  $e$  的两节点在整体坐标系中的坐标为  $z_i$  和  $z_{i+1}$ , 单元网格厚度为  $\Delta z = z_{i+1} - z_i$ , 固相和液相节点位移向量为  $\mathbf{u}_e^s$  和  $\mathbf{u}_e^f$

$$\mathbf{u}_e^s = \begin{bmatrix} u_{i,x}^s & u_{i,z}^s & u_{i+1,x}^s & u_{i+1,z}^s \end{bmatrix}^T \quad (14a)$$

$$\mathbf{u}_e^f = \begin{bmatrix} u_{i,x}^f & u_{i,z}^f & u_{i+1,x}^f & u_{i+1,z}^f \end{bmatrix}^T \quad (14b)$$

令  $\mathbf{u}^s = \mathbf{N} \mathbf{u}_e^s$ ,  $\mathbf{u}^f = \mathbf{N} \mathbf{u}_e^f$ . 其中,  $\mathbf{N}$  为形状函数矩阵

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

其中,  $N_1 = \frac{z_{i+1} - z}{\Delta z}$ ,  $N_2 = \frac{z - z_i}{\Delta z}$ .

针对单元  $e$ , 方程 (9) 的 Galerkin 弱式可以写成

$$\mathbf{M}_s^e \ddot{\mathbf{u}}_e^s + \mathbf{M}_{sf}^e \ddot{\mathbf{u}}_e^f + \mathbf{C}_s^e \dot{\mathbf{u}}_e^s + \mathbf{C}_{sf}^e \dot{\mathbf{u}}_e^f + \mathbf{K}_s^e \mathbf{u}_e^s + \mathbf{K}_{sf}^e \mathbf{u}_e^f = \mathbf{f}_e \quad (16a)$$

$$\mathbf{M}_{fs}^e \ddot{\mathbf{u}}_e^s + \mathbf{M}_f^e \ddot{\mathbf{u}}_e^f + \mathbf{C}_{fs}^e \dot{\mathbf{u}}_e^s + \mathbf{C}_f^e \dot{\mathbf{u}}_e^f + \mathbf{K}_{fs}^e \mathbf{u}_e^s + \mathbf{K}_f^e \mathbf{u}_e^f = \mathbf{F}_e \quad (16b)$$

其中,  $\mathbf{f}_e$  和  $\mathbf{F}_e$  为单元载荷列阵, 分别为

$$\mathbf{f}_e = \begin{bmatrix} \sigma_{xz}^s|_{z_i} & \sigma_{zz}^s|_{z_i} & -\sigma_{xz}^s|_{z_{i+1}} & -\sigma_{zz}^s|_{z_{i+1}} \end{bmatrix}^T \quad (17a)$$

$$\mathbf{F}_e = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^f|_{z_i} & 0 & -\sigma^f|_{z_{i+1}} \end{bmatrix}^T \quad (17b)$$

$\mathbf{M}_s^e$ ,  $\mathbf{M}_{sf}^e$ ,  $\mathbf{M}_f^e$ ,  $\mathbf{M}_{fs}^e$  为单元集中质量矩阵,  $\mathbf{C}_s^e$ ,  $\mathbf{C}_{sf}^e$ ,  $\mathbf{C}_f^e$ ,  $\mathbf{C}_{fs}^e$  为单元阻尼矩阵,  $\mathbf{K}_s^e$ ,  $\mathbf{K}_{sf}^e$ ,  $\mathbf{K}_f^e$ ,  $\mathbf{K}_{fs}^e$  为单元刚度矩阵, 表达式详见附录.

## 2.3 组装成整体有限元方程

在同一种饱和多孔介质内部, 可以直接对单元有限元离散方程进行组装, 对不同饱和多孔介质层

之间, 需要考虑介质层之间的边界条件. 下面以两个单元 (如图 2) 为例, 说明不同饱和和多孔介质层之间有限元离散方程的组装.

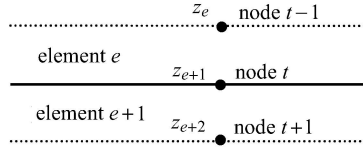


图 2 单元节点的关系

Fig. 2 The relationship between element nodes

假定不同介质层间无相对运动, 则不同饱和和多孔介质层交界面的边界条件为:

饱和和多孔介质骨架法向位移连续

$$u_z^s = u_z^{s'} \quad (18a)$$

饱和和多孔介质骨架切向位移连续

$$u_x^s = u_x^{s'} \quad (18b)$$

法向相对位移连续

$$n(u_z^f - u_z^s) = n'(u_z^{f'} - u_z^{s'}) \quad (18c)$$

饱和和多孔介质骨架切向应力连续

$$\sigma_{xz}^s = \sigma_{xz}^{s'} \quad (18d)$$

法向总应力连续

$$\sigma_{zz}^s + \sigma^f = \sigma_{zz}^{s'} + \sigma^{f'} \quad (18e)$$

孔隙水压力连续

$$\frac{1}{n}\sigma^f = \frac{1}{n'}\sigma^{f'} \quad (18f)$$

不同饱和土层, 下层饱和土层的各量用上角标 “'” 以便区分.

为了便于应用边界条件, 将饱和和多孔介质单元的有限元方程式 (16) 展开为规范化形式

$$\sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^2 \mathbf{A}^e(k, l) \mathbf{u}^e(k, l) = \mathbf{f}^e \quad (19a)$$

$$\sum_{k=1}^3 \sum_{l=3}^4 \mathbf{A}^e(k, l) \mathbf{u}^e(k, l) = \mathbf{F}^e \quad (19b)$$

其中

$$\mathbf{A}^e(1, 1) = \mathbf{M}_s^e, \quad \mathbf{A}^e(1, 2) = \mathbf{M}_{sf}^e, \quad \mathbf{A}^e(1, 3) = \mathbf{M}_{fs}^e$$

$$\mathbf{A}^e(1, 4) = \mathbf{M}_f^e, \quad \mathbf{A}^e(2, 1) = \mathbf{C}_s^e, \quad \mathbf{A}^e(2, 2) = \mathbf{C}_{sf}^e$$

$$\mathbf{A}^e(2, 3) = \mathbf{C}_{fs}^e, \quad \mathbf{A}^e(2, 4) = \mathbf{C}_f^e, \quad \mathbf{A}^e(3, 1) = \mathbf{K}_s^e$$

$$\mathbf{A}^e(3, 2) = \mathbf{K}_{sf}^e, \quad \mathbf{A}^e(3, 3) = \mathbf{K}_{fs}^e, \quad \mathbf{A}^e(3, 4) = \mathbf{K}_f^e$$

$$\mathbf{u}^e(k, l) = \mathbf{u}_e^{s(3-k)} \quad (l = 1, 3)$$

$$\mathbf{u}^e(k, l) = \mathbf{u}_e^{f(3-k)} \quad (l = 2, 4)$$

上标 (3 - k) 表示 3 - k 阶导数.

