

# 浮放物体平面多刚体动力学建模与算法研究<sup>1)</sup>

张润森 王 琪<sup>2)</sup>

(北京航空航天大学航空科学与工程学院, 北京 100191)

**摘要** 采用非光滑多体系统动力学的方法研究浮放物体与基础平台组成的多体系统, 建立其非光滑接触的动力学方程与数值算法. 浮放物体由主体部分和支撑腿组成, 其间通过含黏弹性阻力偶的转动铰连接. 支撑腿与基础平台间的接触力简化为接触点的法向接触力和摩擦力, 采用扩展的赫兹接触力模型描述接触点的法向接触力, 采用库伦干摩擦模型描述其摩擦力. 采用笛卡尔坐标系下的位形坐标作为系统的广义坐标. 首先, 将基础平台运动看作非定常约束, 用第一类拉格朗日方程建立系统的动力学方程, 并采用鲍姆加藤约束稳定化的方法解决违约问题. 随后给出基于事件驱动法和线性互补方法的数值算法. 当相对切向速度为零时, 构造静滑动摩擦力的正负余量和正、负向加速度的互补关系, 从而将接触点黏滞-滑移切换的判断以及静滑动摩擦力的计算转化为线性互补问题进行求解, 并采用 Lemke 算法求解线性互补问题. 最后, 通过数值仿真选择合适的步长; 通过仿真结果说明浮放物体运动中存在的黏滞-滑移切换现象以及基础平台运动、质心位置对浮放物体运动的影响.

**关键词** 浮放物体, 非光滑, 库伦干摩擦, 线性互补, 接触力

中图分类号: O313.3 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-17-235

## RESEARCH ON MODELING AND NUMERICAL METHOD OF FREE STANDING BODY ON PLANAR RIGID MULTIBODY DYNAMICS<sup>1)</sup>

Zhang Runsen Wang Qi<sup>2)</sup>

(School of Aeronautic Science and Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

**Abstract** A multibody system composed of free standing body and the basic platform is investigated by non-smooth dynamics of multibody system. Dynamic equations and numerical method of the system with non-smooth contacts are proposed. The free standing body consists of main body and supporting legs, which are connected by revolute joints with viscoelastic moments. The contact forces between free standing body and the basic platform are simplified as normal forces and frictional forces of contact points. Moreover, the modified Hertz contact model and Coulomb's law for dry friction are employed to describe normal forces and frictional forces, respectively. And the configuration coordinates of Cartesian coordinate system are used as the generalized coordinates. Firstly, the system's dynamic equations are established by Lagrange's equations of the first kind and the motion of basic platform is regarded as a rheonomous constraint. The problem of constraints violations is solved by Baumgarte stabilization method. Secondly, the numerical method of the multibody system are proposed, which is based on the event-driven schemes and linear complementarity formulations. The complementary formulations of friction saturations and the relative accelerations in the tangential are given, while the relative velocities in the tangential of the contact points are equal to zero. Therefore the judgements

2017-06-25 收稿, 2017-09-29 录用, 2017-09-29 网络版发表.

1) 国家自然科学基金资助项目 (11372018, 11772021).

2) 王琪, 教授, 主要研究方向: 多体系统动力学与控制. E-mail: bhwangqi@sina.com

**引用格式:** 张润森, 王琪. 浮放物体平面多刚体动力学建模与算法研究. 力学学报, 2017, 49(6): 1370-1379

Zhang Runsen, Wang Qi. Research on modeling and numerical method of free standing body on planar rigid multibody dynamics. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, 49(6): 1370-1379

of stick-slip transitions for contact points and the solutions of frictional forces in stick situation could be solved as a linear complementarity problem. And the linear complementarity problem is solved by Lemke's algorithm. Finally, an appropriate step is chosen by the simulation. Then the numerical simulations denote the stick-slip phenomenon and the influence of basic platform as well as mass centre's position.

**Key words** free standing body, non-smooth, Coulomb dry friction, linear complementarity problem, contact force

## 引言

海上回收的火箭(如图 1 所示)、文物、家具、仪器设备等以浮放方式放置于基础平台上的物体统称为浮放物体,其受到基础平台运动的影响而产生滑移、摇晃、倾覆、甚至坠落等现象而受到损坏。为此,国内外学者对浮放物体的动力学特性展开了大量研究。



图 1 猎鹰 9 号火箭

Fig. 1 Rocket Falcon IX

Housner<sup>[1]</sup>将浮放物体简化为为对称均质的块状刚体,假设浮放物体与基础平台之间为点接触且无相对滑动,采用经典碰撞理论(冲量与动量方法)建立了浮放物体的动力学方程,并分析了浮放物体倾覆时的最小脉冲加速度。

学者们在 Housner 模型的基础上对浮放物体的摇晃运动进行了大量理论和实验的研究,并取得了阶段性的成果<sup>[2-4]</sup>。Zhang 等<sup>[5]</sup>对基础平台不同运动规律下浮放物体的摇晃运动进行了研究,得到了浮放物体不同的倾覆方式;Shi 等<sup>[6]</sup>对非对称浮放物体的摇晃运动进行了数值模拟,研究了其动力学行为。Shenton 等<sup>[7-8]</sup>指出基础平台激励下浮放物体存在着摇晃、滑移、摇晃-滑移、相对基础平台静止等运动形式,并推导了浮放物体摇晃、滑移、摇晃-滑移 3