令

$$\mathbf{u}_e^f = \frac{1}{n_e} \mathbf{w}_e + \mathbf{u}_e^s \quad (20)$$

其中,  $\mathbf{w}_e = n_e(\mathbf{u}_e^f - \mathbf{u}_e^s)$ ,  $n_e$  为该单元的孔隙率. 将式 (20) 代入式 (19), 并将式 (19b) 中第 2 行和第 4 行分别对应加到式 (19a) 第 2 行和第 4 行上, 式 (19b) 第 2 行和第 4 行等式左右两边除以单元的孔隙率  $n_e$  得到

$$\sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^2 \mathbf{B}^e(k, l) \mathbf{U}^e(k, l) = \mathbf{f}_1^e \quad (21a)$$

$$\sum_{k=1}^3 \sum_{l=3}^4 \mathbf{B}^e(k, l) \mathbf{U}^e(k, l) = \mathbf{f}_2^e \quad (21b)$$

其中

$$\mathbf{A}^e(k, l) = [\mathbf{a}_{ij}^e(k, l)], \quad \mathbf{B}^e(k, l) = [\mathbf{b}_{ij}^e(k, l)]$$

$$b_{ij}^e(k, 1) = \sum_{l=1}^2 a_{ij}^e(k, l) \quad (i = 1, 3)$$

$$b_{ij}^e(k, 1) = \sum_{l=1}^4 a_{ij}^e(k, l) \quad (i = 2, 4)$$

$$b_{ij}^e(k, 2) = \frac{1}{n_e} a_{ij}^e(k, 2) \quad (i = 1, 3)$$

$$b_{ij}^e(k, 2) = \frac{1}{n_e} (a_{ij}^e(k, 2) + a_{ij}^e(k, 4)) \quad (i = 2, 4)$$

$$b_{ij}^e(k, 3) = \sum_{l=3}^4 a_{ij}^e(k, l) \quad (i = 1, 3)$$

$$b_{ij}^e(k, 3) = \frac{1}{n_e} \sum_{l=3}^4 a_{ij}^e(k, l) \quad (i = 2, 4)$$

$$b_{ij}^e(k, 4) = \frac{1}{n_e} a_{ij}^e(k, 4) \quad (i = 1, 3)$$

$$b_{ij}^e(k, 4) = \frac{1}{n_e^2} a_{ij}^e(k, 4) \quad (i = 2, 4)$$

$$U^e(k, l) = u_e^{s(3-k)} (l = 1, 3)$$

$$U^e(k, l) = w_e^{s(3-k)} (l = 2, 4)$$

$$f_1^e = \left\{ \sigma_{xz}^s \Big|_{z_e} (\sigma_{zz}^s + \sigma^f) \Big|_{z_e} - \sigma_{xz}^s \Big|_{z_{e+1}} - (\sigma_{zz}^s + \sigma^f) \Big|_{z_{e+1}} \right\}^T$$

$$f_2^e = \left\{ 0 \quad \frac{1}{n_e} \sigma^f \Big|_{z_e} \quad 0 \quad -\frac{1}{n_{e+1}} \sigma^f \Big|_{z_{e+1}} \right\}^T$$

因为不同饱和多孔介质层间切向相对位移不存在连续性条件, 进行单元有限元方程叠加时需要进

行如下数学处理: 在不增加约束条件的前提下在整体位移、速度和加速度列阵中各增加一个维度, 并且保证等式的恒成立. 处理后, 不同饱和多孔介质层间相关联的两个单元叠后的结果可以表示为

$$\sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^2 (\mathbf{B}(k, l) \mathbf{U}(k, l)) = \mathbf{f}_1 \quad (22a)$$

$$\sum_{k=1}^3 \sum_{l=3}^4 (\mathbf{B}(k, l) \mathbf{U}(k, l)) = \mathbf{f}_2 \quad (22b)$$

式 (22) 中

$$\mathbf{B}(k, 1) = \begin{bmatrix} b_{11}^e(k, 1) & b_{12}^e(k, 1) & b_{13}^e(k, 1) & 0 & b_{14}^e(k, 1) & 0 & 0 \\ b_{21}^e(k, 1) & b_{22}^e(k, 1) & b_{23}^e(k, 1) & 0 & b_{24}^e(k, 1) & 0 & 0 \\ b_{31}^e(k, 1) & b_{32}^e(k, 1) & b_{33}^e(k, 1) & b_{11}^{e+1}(k, 1) & b_{34}^e(k, 1) + b_{12}^{e+1}(k, 1) & b_{13}^{e+1}(k, 1) & b_{14}^{e+1}(k, 1) \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ b_{41}^e(k, 1) & b_{42}^e(k, 1) & b_{43}^e(k, 1) & b_{21}^{e+1}(k, 1) & b_{44}^e(k, 1) + b_{22}^{e+1}(k, 1) & b_{23}^{e+1}(k, 1) & b_{24}^{e+1}(k, 1) \\ 0 & 0 & 0 & b_{31}^{e+1}(k, 1) & b_{32}^{e+1}(k, 1) & b_{33}^{e+1}(k, 1) & b_{34}^{e+1}(k, 1) \\ 0 & 0 & 0 & b_{41}^{e+1}(k, 1) & b_{42}^{e+1}(k, 1) & b_{43}^{e+1}(k, 1) & b_{44}^{e+1}(k, 1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}(k, 2) = \begin{bmatrix} b_{11}^e(k, 2) & b_{12}^e(k, 2) & b_{13}^e(k, 2) & 0 & b_{14}^e(k, 2) & 0 & 0 \\ b_{21}^e(k, 2) & b_{22}^e(k, 2) & b_{23}^e(k, 2) & 0 & b_{24}^e(k, 2) & 0 & 0 \\ b_{31}^e(k, 2) & b_{32}^e(k, 2) & b_{33}^e(k, 2) & b_{11}^{e+1}(k, 2) & b_{34}^e(k, 2) + b_{12}^{e+1}(k, 2) & b_{13}^{e+1}(k, 2) & b_{14}^{e+1}(k, 2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{41}^e(k, 2) & b_{42}^e(k, 2) & b_{43}^e(k, 2) & b_{21}^{e+1}(k, 2) & b_{44}^e(k, 2) + b_{22}^{e+1}(k, 2) & b_{23}^{e+1}(k, 2) & b_{24}^{e+1}(k, 2) \\ 0 & 0 & 0 & b_{31}^{e+1}(k, 2) & b_{32}^{e+1}(k, 2) & b_{33}^{e+1}(k, 2) & b_{34}^{e+1}(k, 2) \\ 0 & 0 & 0 & b_{41}^{e+1}(k, 2) & b_{42}^{e+1}(k, 2) & b_{43}^{e+1}(k, 2) & b_{44}^{e+1}(k, 2) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}(k, l) = \begin{bmatrix} b_{11}^e(k, l) & b_{12}^e(k, l) & b_{13}^e(k, l) & 0 & b_{14}^e(k, l) & 0 & 0 \\ b_{21}^e(k, l) & b_{22}^e(k, l) & b_{23}^e(k, l) & 0 & b_{24}^e(k, l) & 0 & 0 \\ b_{31}^e(k, l) & b_{32}^e(k, l) & b_{33}^e(k, l) & 0 & b_{34}^e(k, l) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{11}^{e+1}(k, l) & b_{12}^{e+1}(k, l) & b_{13}^{e+1}(k, l) & b_{14}^{e+1}(k, l) \\ b_{41}^e(k, l) & b_{42}^e(k, l) & b_{43}^e(k, l) & b_{21}^{e+1}(k, l) & b_{44}^e(k, l) + b_{22}^{e+1}(k, l) & b_{23}^{e+1}(k, l) & b_{24}^{e+1}(k, l) \\ 0 & 0 & 0 & b_{31}^{e+1}(k, l) & b_{32}^{e+1}(k, l) & b_{33}^{e+1}(k, l) & b_{34}^{e+1}(k, l) \\ 0 & 0 & 0 & b_{41}^{e+1}(k, l) & b_{42}^{e+1}(k, l) & b_{43}^{e+1}(k, l) & b_{44}^{e+1}(k, l) \end{bmatrix} \quad (l = 3, 4)$$