种运动形式下的动力学方程,指出了考虑浮放物体与基础平台之间相对滑移的重要性。周乾<sup>[7]</sup>, Roussis 等<sup>[8]</sup>, Taniguchi 等<sup>[9]</sup>, Contento 等<sup>[10]</sup>, Pompei 等<sup>[11]</sup>在 Shenton 研究的基础上展开了进一步的研究。研究了考虑浮放物体与基础平台间的相对运动时,基础平台不同运动形式下浮放物体的动力学行为。这些研究基于 Housner 关于碰撞的假设,碰撞在瞬间完成,且为完全塑性碰撞。

不同于 Housner 模型,一些文献考虑了浮放物体和基础平台的变形,采用离散单元方法(distinct/discrete element method)研究了浮放物体的动力学行为<sup>[12-13]</sup>。当浮放物体与基础平台发生接触时,该方法将法向接触力和切向接触力表示为接触点相对位移和相对速度的函数,然后将法向接触力和切向接触力代入动力学方程进行求解。

在某些情况下,浮放物体和基础平台可以视为一个多体系统<sup>[14]</sup>。然而与行进的被动行走器<sup>[15]</sup>、考虑间隙的非理想铰<sup>[16-17]</sup>、行驶的车辆<sup>[18]</sup>、着陆的飞机<sup>[19]</sup>等非光滑多体系统相同,浮放物体和基础平台之间存在的含摩擦接触问题给动力学方程的求解带来了困难。Zhang 等<sup>[20]</sup>和 Yilmaz 等<sup>[21]</sup>分别将非光滑多体系统动力学的方法应用于浮放物体的研究中,研究了浮放物体摇晃运动时的动力学行为,但均未考虑浮放物体相对于基础平台的滑移运动。Zhuang 等<sup>[17]</sup>, Pfeiffer 等<sup>[22]</sup>将相对切向速度为零时接触点黏滞-滑移的判断以及静摩擦力的求解等非光滑问题转化为线性互补问题进行求解,与试算法相比减少了对非光滑事件的判断,更易于编程计算,为浮放物体和基础平台组成的多体系统求解提供了思路。

本文采用非光滑多体系统动力学理论,研究了含支撑腿浮放物体与基础平台组成的平面多刚体系统,建立了其动力学方程与数值算法。通过数值仿真,揭示了接触点摩擦状态黏滞-滑移的切换现象,说明了基础平台运动规律、质心的偏移等对浮放物体运动的影响。不同于 Housner 采用的完全塑性碰撞假设或离散单元法,本文将考虑浮放物体和基础平

台间接触部位的局部变形,用扩展的赫兹接触力模型描述接触点的法向接触力<sup>[23]</sup>,用库伦干摩擦模型描述摩擦力.采用第一类拉格朗日方程建立系统的动力学方程,并用鲍姆加藤违约修正方法改善数值仿真过程中的违约问题<sup>[24]</sup>.利用事件驱动算法和文献[16-17]的思路,将接触点黏滞-滑移状态的判断转化为线性互补问题进行求解.但不同于文献[16-17]中的方法,本文方法不需要将法向接触力的计算转化为线性互补问题,从而降低了线性互补问题的互补维数,提高了线性互补问题的计算效率.最后选择合适的步长进行数值仿真,通过算例反映了浮放物体运动过程中的黏滞-滑移现象以及基础平台运动规律、质心的偏移对浮放物体运动的影响,定性说明了方法的正确性.

### 1 系统的描述及接触力模型

#### 1.1 动力学模型

将含支撑腿的浮放物体简化为由主体部分、支撑腿构成,并与基础平台组成平面多体系统,其模型如图2所示.将支撑腿与主体的连接简化为含有黏弹性阻力偶的转动铰A和B,其等效扭转刚度系数为k,等效扭转阻尼系数为c.考虑基础平台的平移运动,其转动也可以按照本文给出的方法进行研究.浮放物体主体部分为非均质刚体,质心位置如图2中C<sub>1</sub>所示.将两条支撑腿为均质细杆,C<sub>2</sub>和C<sub>3</sub>分别表示两条支撑腿的质心.

为叙述方便,用刚体0,1,2,3依次代表基础平台,浮放物体主体部分以及左右两条支撑腿.刚体1质心C<sub>1</sub>到铰链A和B的距离分别记作r<sub>1</sub>和r<sub>2</sub>.刚体2和刚体3具有相同的长度2l<sub>0</sub>,则质心C<sub>2</sub>和C<sub>3</sub>

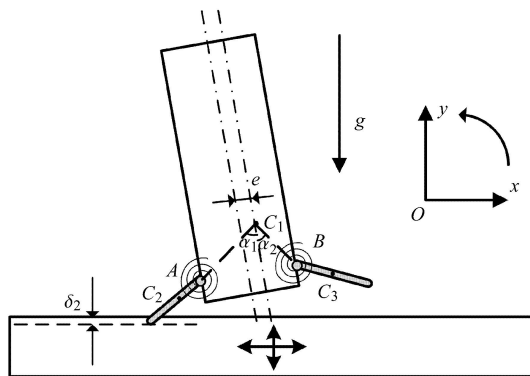


图2 浮放物的多体模型

Fig. 2 Model of multi-body system of free-standing body

到铰链的距离为l<sub>0</sub>.令2b<sub>0</sub> = r<sub>1</sub> sin α<sub>1</sub> + r<sub>2</sub> sin α<sub>2</sub>, h<sub>0</sub> = r<sub>2</sub> cos α<sub>2</sub> = r<sub>1</sub> cos α<sub>1</sub>, e = r<sub>1</sub> sin α<sub>1</sub> - b<sub>0</sub>,则e为刚体1质心相对于几何对称轴的偏移量.用m<sub>i</sub> (i = 1, 2, 3)表示刚体i的质量, J<sub>i</sub> (i = 1, 2, 3)表示刚体i相对质心C<sub>i</sub>的转动惯量. g为重力加速度.

建立如图2中所示的直角坐标系,其中x轴指向水平向右,y轴指向铅锤向上.用(x<sub>i</sub>, y<sub>i</sub>) (i = 0, 1, 2, 3)表示刚体i的质心坐标.用θ<sub>i</sub> (i = 1, 2, 3)表示刚体i的转角,以逆时针方向为正.则该系统的广义坐标可表示为

$$q = [x_0 \ y_0 \ x_1 \ y_1 \ \theta_1 \ \cdots \ x_3 \ y_3 \ \theta_3]^T \quad (1)$$

#### 1.2 法向接触力模型

不同于Housner所采用的经典碰撞理论,扩展的赫兹接触力模型可以更好地反映碰撞过程中法向接触力的大小及其变化规律<sup>[23]</sup>.当物体发生接触时,将碰撞力表示为嵌入量和嵌入速度的非线性函数<sup>[25-27]</sup>,本文采用文献[26]提出的连续碰撞力模型,其表达式为

$$F_{Ni} = \max \{ K_1 \delta_i^n + c_2 \delta_i \dot{\delta}_i, 0 \} \quad (2)$$

其中,F<sub>Ni</sub>表示作用于接触点i的法向接触力.δ<sub>i</sub>和δ̇<sub>i</sub>分别表示接触点i对应的法向嵌入量和嵌入速度.指数n和广义刚度系数K<sub>1</sub>可以通过理论分析得到也可以直接通过实验拟合获得,而广义阻尼系数c<sub>2</sub>与法向嵌入速度无关,往往通过实验拟合得到<sup>[26]</sup>.法向嵌入量δ<sub>i</sub>可表示为系统广义坐标的函数

$$\delta_i = y_0 - y_i + l_0 \cos \theta_i \quad (i = 2, 3) \quad (3)$$

将上式对时间求导可得法向嵌入速度

$$\dot{\delta}_i = \dot{y}_0 - \dot{y}_i - l_0 \sin \theta_i \cdot \dot{\theta}_i \quad (i = 2, 3) \quad (4)$$

#### 1.3 切向接触力模型

学者们根据不同的摩擦现象提出了多种摩擦模型,如库伦干摩擦模型,库伦+黏性摩擦模型,Stribeck摩擦模型.库伦干摩擦模型简洁地反映了摩擦的库伦现象以及黏滞-滑移切换现象,因而本文采用了库伦干摩擦模型<sup>[28]</sup>.库伦干摩擦模型是关于相对切向速度的多值函数,会给数值计算带来一定的困难,因而学者们提出了关于相对切向速度连续的修正的库伦摩擦模型,但是其无法反映相对切向速度为零时的摩擦特性.为了反映摩擦黏滞-滑移切换

现象以及相对切向速度为零时的摩擦特性, 本文将采用库伦干摩擦模型描述切向接触力.

根据库伦干摩擦模型, 刚体  $i$  ( $i = 2, 3$ ) 受到的摩擦力与法向接触力的关系可以表示为

$$F_{fi} = \begin{cases} -\mu_i F_{Ni} \text{sgn}(\dot{g}_{\tau i}), & \dot{g}_{\tau i} \neq 0 \\ -\mu_{0i} F_{Ni} \text{Sgn}(\ddot{g}_{\tau i}), & \dot{g}_{\tau i} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

其中,  $F_{fi}$  和  $F_{Ni}$  ( $i = 2, 3$ ) 分别表示刚体  $i$  与基础平台接触时受到的摩擦力和法向接触力.  $\dot{g}_{\tau i}$  和  $\ddot{g}_{\tau i}$  ( $i = 2, 3$ ) 分别表示接触点  $i$  的相对切向速度和相对切向加速度.  $\mu_i$  和  $\mu_{0i}$  ( $i = 2, 3$ ) 分别表示接触点  $i$  与基础之间的动、静滑动摩擦系数.  $\text{sgn}(\ )$  是符号函数, 其函数表达式如下

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad (6)$$

$\text{Sgn}(\ )$  是集值函数, 其定义如下

$$\text{Sgn}(x) = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ [-1, +1], & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad (7)$$

## 2 系统的动力学方程及其算法

### 2.1 动力学方程

在图 2 所示系统中, 设  $f_i(q) = 0$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 分别为铰链 A 和 B 的约束方程, 其表达式如下