$$\mathbf{U}(k, l) = \left[ u_{x,t-1}^{s(3-k)} \quad u_{z,t-1}^{s(3-k)} \quad \bar{u}_{x,t}^{s(3-k)} \quad u_{x,t}^{s(3-k)} \quad u_{z,t}^{s(3-k)} \quad u_{x,t+1}^{s(3-k)} \quad u_{z,t+1}^{s(3-k)} \right]^T \quad (l = 1, 2)$$

$$\mathbf{U}(k, l) = \left[ w_{x,t-1}^{(3-k)} \quad w_{z,t-1}^{(3-k)} \quad \bar{w}_{x,t}^{(3-k)} \quad w_{x,t}^{(3-k)} \quad w_{z,t}^{(3-k)} \quad w_{x,t+1}^{(3-k)} \quad w_{z,t+1}^{(3-k)} \right]^T \quad (l = 3, 4)$$

$$\mathbf{f}_1 = \left[ \sigma_{xz,t-1}^s \quad \sigma_{zz,t-1}^s + \sigma_{t-1}^f \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -\sigma_{xz,t+1}^s \quad -(\sigma_{zz,t+1}^s + \sigma_{t+1}^f) \right]^T, \quad \mathbf{f}_2 = \left[ 0 \quad \frac{\sigma_{t-1}^f}{n_{t-1}} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{\sigma_{t+1}^f}{n_{t+1}} \right]^T$$

其中, 下标  $t$  为节点号,  $\mathbf{U}(k, l)$  为单元叠加后得到位移 (速度或加速度) 列阵.  $\mathbf{f}_1$  和  $\mathbf{f}_2$  为单元叠加后得到的载荷列阵.  $\bar{u}_{x,t}^s$  和  $u_{x,t}^s$ ,  $\bar{w}_{x,t}$  和  $w_{x,t}$  分别表示  $t$  点隶属于上下两个单元时的土骨架水平方向位移和水平方向的相对位移, 由边界条件可知  $\bar{u}_{x,t}^s = u_{x,t}^s$ .

### 3 底部人工边界及输入

设波从基岩入射到饱和多孔介质层中, 基岩视作单相弹性介质. Zhao 等<sup>[18]</sup>提出了单相弹性介质精确动力人工边界条件

$$\boldsymbol{\sigma}^j = -S\bar{\mathbf{u}}^j + (\mathbf{S} + \mathbf{R})\hat{\mathbf{u}}^j \quad (23)$$

其中, 上标 “j” 表示基岩,  $\boldsymbol{\sigma}^j = \{\sigma_{xz}^j \quad \sigma_{zz}^j\}^T$  为基岩应力,  $\bar{\mathbf{u}}^j$  为散射波速度矢量,  $\hat{\mathbf{u}}^j$  为入射波速度矢量, 式中

$$S = \frac{\rho^j c_s}{m_p m_s + n_p n_s}$$

$$\begin{bmatrix} n_p & 2n_s n_p m_s - m_p (1 - 2m_s^2) \\ m_p (1 - 2m_s^2) - 2n_s n_p m_s & m_p n_s / m_s \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \rho^j c_s \begin{bmatrix} (1 - 2m_s^2)n_s & (1 - 2m_s^2)m_s \\ 2m_s n_s^2 & 2m_s^2 n_s \end{bmatrix}$$

$$m_p = \frac{c_p}{c_x}, \quad n_p = \sqrt{1 - m_p^2}, \quad m_s = \frac{c_s}{c_x}, \quad n_s = \sqrt{1 - m_s^2}$$

基岩层与第  $N$  层饱和多孔介质层交界面的边界条件为:

法向位移连续

$$u_z^j = u_z^s \quad (24a)$$

切向位移连续

$$u_x^j = u_x^s \quad (24b)$$

切向应力连续

$$\sigma_{xz}^j = \sigma_{xz}^s \quad (24c)$$

法向总应力连续

$$\sigma_{zz}^j = \sigma_{zz}^s + \sigma^f \quad (24d)$$

当基岩透水时, 孔隙水压力为零

$$p_f = -\frac{1}{n}\sigma^f = 0 \quad (24e)$$

当基岩不透水时, 饱和多孔介质土骨架和液相法向位移相等

$$u_z^s = u_z^f \quad (24f)$$

根据基岩层与第  $N$  层饱和多孔介质层交界面的边界条件式 (24) 以及人工边界条件式 (23), 装配全部有限单元, 得到一维化后全场的有限元动力方程.

当基岩边界透水时

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{M}_{sf} \ddot{\mathbf{u}}_2 + \mathbf{C}'_s \dot{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{C}_{sf} \dot{\mathbf{u}}_2 + \mathbf{K}_s \mathbf{u}_1 + \mathbf{K}_{sf} \mathbf{u}_2 &= \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{M}_{fs} \ddot{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{M}_f \ddot{\mathbf{u}}_2 + \mathbf{C}_{fs} \dot{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{C}_f \dot{\mathbf{u}}_2 + \mathbf{K}_{fs} \mathbf{u}_1 + \mathbf{K}_f \mathbf{u}_2 &= \mathbf{F}_2 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$\text{其中, } \mathbf{C}'_s = \mathbf{C}_s + \mathbf{C}_B, \text{ 且 } \mathbf{C}_B = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -S \end{bmatrix};$$

$\mathbf{M}_s, \mathbf{M}_{sf}, \mathbf{M}_f, \mathbf{M}_{fs}$  为整体质量矩阵,  $\mathbf{C}_s, \mathbf{C}_{sf}, \mathbf{C}_f, \mathbf{C}_{fs}$  为整体阻尼矩阵,  $\mathbf{K}_s, \mathbf{K}_{sf}, \mathbf{K}_f, \mathbf{K}_{fs}$  为整体刚度矩阵, 按式 (22) 的方式组装;  $\mathbf{u}_1$  和  $\mathbf{u}_2$  为整体位移列阵

$$\mathbf{u}_1 = \left\{ u_{1x}^s \quad u_{1z}^s \quad \cdots \quad u_{t-1x}^s \quad u_{t-1z}^s \quad \bar{u}_{tx}^s \quad u_{tx}^s \quad u_{tz}^s \quad u_{t+1x}^s \right. \\ \left. u_{t+1z}^s \quad \cdots \quad u_{nx}^s \quad u_{nz}^s \right\}^T$$

$$\mathbf{u}_2 = \left\{ w_{1x} \quad w_{1z} \quad \cdots \quad w_{t-1x} \quad w_{t-1z} \quad \bar{w}_{tx} \quad w_{tx} \quad w_{tz} \quad w_{t+1x} \right. \\ \left. w_{t+1z} \quad \cdots \quad w_{nx} \quad w_{nz} \right\}^T$$

下标  $n$  为总节点数,  $t$  表示不同饱和多孔介质交界面节点;  $\mathbf{F}_1$  和  $\mathbf{F}_2$  为整体载荷列阵