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= x_2 - x_1 + r_1 \sin(\alpha_1 - \theta_1) - l_0 \sin \theta_2 = 0 \\ f_2 &= y_2 - y_1 + r_1 \cos(\alpha_1 - \theta_1) + l_0 \cos \theta_2 = 0 \\ f_3 &= x_3 - x_1 - r_2 \sin(\alpha_2 + \theta_1) - l_0 \sin \theta_3 = 0 \\ f_4 &= y_3 - y_1 + r_2 \cos(\alpha_2 + \theta_1) + l_0 \cos \theta_3 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

将基础平台的水平方向和铅锤方向的平移运动看作非定常约束, 其约束方程可以表示为

$$\left. \begin{aligned} f_5 &= x_0 - X_0 \sin(\omega_x t + \alpha_x) = 0 \\ f_6 &= y_0 - Y_0 \sin(\omega_y t + \alpha_y) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

将约束方程 (8) 和 (9) 用矩阵形式表示为

$$\Phi(q, t) = [f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4 \ f_5 \ f_6]^T = 0 \quad (10)$$

由第一类拉格朗日方程可得系统的动力学方程

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{q} &= Q + \Phi_q^T \lambda + Q^N + Q^f \\ \Phi(q, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

其中,  $M$  为系统的广义质量矩阵;  $\Phi_q^T$  为约束矩阵  $\Phi$  关于  $q$  的雅可比矩阵的转置;  $\lambda$  为对应于约束方程 (10) 的拉格朗日乘子列向量;  $Q^N$  为法向接触力的广义力列向量;  $Q^f$  为摩擦力的广义力列向量;  $Q$  为重力以及铰链 A 和 B 处黏弹性力偶矩对应的广义力列向量, 表达式为

$$Q = [0 \ 0 \ 0 \ -m_1 g \ -\sum(M_{ki} + M_{ci}) \ 0 \ \dots \ M_{k2} + M_{c2} \ 0 \ -m_3 g \ M_{k3} + M_{c3}]^T \quad (12)$$

其中,  $M_{ki} = -k_i(\theta_i - \theta_1 - \theta_{i0})$ ,  $M_{ci} = -c_i(\dot{\theta}_i - \dot{\theta}_1)$  ( $i = 2, 3$ ).

将法向接触力和摩擦力的广义力分别表示为

$$Q^N = W_N F_N \quad (13)$$

$$Q^f = W_T F_f \quad (14)$$

其中,  $W_N$  和  $W_T$  是与广义坐标有关的系数矩阵.  $F_N$  和  $F_f$  分别由基础平台作用于刚体  $i$  ( $i = 2, 3$ ) 的法向接触力  $F_{Ni}$  和摩擦力  $F_{fi}$  组成, 可表示为

$$F_N = [F_{N2} \ F_{N3}]^T \quad (15)$$

$$F_f = [F_{f2} \ F_{f3}]^T \quad (16)$$

将式 (13) 和式 (14) 代入动力学方程中, 可将式 (11) 中的第 1 式改写为

$$M\ddot{q} = Q + \Phi_q^T \lambda + W_N F_N + W_T F_f \quad (17)$$

### 2.2 摩擦力的互补关系

库伦干摩擦模型在零点的不连续性给动力学方程 (17) 的求解带来了困难, 其难点在于接触点摩擦状态黏滞-滑移切换 (非光滑事件) 的判断. 本文借鉴前人的工作, 将非光滑事件的判断转化为线性互补问题进行求解.

当相对切向速度  $\dot{g}_{\tau i} \neq 0$  ( $i = 2$  或  $3$ ) 时, 摩擦力可由式 (5) 中的第 1 式给出.

当  $\dot{g}_{\tau i} = 0$  ( $i = 2$  或  $3$ ) 时, 摩擦力与  $\ddot{g}_{\tau i}$  有关, 需建立相关物理量的互补关系进行求解. 静滑动摩擦力的正向余量和负向余量分别定义为<sup>[28]</sup>

$$\left. \begin{aligned} F_{fi}^+ &= \mu_{0i} F_{Ti} + F_{fi} \\ F_{fi}^- &= \mu_{0i} F_{Ti} - F_{fi} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

接触点相对切向加速度的正向加速度和负向加速度分别定义为<sup>[28]</sup>

$$\left. \begin{aligned} \ddot{g}_{Hi}^+ &= \frac{(|\dot{g}_{\tau il}| + \ddot{g}_{\tau i})}{2} \\ \ddot{g}_{Hi}^- &= \frac{(|\dot{g}_{\tau il}| - \ddot{g}_{\tau i})}{2} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

从而上述物理量的互补关系可以表述为

$$\left. \begin{aligned} F_{fi}^+ \geq 0, \ddot{g}_{Hi}^+ \geq 0, F_{fi}^+ \cdot \ddot{g}_{Hi}^+ &= 0 \\ F_{fi}^- \geq 0, \ddot{g}_{Hi}^- \geq 0, F_{fi}^- \cdot \ddot{g}_{Hi}^- &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

### 2.3 摩擦力的广义力化简

为便于动力学方程的求解,在此将摩擦力的广义力进行化简.由式(14)可得

$$\begin{aligned} Q^f &= W_T F_f = \\ &W_T S \begin{bmatrix} -\mu_{02} \text{Sgn}(\ddot{g}_{\tau 2}) \\ -\mu_{03} \text{Sgn}(\ddot{g}_{\tau 3}) \end{bmatrix} F_{N+} \\ &W_T (E - S) \begin{bmatrix} -\mu_2 \text{sgn}(\dot{g}_{\tau 2}) \\ -\mu_3 \text{sgn}(\dot{g}_{\tau 3}) \end{bmatrix} F_N \end{aligned} \quad (21)$$