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= \left\{ 0 \quad \cdots \quad 0 \quad -(\mathbf{S} + \mathbf{R})\hat{\mathbf{u}}^j \right\}^T \\ \mathbf{F}_2 &= \{ 0 \quad \cdots \quad 0 \}^T \end{aligned} \right\}$$

P 波入射时

$$\hat{\mathbf{u}}^j = [\sin \theta \quad -\cos \theta]^T \dot{\mathbf{u}}_0 \quad (26a)$$

SV 波入射时

$$\hat{\mathbf{u}}^j = [\cos \beta \quad \sin \beta]^T \dot{\mathbf{u}}_0 \quad (26b)$$

当基岩边界不透水时

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{M}'_{sf} \ddot{\mathbf{u}}_2 + \mathbf{C}'_s \dot{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{C}'_{sf} \dot{\mathbf{u}}_2 + \mathbf{K}_s \mathbf{u}_1 + \mathbf{K}'_{sf} \mathbf{u}_2 &= \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{M}_{fs} \ddot{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{M}'_f \ddot{\mathbf{u}}_2 + \mathbf{C}_{fs} \dot{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{C}'_f \dot{\mathbf{u}}_2 + \mathbf{K}_{fs} \mathbf{u}_1 + \mathbf{K}'_f \mathbf{u}_2 &= \mathbf{F}_2 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

其中

$$\mathbf{M}'_{sf} = \begin{bmatrix} M_{sf}(1,1) & \cdots & M_{sf}(1,s-1) & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ M_{sf}(s,1) & \cdots & M_{sf}(s,s-1) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}'_f = \begin{bmatrix} M_f(1,1) & \cdots & M_f(1,s-1) & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ M_f(s-1,1) & \cdots & M_f(s-1,s-1) & 0 \\ M_f(s,1) & \cdots & M_f(s,s-1) & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}'_{sf} = \begin{bmatrix} C_{sf}(1,1) & \cdots & C_{sf}(1,s-1) & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C_{sf}(s,1) & \cdots & C_{sf}(s,s-1) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}'_f = \begin{bmatrix} C_f(1,1) & \cdots & C_f(1,s-1) & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C_f(s,1) & \cdots & C_f(s,s-1) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}'_{sf} = \begin{bmatrix} K_{sf}(1,1) & \cdots & K_{sf}(1,s-1) & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ K_{sf}(s,1) & \cdots & K_{sf}(s,s-1) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}'_f = \begin{bmatrix} K_f(1,1) & \cdots & K_f(1,s-1) & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C_f(s,1) & \cdots & K_f(s,s-1) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}'_{sf} = \begin{bmatrix} K_{sf}(1,1) & \cdots & K_{sf}(1,s-1) & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ K_{sf}(s,1) & \cdots & K_{sf}(s,s-1) & 0 \end{bmatrix}$$

$s$  为整体系数矩阵的总阶次;  $\ddot{\mathbf{u}}_2 = \{\ddot{w}_{1x} \ \ddot{w}_{1z} \ \cdots \ \ddot{w}_{t-1x} \ \ddot{w}_{t-1z} \ \ddot{w}_{tx} \ \ddot{w}_{tz} \ \ddot{w}_{t+1x} \ \ddot{w}_{t+1z} \ \cdots \ \ddot{w}_{nx} \ p_{fn}\}^T$ ,  $p_{fn}$  为饱和和多孔介质层与基岩交界面节点的孔隙水压力。

#### 4 节点动力反应的显式表达

利用一维化的方法建立离散的有限元方程式 (25) 或式 (27) 之后, 可采用中心差分法与 Newmark 平均加速度法相结合的显式积分方法求解各节点的动力时程 [22]。周正华等 [24] 和王进廷等 [25] 先后对比分析了儿种常用显式积分方法的稳定性和精度, 证

明该方法具有二阶精度及良好的稳定性, 并给出了其稳定性条件。李亮等 [26] 研究了采用该方法进行饱和和两相介质波动问题分析时的稳定性影响因素, 包括时间步长、空间步距和渗透系数取值等的作用规律。在此不再赘述。

以基岩透水为例, 可以得到用前一时刻的位移和速度表示的当前时刻的位移

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1^{p+1} = & \mathbf{u}_1^p + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_1^p - \frac{\Delta t^2}{2} (\mathbf{M}_f \mathbf{M}_s - \mathbf{M}_{sf} \mathbf{M}_{fs})^{-1} \cdot \\ & \left[ (\mathbf{M}_f \mathbf{C}'_s - \mathbf{M}_{sf} \mathbf{C}_{fs}) \dot{\mathbf{u}}_1^p + (\mathbf{M}_f \mathbf{C}_{sf} - \mathbf{M}_{sf} \mathbf{C}_f) \dot{\mathbf{u}}_2^p + \right. \\ & (\mathbf{M}_f \mathbf{K}_s - \mathbf{M}_{sf} \mathbf{K}_{fs}) \mathbf{u}_1^p + (\mathbf{M}_f \mathbf{K}_{sf} - \mathbf{M}_{sf} \mathbf{K}_f) \mathbf{u}_2^p - \\ & \left. \mathbf{M}_f \mathbf{F}_1^p + \mathbf{M}_{sf} \mathbf{F}_2^p \right] \end{aligned} \quad (28a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2^{p+1} = & \mathbf{u}_2^p + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_2^p - \frac{\Delta t^2}{2} (\mathbf{M}_s \mathbf{M}_f - \mathbf{M}_{fs} \mathbf{M}_{sf})^{-1} \cdot \\ & \left[ (\mathbf{M}_s \mathbf{C}_{fs} - \mathbf{M}_{fs} \mathbf{C}'_s) \dot{\mathbf{u}}_1^p + (\mathbf{M}_s \mathbf{C}_f - \mathbf{M}_{fs} \mathbf{C}_{sf}) \dot{\mathbf{u}}_2^p + \right. \\ & (\mathbf{M}_s \mathbf{K}_{fs} - \mathbf{M}_{fs} \mathbf{K}_s) \mathbf{u}_1^p + (\mathbf{M}_s \mathbf{K}_f - \mathbf{M}_{fs} \mathbf{K}_{sf}) \mathbf{u}_2^p - \\ & \left. \mathbf{M}_s \mathbf{F}_2^p + \mathbf{M}_{fs} \mathbf{F}_1^p \right] \end{aligned} \quad (28b)$$