其中,  $S = \text{diag}\{1 - |\text{sgn}(\dot{g}_{\tau 2})|, 1 - |\text{sgn}(\dot{g}_{\tau 3})|\}$ ,  $E$  为单位矩阵.式(21)中右端第1项表示静滑动摩擦力的广义力列向量,第2项表示动滑动摩擦力的广义力列向量.将式(5)代入式(18)中可以得到

$$\left. \begin{aligned} F_{fi}^+ &= \mu_{0i} F_{Ni} - \mu_{0i} \text{Sgn}(\ddot{g}_{\tau i}) F_{Ni} \\ F_{fi}^- &= \mu_{0i} F_{Ni} + \mu_{0i} \text{Sgn}(\ddot{g}_{\tau i}) F_{Ni} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

将式(22)代入式(21)可得

$$\begin{aligned} Q^f &= W_T S \begin{bmatrix} F_{f2}^+ - \mu_{02} F_{N2} \\ F_{f3}^+ - \mu_{03} F_{N3} \end{bmatrix} + \\ &W_T (E - S) \begin{bmatrix} -\mu_2 \text{sgn}(\dot{g}_{\tau 2}) \\ -\mu_3 \text{sgn}(\dot{g}_{\tau 3}) \end{bmatrix} F_N = \\ &W_T S \begin{bmatrix} F_{f2}^+ \\ F_{f3}^+ \end{bmatrix} - W_T \mu F_N \end{aligned} \quad (23)$$

其中

$$\begin{aligned} \mu &= (E - S) \cdot \begin{bmatrix} \mu_2 \text{sgn}(\dot{g}_{\tau 2}) \\ \mu_3 \text{sgn}(\dot{g}_{\tau 3}) \end{bmatrix} + \\ &S \begin{bmatrix} \mu_{02} \\ \mu_{03} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

对于矩阵  $S$ , 存在矩阵  $B$ , 满足

$$S = BB^T \quad (24)$$

当矩阵  $S$  存在非零元素时, 矩阵  $B$  由矩阵  $S$  中的非零列向量组成. 当矩阵  $S$  不存在非零元素时, 即为零矩阵时, 取  $B = S$ .

将式(24)代入式(23)可得

$$\begin{aligned} Q^f &= W_T BB^T \begin{bmatrix} F_{f2}^+ \\ F_{f3}^+ \end{bmatrix} - W_T \mu F_N = \\ &W_H F_{fH}^+ - W_T \mu F_N \end{aligned} \quad (25)$$

其中,  $W_H = W_T B$ ,  $F_{fH}^+ = B^T [F_{f2}^+ \ F_{f3}^+]^T$ .

则将式(25)代入式(17)中可得

$$M\ddot{q} = Q + \Phi_q^T \lambda + W_N F_N + W_H F_{fH}^+ - W_T \mu F_N \quad (26)$$

### 2.4 动力学方程的算法

本文采用鲍姆加藤约束稳定化的方法解决数值求解动力学方程中的违约问题.将式(11)中的约束方程改写为<sup>[24]</sup>

$$\ddot{\Phi} + \alpha \dot{\Phi} + \beta \Phi = 0 \quad (27)$$

其中,  $\alpha$  和  $\beta$  是大于零的常数, 其大小与计算步长有关, 可以根据具体问题通过试算得到合理的取值<sup>[24]</sup>. 令

$$\Phi_q = \frac{\partial \Phi}{\partial q}, \quad \Phi_t = \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad \dot{\Phi}_q = \frac{d\Phi_q}{dt}, \quad \dot{\Phi}_t = \frac{d\Phi}{dt}$$

则式(27)可表示为

$$\Phi_q \ddot{q} + \dot{\Phi}_q \dot{q} + \dot{\Phi}_t + \alpha \Phi_q \dot{q} + \alpha \Phi_t + \beta \Phi = 0 \quad (28)$$

由式(26)可得

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= M^{-1} Q + M^{-1} \Phi_q^T \lambda + M^{-1} W_N F_N + \\ &M^{-1} W_H F_{fH}^+ - M^{-1} W_T \mu F_N \end{aligned} \quad (29)$$

将式(29)代入式(28)可得

$$\begin{aligned} \lambda &= D \Phi_q M^{-1} (W_N - W_T \mu) F + \\ &D \Phi_q M^{-1} W_H F_{fH}^+ + D A_1 \end{aligned} \quad (30)$$

其中

$$D = [-\Phi_q M^{-1} \Phi_q^T]^{-1}$$

$$A_1 = \Phi_q M^{-1} Q + \dot{\Phi}_q \dot{q} + \dot{\Phi}_t + \alpha \Phi_q \dot{q} + \alpha \Phi_t + \beta \Phi$$

将式 (30) 代入式 (29) 可得

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q} + \mathbf{M}^{-1}\boldsymbol{\Phi}_q^T\mathbf{D}\mathbf{A}_1 + \mathbf{M}^{-1}\tilde{\mathbf{W}}_N\mathbf{F}_N + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{W}_H\mathbf{F}_{\text{fH}}^+ \quad (31)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{W}}_H &= \mathbf{W}_H + \boldsymbol{\Phi}_q^T\mathbf{D}\boldsymbol{\Phi}_q\mathbf{M}^{-1}\mathbf{W}_H \\ \tilde{\mathbf{W}}_N &= \mathbf{W}_N - \mathbf{W}_T\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Phi}_q^T\mathbf{D}\boldsymbol{\Phi}_q\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{W}_N - \mathbf{W}_T\boldsymbol{\mu}) \end{aligned}$$

接触点的相对切向加速度列向量可表示为

$$\ddot{\mathbf{g}}_T = \begin{bmatrix} \ddot{g}_{T2} \\ \ddot{g}_{T3} \end{bmatrix} = \mathbf{W}_T^T\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{w}_T \quad (32)$$

其中, 列向量  $\mathbf{w}_T$  是广义坐标和广义速度的函数.

令  $\ddot{\mathbf{g}}_H$  表示相对切向速度  $\dot{g}_{Ti} = 0$  时, 其相对切向加速度构成的列向量, 则有

$$\ddot{\mathbf{g}}_H = \mathbf{B}^T\ddot{\mathbf{g}}_T \quad (33)$$

将式 (33) 代入式 (32) 可得

$$\ddot{\mathbf{g}}_H = \mathbf{W}_H^T\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}^T\mathbf{w}_T \quad (34)$$

由式 (19) 可得

$$\ddot{\mathbf{g}}_H = \ddot{\mathbf{g}}_H^+ - \ddot{\mathbf{g}}_H^- \quad (35)$$

将式 (35) 和式 (31) 代入式 (34) 可得

$$\ddot{\mathbf{g}}_H^+ - \ddot{\mathbf{g}}_H^- = \mathbf{W}_H^T\mathbf{M}^{-1}\tilde{\mathbf{W}}_H\mathbf{F}_{\text{fH}}^+ + \mathbf{B}^T\mathbf{w}_T + \mathbf{B}^T\mathbf{L}_1 \quad (36)$$

其中

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{W}_T^T[\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q} + \mathbf{M}^{-1}\boldsymbol{\Phi}_q^T\mathbf{D}\mathbf{A}_1 + \mathbf{M}^{-1}\tilde{\mathbf{W}}_N\mathbf{F}_N]$$

由式 (18) 可得

$$\mathbf{F}_{\text{fH}}^+ + \mathbf{F}_{\text{fH}}^- = 2\mathbf{B}^T\boldsymbol{\mu}_0^T\mathbf{F}_N \quad (37)$$

结合式 (36) 和式 (37) 可得

$$\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{g}}_H^+ \\ \mathbf{F}_{\text{fH}}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_H^T\mathbf{M}^{-1}\tilde{\mathbf{W}}_H & \mathbf{E} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\text{fH}}^+ \\ \ddot{\mathbf{g}}_H^- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_T + \mathbf{L}_1 \\ 2\boldsymbol{\mu}_0^T\mathbf{F}_N \end{bmatrix} \quad (38)$$

因为在式 (38) 中, 满足线性互补条件

$$\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{g}}_H^+ \\ \mathbf{F}_{\text{fH}}^- \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\text{fH}}^+ \\ \ddot{\mathbf{g}}_H^- \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{g}}_H^+ \\ \mathbf{F}_{\text{fH}}^- \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\text{fH}}^+ \\ \ddot{\mathbf{g}}_H^- \end{bmatrix} = 0$$

由此将接触点相对切向速度为 0 时, 接触点摩擦状态的判断和静滑动摩擦力大小的求解转化为线性互补问题, 可以采用莱姆克 (Lemke) 算法, 转轴算法等最优化方法进行求解. 给出第  $n$  步到第  $n+1$  步的计算流程图, 如图 3 所示.

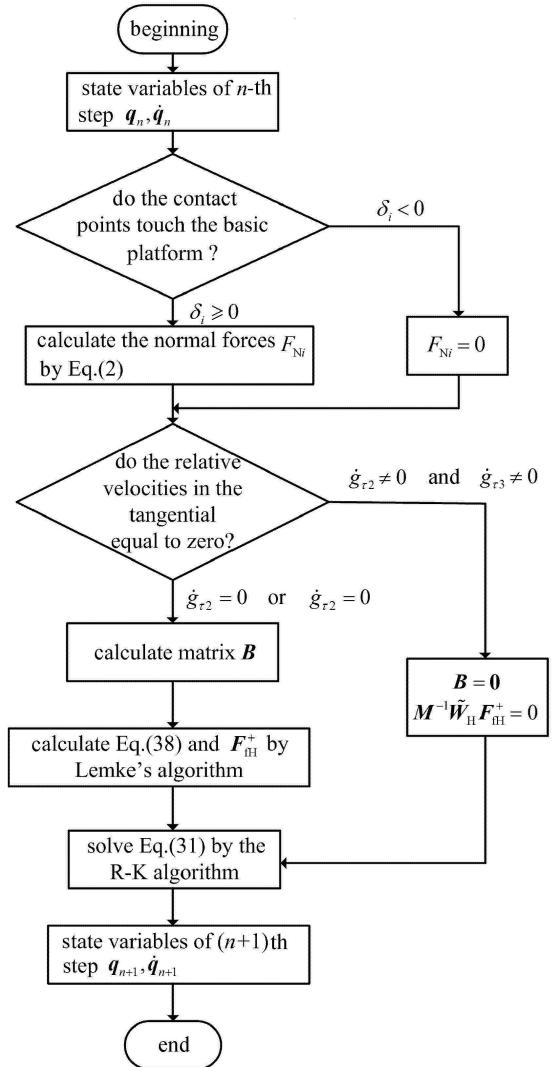


图 3 算法流程图

Fig. 3 Simulation flow chat

### 3 数值仿真结果

#### 3.1 步长的选取

Wrinkle<sup>[13]</sup> 指出当使用显式算法 (如本文采用的四阶龙格-库塔方法), 需采用合适的时间步长以保证数值稳定性.