用前一时刻的位移和速度以及当前时刻的位移表示的当前时刻的速度

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_1^{p+1} = & \dot{\mathbf{u}}_1^p - (\mathbf{M}_f \mathbf{M}_s - \mathbf{M}_{sf} \mathbf{M}_{fs})^{-1} \cdot \\ & \left\{ (\mathbf{M}_f \mathbf{C}'_s - \mathbf{M}_{sf} \mathbf{C}_{fs}) (\mathbf{u}_1^{p+1} - \mathbf{u}_1^p) + \mathbf{M}_f \mathbf{C}_{sf} (\mathbf{u}_2^{p+1} - \mathbf{u}_2^p) - \right. \\ & \mathbf{M}_{sf} \mathbf{C}_f (\mathbf{u}_2^{p+1} - \mathbf{u}_2^p) + \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{M}_f \mathbf{K}_s - \mathbf{M}_{sf} \mathbf{K}_{fs}) (\mathbf{u}_1^{p+1} + \mathbf{u}_1^p) + \\ & \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{M}_f \mathbf{K}_{sf} - \mathbf{M}_{sf} \mathbf{K}_f) (\mathbf{u}_2^{p+1} + \mathbf{u}_2^p) - \\ & \left. \frac{\Delta t}{2} [\mathbf{M}_f (\mathbf{F}_1^{p+1} + \mathbf{F}_1^p) - \mathbf{M}_{sf} (\mathbf{F}_2^{p+1} + \mathbf{F}_2^p)] \right\} \end{aligned} \quad (29a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_2^{p+1} = & \dot{\mathbf{u}}_2^p - (\mathbf{M}_s \mathbf{M}_f - \mathbf{M}_{fs} \mathbf{M}_{sf})^{-1} \cdot \\ & \left\{ (\mathbf{M}_s \mathbf{C}_{fs} - \mathbf{M}_{fs} \mathbf{C}'_s) (\mathbf{u}_1^{p+1} - \mathbf{u}_1^p) + \mathbf{M}_s \mathbf{C}_f (\mathbf{u}_2^{p+1} - \mathbf{u}_2^p) - \right. \\ & \mathbf{M}_{fs} \mathbf{C}_{sf} (\mathbf{u}_2^{p+1} - \mathbf{u}_2^p) + \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{M}_s \mathbf{K}_{fs} - \mathbf{M}_{fs} \mathbf{K}_s) (\mathbf{u}_1^{p+1} + \mathbf{u}_1^p) + \\ & \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{M}_s \mathbf{K}_f - \mathbf{M}_{fs} \mathbf{K}_{sf}) (\mathbf{u}_2^{p+1} + \mathbf{u}_2^p) - \\ & \left. \frac{\Delta t}{2} [\mathbf{M}_s (\mathbf{F}_2^{p+1} + \mathbf{F}_2^p) - \mathbf{M}_{fs} (\mathbf{F}_1^{p+1} + \mathbf{F}_1^p)] \right\} \end{aligned} \quad (29b)$$

由前一时刻的速度和加速度以及当前时刻的速度表示的此时刻的加速度

$$\ddot{\mathbf{u}}_1^{p+1} = -\ddot{\mathbf{u}}_1^p + \frac{2}{\Delta t} (\dot{\mathbf{u}}_1^{p+1} - \dot{\mathbf{u}}_1^p) \quad (30a)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_2^{p+1} = -\ddot{\mathbf{u}}_2^p + \frac{2}{\Delta t} (\dot{\mathbf{u}}_2^{p+1} - \dot{\mathbf{u}}_2^p) \quad (30b)$$



对于应力, 按照传统有限元法, 单元为常应力单元. 为了提高应力结果的精度, 可以采用如下两种方法计算. 其一, 采用单元离散方程 (21) 求解; 其二, 由式 (12) 求解, 具体表达式如下

$$\sigma_{zz}^s = -\frac{1}{c_x} A \dot{u}_x^s + (A + 2N) \frac{\partial u_z^s}{\partial z} - \frac{1}{c_x} Q \dot{u}_x^f + Q \frac{\partial u_z^f}{\partial z} \quad (31a)$$

$$\sigma^f = -\frac{1}{c_x} Q \dot{u}_x^s + Q \frac{\partial u_z^s}{\partial z} - \frac{1}{c_x} R \dot{u}_x^f + R \frac{\partial u_z^f}{\partial z} \quad (31b)$$

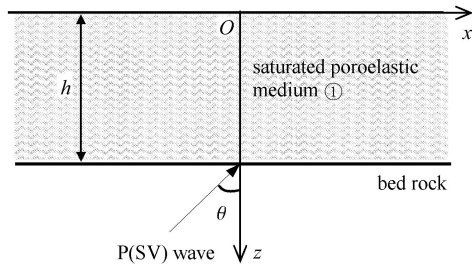
$$\sigma_{xz}^s = N \left( \frac{\partial u_x^s}{\partial z} - \frac{1}{c_x} \dot{u}_z^s \right) \quad (31c)$$

对于  $\sigma_{xx}^s$  可以根据本构关系联立式 (31) 求得

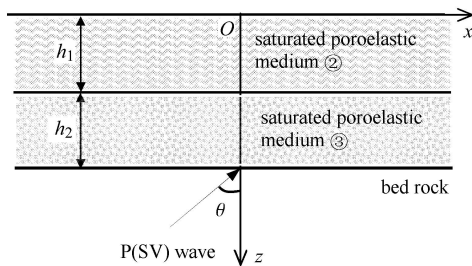
$$\sigma_{xx}^s = \frac{AR - Q^2}{(A + 2N)R - Q^2} \sigma_{zz}^s + \frac{2NQ}{(A + 2N)R - Q^2} \sigma^f + \frac{4N [Q^2 - (A + N)R]}{c_x [(A + 2N)R - Q^2]} \dot{u}_x^s \quad (32)$$

### 5 验证

为验证本文方法, 采用如图 3 所示的 2 个不同场地模型计算, 将计算结果与传递矩阵法结合傅里叶变换的计算结果进行对比. 其中图 3(a) 为基岩上覆单一饱和和多孔介质层, 图 3(b) 为基岩上覆两层不



(a) 基岩上覆单一饱和和多孔介质层  
(a) A single layer of saturated poroelastic medium



(b) 基岩上覆两层饱和和多孔介质层  
(b) Two layers of saturated poroelastic medium

图 3 饱和和多孔介质覆盖层场地简化模型

Fig. 3 The simplified model of saturated soil overburden site

同饱和和多孔介质层. 基岩层和饱和介质层参数如表 1 和表 2 所示. 考虑基岩与饱和介质层交界面为透水边界.

表 1 基岩的材料参数

Table 1 Material parameters of bedrock

Parameters	Value	Units
$\rho^j$	2 385	kg/m <sup>3</sup>
$\lambda^j$	15.6	GPa
$\mu^j$	15.6	GPa

表 2 饱和多孔介质层的材料参数

Table 2 Material parameters of saturated poroelastic medium

Parameters	Layer ①	Layer ②	Layer ③	Units
$\rho_s$	2 650	2 700	2 700	kg/m <sup>3</sup>
$\rho_f$	1 000	1 000	1 000	kg/m <sup>3</sup>
$\rho_a$	0	0	0	kg/m <sup>3</sup>
$\lambda$	15.6×10 <sup>3</sup>	22.0	26.2	MPa
$\mu$	15.6×10 <sup>3</sup>	22.0	26.2	MPa
$\eta$	1.0×10 <sup>-3</sup>	1.0×10 <sup>-3</sup>	1.0×10 <sup>-3</sup>	Pa·s
$k_p$	1.0×10 <sup>-10</sup>	1.0×10 <sup>-10</sup>	1.0×10 <sup>-10</sup>	m <sup>2</sup>
$n$	0.1	0.60	0.27	—
$K_s$	36.0	36.0	36.0	GPa
$K_f$	2.0	2.0	2.0	GPa

#### 5.1 地震波输入

入射波的位移时程采用狄拉克函数的有限差分近似, 即

$$u_0(t) = 16A \left[ G(\tau) - 4G\left(\tau - \frac{1}{4}\right) + 6G\left(\tau - \frac{1}{2}\right) - 4G\left(\tau - \frac{3}{4}\right) + G(\tau - 1) \right] \quad (33)$$

其中,  $G(\tau) = \tau^3 H(\tau)$ ,  $\tau = \frac{t}{T}$ ,  $T$  为单位脉冲的作用时间,  $A$  为单位脉冲峰值,  $H(\tau)$  为 Heaviside 函数. 计算中取  $T = 0.5$  s,  $A = 1$  m, 对应的位移时程曲线如图 4 所示.

#### 5.2 基岩上覆单一饱和和多孔介质层

在图 3(a) 所示的模型中, 取饱和和多孔介质覆盖层厚度  $h = 100$  m, 饱和和多孔介质取表 2 中第 ① 组参数, 网格厚度取 1 m, 时间步长取  $10^{-4}$  s. 图 5 和图 6 分别给出采用本文方法得到的 P 波 60° 入射和 SV

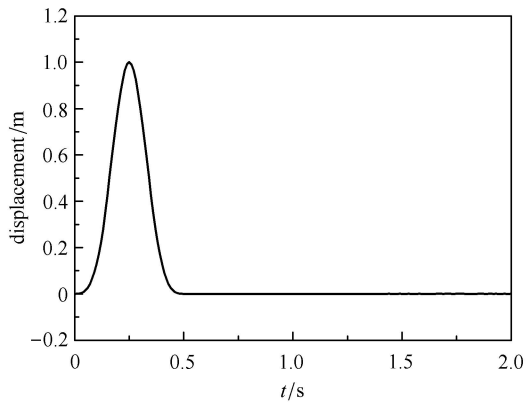


图 4 入射波位移时程

Fig. 4 Time history of incident wave displacement

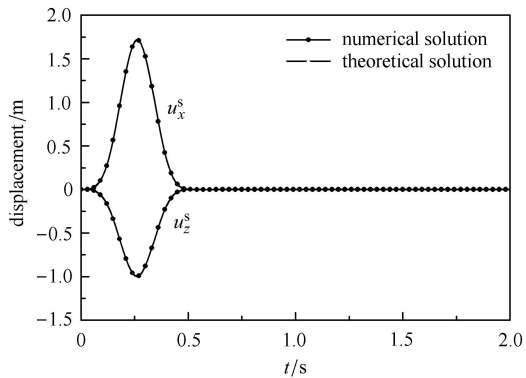


图 5 模型一 P 波 60° 入射时半空间表面 O 点固相位移时程  
Fig. 5 Time history of solid phase displacement for point O on the half-space surface excited by P waves with incident angle 60°

for model one

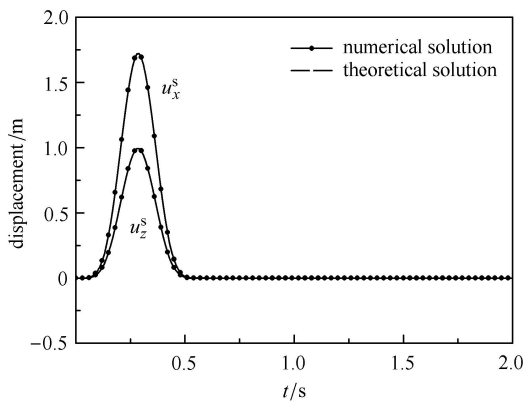


图 6 模型一 SV 波 30° 入射时半空间表面 O 点固相位移时程  
Fig. 6 Time history of solid phase displacement for point O on the half-space surface excited by SV waves with incident angle 30°

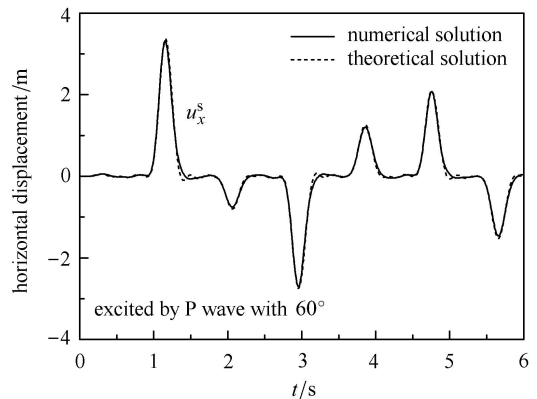
for model one

波 30° 入射时半空间表面 O 点的固体骨架位移时程. 由于本算例中所取饱和多孔介质参数特殊, 孔隙率较小, 固体骨架刚度与基岩刚度相同, 且大于孔隙

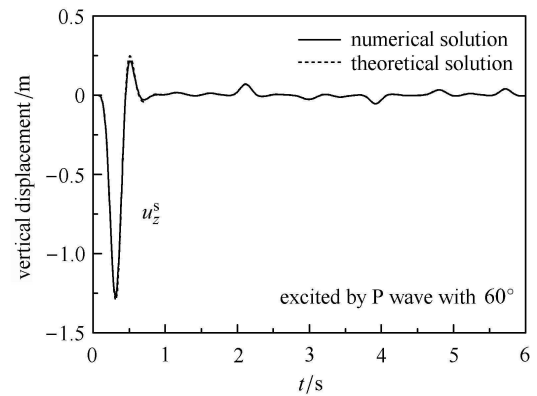
流体体积模量, 因此此时的饱和和多孔介质可以看作和基岩材料相近的单相介质 [27], 基岩上覆单一饱和和多孔介质层模型相应地也可以看成是均匀半空间场地, 图中的精确解是根据波传播理论得到的半空间场地地表位移的解析解 [28-29]. 从图中可以看出, 本文方法的计算结果与解析解完全吻合. 一方面说明本文方法在模拟基岩上覆单一饱和和多孔介质层场地时的有效性和精度, 另一方面也再次证明, 当孔隙率较小, 固体骨架刚度大于孔隙流体体积模量时, 饱和和多孔介质可以作为单相介质处理.

### 5.3 基岩上覆两层不同饱和多孔介质层

计算模型如图 3(b) 所示, 两层不同饱和介质层的参数分别取表 2 中第②、③组参数, 两层饱和介质层厚度  $h_1 = h_2 = 50 \text{ m}$ , 网格厚度取  $1 \text{ m}$ , 时间步长取  $10^{-4} \text{ s}$ . 图 7 给出了 P 波 60° 入射时半空间表面 O 点固体骨架的水平和竖向位移. 图 8 为 SV 波 30° 入射



(a)



(b)

图 7 模型二 P 波 60° 入射时半空间表面 O 点固相位移时程  
Fig. 7 Time history of solid phase displacement for point O on the half-space surface excited by P waves with incident angle 60°

for model two

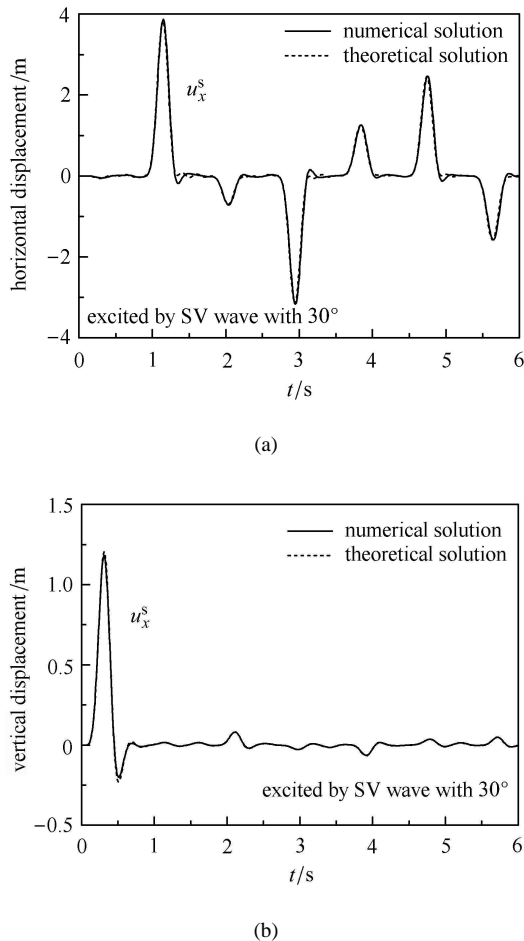


图 8 模型二 SV 波  $30^\circ$  入射时半空间表面  $O$  点固相位移时程  
Fig. 8 Time history of solid phase displacement for point  $O$  on the half-space surface excited by SV waves with incident angle  $30^\circ$  for model two