如图 4 所示, 等效扭转刚度系数为  $k = 1.0 \times 10^5 \text{ N}$ , 等效扭转阻尼系数为  $c = 0 \text{ N}\cdot\text{s}$ , 各刚体的质

量分别为： $m_1 = 1.2 \text{ kg}$ ,  $m_2 = m_3 = 0.1 \text{ kg}$ . 动/静滑动摩擦系数分别为： $\mu_{02} = \mu_{03} = 0.6$ ,  $\mu_2 = \mu_3 = 0.48$ . 法向接触力的参数分别为  $K_1 = 2.0 \times 10^7 \text{ N/m}^{1.5}$ ,  $c_2 = 0 \text{ N}\cdot\text{m/s}^2$ . 图 5 为一对称浮放物体从高度 0.4 m 处自由下落时，刚体 1 质心纵坐标  $y_1$  的时间历程图，与 Wrinkle 的计算结果保持一致. 在系统运动过程中，摩擦力不做功，系统机械能守恒，因而每次弹起高度保持一致. 随计算步长  $h$  减小，计算结果趋于收敛，步长  $h = 1.0 \times 10^{-6} \text{ s}$  与  $h = 1.0 \times 10^{-7} \text{ s}$  时计算结果几乎重合，故选计算步长  $h = 1.0 \times 10^{-6} \text{ s}$ .

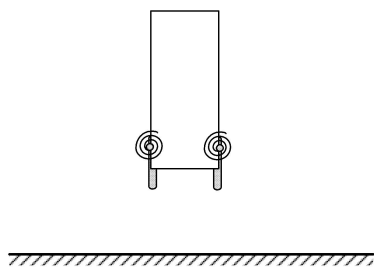


图 4 数值稳定性测试算例

Fig. 4 The case of numerical stability test

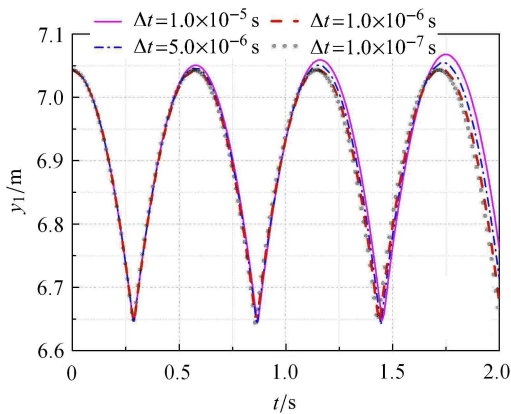


图 5  $y_1$  时间历程图

Fig. 5 Time history of  $y_1$

### 3.2 数值仿真结果

表 1 为系统数值仿真过程中各参数取值. 其中  $\theta_{20}$  和  $\theta_{30}$  分别表示铰链处力偶矩为零时  $\theta_2$  和  $\theta_3$  的大小. 令  $x_{xd} = x_1 - x_0 - x_1(0)$ , 则  $x_{xd}$  表示刚体 1 相对于基础平台的水平坐标. 动、静摩擦系数满足  $\mu_i = 0.8\mu_{0i}$ .

#### 情形 1

静滑动摩擦系数  $\mu_{02} = \mu_{03} = 0.6$ , 基础平台做水平运动,  $X_0 = 0.8 \text{ m}$ ,  $\omega_x = \pi \text{ rad/s}$ ,  $\alpha_x = 0$ . 初始时, 浮放物体放置于基础平台上, 相对基础平台静止. 图 6 分别给出了刚体 1 质心偏移量  $e = -0.915 \text{ m}$ ,

表 1 系统参数取值

Table 1 Parameters' value of the system

| Parameters                            | Values  | Parameters                                      | Values            |
|---------------------------------------|---------|---|-------------------|
| $m_1/\text{kg}$                       | 500     | $b_0/\text{m}$                                  | 3.415             |
| $m_2, m_3/\text{kg}$                  | 10      | $h_0/\text{m}$                                  | 4.330             |
| $J_1/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$      | 4 166.7 | $K_1(\text{N}\cdot\text{m}^{-1.5})$             | $10^6$            |
| $J_2, J_3/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$ | 0.208   | $c_2/(\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2})$ | $10^7$            |
| $k/\text{N}$                          | $10^6$  | $l_0/\text{m}$                                  | 0.25              |
| $c/(\text{N}\cdot\text{s})$           | $10^6$  | $\alpha$  | $10^4$            |
| $\theta_{20}/(^{\circ})$              | -60     | $\beta$   | $2.0 \times 10^4$ |
| $\theta_{30}/(^{\circ})$              | 60      | $n$   | 1.5               |