时  $O$  点固体骨架的水平和竖向位移. 图中精确解是根据文献 [30] 建立的入射平面谐波在基岩上覆成层饱和和多孔地基中传播的解析解答, 结合快速傅里叶变换得到的结果. 从图中可以看出, 本文方法得到的数值解与精确解吻合较好, 说明本文方法在处理成层饱和和多孔介质波动问题时同样具有良好的精度.

## 6 结语

本文以 Biot 流体饱和介质动力方程为基础, 根据 Snell 定律, 并结合不同介质交界面的边界条件以及单相弹性介质精确人工边界条件, 建立了一种求解地震波斜入射下基岩上覆饱和和多孔介质成层场地自由场分析的一维化时域计算方法. 该方法可以方便地求出平面波斜入射下饱和和多孔介质成层场地任意时刻的自由场, 解决了饱和和多孔介质成层场地地震波输入问题. 在典型场地模型下, 通过与已有解析

解的对比, 表明本文方法有效, 且具有良好的精度.

## 参 考 文 献

- Jin X, Liao ZP. Statistical research on S-wave incident angle. *Earthquake Research in China*, 1994, 8(1): 121-131
- Takahiro S, Takeshi U, Ryoichi T, et al. Estimation of earthquake motion incident angle at rock site. Proc of 12th World Conference Earthquake Engineering, NZ National Society for Earthquake Engineering. Auckland, New Zealand, 2000: 956
- Wolf JP, Oberhuber P. Effects of horizontally traveling waves in soil-structure interaction. *Nuclear Engineering and Design*, 1979, 57(2): 221-244
- 李山有, 廖振鹏, 周正华. 大型结构地震反应数值模拟中的波动输入. 地震工程与工程振动, 2001, 6(2): 1-5 (Li Shanyou, Liao Zhenpeng, Zhou Zhenghua. Wave motion input in numerical simulation of seismic response for large-scale structure. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 2001, 6(2): 1-5 (in Chinese))
- 林皋. 地下结构地震响应的计算模型. 力学学报, 2017, 49(3): 528-542 (Lin Gao. A computational model for seismic response analysis of underground structures. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, 49(3): 528-542 (in Chinese))
- 章小龙, 李小军, 陈国兴等. 黏弹性人工边界等效荷载计算的改进方法. 力学学报, 2016, 48(5): 1126-1135 (Zhang Xiaolong, Li Xiaojun, Chen Guoxing, Zhou Zhenghua. An improved method of the calculation of equivalent nodal forces in viscous-elastic artificial boundary. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2016, 48(5): 1126-1135 (in Chinese))
- Thomson WT. Transmission of elastic waves through a stratified solid medium. *Journal of Applied Physics*, 1950, 21(1): 89-93
- Kausel E, Roësset JM. Stiffness matrices for layered soils. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1981, 71(6): 1743-1761
- 尤红兵, 赵凤新, 荣棉水. 地震波斜入射时水平层状场地的非线性地震反应. 岩土工程学报, 2009, 31(2): 234-240 (You Hongbing, Zhao Fengxin, Rong Mianshui. Nonlinear seismic response of horizontal layered site due to inclined wave. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2009, 31(2): 234-240 (in Chinese))
- 王笃国, 赵成刚. 地震波斜入射时二维成层介质自由场求解的等效线性化方法. 岩土工程学报, 2016, 38(3): 554-561 (Wang Duguo, Zhao Chenggang. Two-dimensional equivalent linear seismic analysis of free field in layered half-space due to oblique incidence. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2016, 38(3): 554-561 (in Chinese))
- 廖河山, 陈清军. SH 波倾斜入射时土层的非线性响应分析. 同济大学学报 (自然科学版), 1994, 22(4): 517-522 (Liao Heshan, Chen Qingjun. Nonlinear responses of layered soils to obliquely incident SH waves. *Journal of Tongji University (Natural Science)*, 1994, 22(4): 517-522 (in Chinese))
- 李山有, 王学良, 周正华. 地震波斜入射情形下水平成层半空间自由场的时域计算. 吉林大学学报 (地球科学版), 2003, 33(3): 372-375 (Li Shanyou, Wang Xueliang, Zhou Zhenghua. The time-step numerical simulation of free field motion of layered half-space for inclined seismic waves. *Journal of Jilin University (Earth Science Edition)*, 2003, 33(3): 372-375 (in Chinese))

- 13 刘晶波, 王艳. 成层半空间出平面自由波场的一维化时域算法. 力学学报, 2006, 38(2): 219-225 (Liu Jingbo, Wang Yan. A 1-D time-domain method for 2-D wave motion in elastic layered half-space by antiplane wave oblique incidence. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2006, 38(2): 219-225 (in Chinese))
- 14 刘晶波, 王艳. 成层介质中平面内自由波场的一维化时域算法. 工程力学, 2007, 24(7): 16-22 (Liu Jingbo, Wang Yan. 1D time-domain method for in-plane wave motion of free field in layered media. *Engineering Mechanics*, 2007, 24(7): 16-22 (in Chinese))
- 15 Liu Jingbo, Wang Yan. A 1D time-domain method for in-plane wave motions in a layered half-space. *Acta Mechanica Sinica*, 2007, 23(6): 673-680
- 16 赵密, 杜修力, 刘晶波等. P-SV 波斜入射时成层半空间自由场的时域算法. 地震工程学报, 2013, 35(1): 84-90 (Zhao Mi, Du Xiuli, Liu Jingbo, et al. Time-domain method for free field in layered half space under P-SV Waves of oblique incidence. *China Earthquake Engineering Journal*, 2013, 35(1): 84-90 (in Chinese))
- 17 卓卫东, 高智能, 谷音. P-SV 波斜入射时有阻尼成层介质自由波场的一维化时域算法. 水利与建筑工程学报, 2016, 14(6): 18-24, 34 (Zhuo Weidong, Gao Zhineng, Gu Yin. A 1D time-domain method for in-plane wave motion of free field in layered media with damping under obliquely incident P-SV waves. *Journal of Water Resources and Architectural Engineering*, 2016, 14(6): 18-24, 34 (in Chinese))
- 18 Zhao M, Yin HQ, Du XL, et al. 1D finite element artificial boundary method for layered half space site response from obliquely incident earthquake. *Earthquakes and Structures*, 2015, 9(1): 173-194
- 19 Biot MA. Theory of propagation of elastic wave in fluid-saturated porous soil. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1956, 28(2): 168-178
- 20 Schanz M. Poroelastodynamics: linear models, analytical solutions, and numerical methods. *Applied Mechanics Reviews*, 2009, 62(3): 030803-1-15
- 21 王子辉. 饱和两相与单相土互层场地中地铁车站地震反应分析. [博士论文]. 北京: 北京交通大学, 2008 (Wang Zihui. Seismic response analysis of subway station in saturated phase and single phase soil. [PhD Thesis]. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2008 (in Chinese))
- 22 赵成刚, 王进廷, 史培新等. 流体饱和两相多孔介质动力反应分析的显式有限元法. 岩土工程学报, 2001, 23(2): 178-182 (Zhao Chenggang, Wang Jinting, Shi Peixin, et al. Dynamic analysis of fluid-saturated porous media by using explicit finite element method. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2001, 23(2): 178-182 (in Chinese))
- 23 Biot MA, Willis DG. The elastic coefficients of the theory of consolidation. *Journal of Applied Mechanics*, 1957, 15(2): 594-601
- 24 周正华, 周扣华. 有阻尼振动方程常用显式积分格式稳定性分析. 地震工程与工程振动, 2001, 21(3): 22-28 (Zhou Zhenghua, Zhou Kouhua. Stability analysis of an integral method for damped vibration equation. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 2001, 21(3): 22-28 (in Chinese))
- 25 王进廷, 张楚汉, 金峰. 有阻尼动力方程显式积分方法的精度研究. 工程力学, 2006, 23(3): 1-5 (Wang Jinting, Zhang Chuhan, Jin Feng. On the accuracy of several explicit integration schemes for dy-

amic equation with damping. *Engineering Mechanics*, 2006, 23(3): 1-5 (in Chinese))

- 26 李亮, 杜修力, 李立云等. 两相介质波动问题显式有限元方法稳定性研究. 西北地震学报, 2011, 33(3): 218-222, 227 (Li Liang, Du Xiuli, Li Liyun, et al. Study on stability of explicit finite element method for wave motion of fluid-saturated porous media. *Northwestern Seismological Journal*, 2011, 33(3): 218-222, 227 (in Chinese))
- 27 Lin CH, Lee VW, Trifunac MD. The reflection of plane waves in a poroelastic half-space saturated with inviscid fluid. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2005, 25(13): 205-223
- 28 傅淑芳, 刘宝诚. 地震学教程. 北京: 地震出版社, 1991: 73-84 (Fu Shufang, Liu Baocheng. *Seismology Tutorial*. Beijing: Seismic Press, 1991: 73-84 (in Chinese))
- 29 王艳. 非一致地震动场数值方法研究及在结构动力分析中的应用. [博士论文]. 北京: 清华大学, 2007 (Wang Yan. Research on the numerical method for asynchronous seismic wave motions and its application in dynamic analysis of astructures. [PhD Thesis]. Beijing: Tsinghua University, 2007 (in Chinese))
- 30 李伟华, 赵成刚. 地下水位变化对地震地面运动的影响. 地震学报, 2015, 37(3): 482-492 (Li Weihua, Zhao Chenggang. Effects of the groundwater level variation on earthquake ground motions. *Acta Seismologica Sinica*, 2015, 37(3): 482-492 (in Chinese))

#### 附录:

式 (16) 中单元集中质量矩阵  $\mathbf{M}_s^e$ ,  $\mathbf{M}_{sf}^e$ ,  $\mathbf{M}_f^e$ ,  $\mathbf{M}_{fs}^e$  为, 单元阻尼矩阵  $\mathbf{C}_s^e$ ,  $\mathbf{C}_{sf}^e$ ,  $\mathbf{C}_f^e$ ,  $\mathbf{C}_{fs}^e$ , 以及单元刚度矩阵  $\mathbf{K}_s^e$ ,  $\mathbf{K}_{sf}^e$ ,  $\mathbf{K}_f^e$ ,  $\mathbf{K}_{fs}^e$  的表达式如下:

$$\mathbf{M}_s^e = \frac{\Delta z}{2} \begin{bmatrix} \frac{A+2N}{c_x^2} - \rho_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N}{c_x^2} - \rho_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A+2N}{c_x^2} - \rho_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{N}{c_x^2} - \rho_{11} \end{bmatrix} \quad (\text{A1})$$

$$\mathbf{M}_{sf}^e = \mathbf{M}_{fs}^e = \frac{\Delta z}{2} \begin{bmatrix} \frac{Q}{c_x^2} - \rho_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Q}{c_x^2} - \rho_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{A2})$$

$$\mathbf{M}_f^e = \frac{\Delta z}{2} \begin{bmatrix} \frac{R}{c_x^2} - \rho_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R}{c_x^2} - \rho_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{A3})$$

$$\mathbf{C}_s^e = \begin{bmatrix} -\frac{b\Delta z}{3} & \frac{A-N}{2c_x} & \frac{b\Delta z}{6} & -\frac{A+N}{2c_x} \\ -\frac{A-N}{2c_x} & -\frac{b\Delta z}{3} & -\frac{A+N}{2c_x} & -\frac{b\Delta z}{6} \\ \frac{b\Delta z}{6} & \frac{A+N}{2c_x} & -\frac{b\Delta z}{3} & -\frac{A-N}{2c_x} \\ \frac{A+N}{2c_x} & -\frac{b\Delta z}{6} & \frac{A-N}{2c_x} & -\frac{b\Delta z}{3} \end{bmatrix}$$

(A4)

$$\mathbf{K}_s^e = \frac{1}{\Delta z} \begin{bmatrix} -N & 0 & N & 0 \\ 0 & -(A+2N) & 0 & A+2N \\ N & 0 & -N & 0 \\ 0 & A+2N & 0 & -(A+2N) \end{bmatrix}$$

(A7)

$$\mathbf{C}_{sf}^e = \mathbf{C}_{fs}^e = \begin{bmatrix} \frac{b\Delta z}{3} & \frac{Q}{2c_x} & \frac{b\Delta z}{6} & -\frac{Q}{2c_x} \\ -\frac{Q}{2c_x} & \frac{b\Delta z}{3} & -\frac{Q}{2c_x} & \frac{b\Delta z}{6} \\ \frac{b\Delta z}{6} & \frac{Q}{2c_x} & \frac{b\Delta z}{3} & -\frac{Q}{2c_x} \\ \frac{Q}{2c_x} & \frac{b\Delta z}{6} & -\frac{Q}{2c_x} & \frac{b\Delta z}{3} \end{bmatrix}$$

(A5)

$$\mathbf{K}_{sf}^e = \mathbf{K}_{fs}^e = \frac{1}{\Delta z} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Q & 0 & Q \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 & -Q \end{bmatrix}$$

(A8)

$$\mathbf{C}_f^e = \begin{bmatrix} -\frac{b\Delta z}{3} & \frac{R}{2c_x} & -\frac{b\Delta z}{6} & -\frac{R}{2c_x} \\ \frac{R}{2c_x} & -\frac{b\Delta z}{3} & \frac{R}{2c_x} & -\frac{b\Delta z}{6} \\ \frac{b\Delta z}{6} & \frac{R}{2c_x} & -\frac{b\Delta z}{3} & \frac{R}{2c_x} \\ \frac{R}{2c_x} & -\frac{b\Delta z}{6} & \frac{R}{2c_x} & -\frac{b\Delta z}{3} \end{bmatrix}$$

(A6)

$$\mathbf{K}_f^e = \frac{1}{\Delta z} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R & 0 & R \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & -R \end{bmatrix}$$

(A9)