$e = 0 \text{ m}$  时  $x_{xd}$  的时间历程图. 当  $e = -0.915 \text{ m}$  时, 由于浮放物体非对称, 其左右摇晃幅度不同, 将会沿基础平台产生单方向运动; 而对于浮放物体对称的情况, 浮放物体在基础平台水平激励下做周期运动. 图 7 和图 8 分别给出质心偏移量  $e = -0.915 \text{ m}$  时接触点相对切向速度  $\dot{g}_{\tau i}$ 、法向接触力  $F_{Ni}$  和切向接触力  $F_{fi}$  的时间历程图. 从图 7 可以看到接触点的摩擦状态发生黏滞-滑移切换现象, 图 8 所展示的法向接

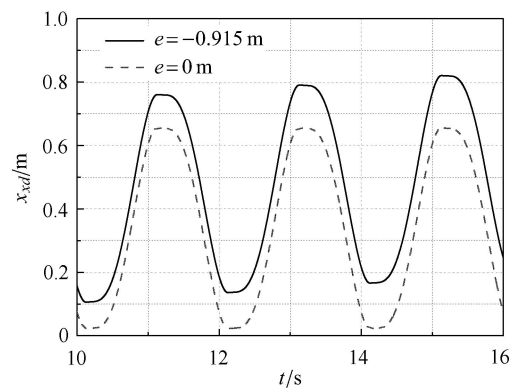


图 6  $x_{xd}$  时间历程图

Fig. 6 Time history of  $x_{xd}$

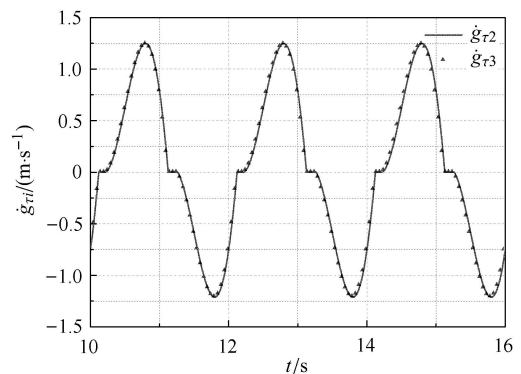


图 7  $\dot{g}_{\tau i}$  时间历程图

Fig. 7 Time history of  $\dot{g}_{\tau i}$

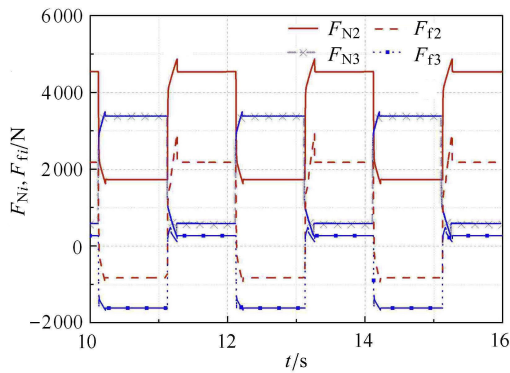


图 8  $F_{Ni}$  和  $F_{fi}$  时间历程图

Fig. 8 Time history of  $F_{Ni}$  and  $F_{fi}$

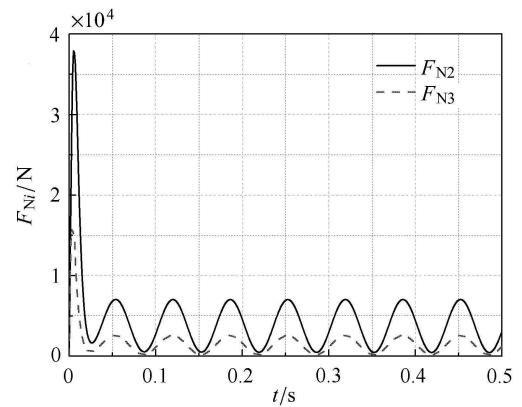


图 10  $F_{Ni}$  时间历程图

Fig. 10 Time history of  $F_{Ni}$

触力和切向接触力变化规律与摩擦点状态的切换保持同步。

### 情形 2

静滑动摩擦系数  $\mu_{02} = \mu_{03} = 0.2$ ，基础平台做铅锤运动， $Y_0 = 0.99 \text{ mm}$ ， $\omega_y = 30.0\pi \text{ rad/s}$ ， $\alpha_y = 0$ 。  $h_0 = 3.536 \text{ m}$ ， $b_0 = 7.208 \text{ m}$ ，其余系统参数如表 1 所示。初始时浮放物体放置于基础平台，且有铅锤方向的相对速度， $\dot{y}_i = \dot{y}_0 - 1.0 (i = 1, 2, 3)$ 。图 9 分别给出了刚体 1 质心偏移量  $e = -3.673 \text{ m}$  和  $e = 0 \text{ m}$  时  $x_{xd}$  的时间历程图。当  $e = -3.673 \text{ m}$  时，由于浮放物体非对称，其左右摇晃幅度不同，在基础平台铅锤激励下有水平方向运动；当  $e = 0 \text{ m}$  时，对称浮放物体始终未产生水平方向运动。图 10 给出了  $e = -3.673 \text{ m}$  时接触点法向接触力  $F_{Ni}$  的时间历程图。从图 10 可以看出浮放物体与基础平台发生碰撞后，法向接触力呈现周期性的变化规律。

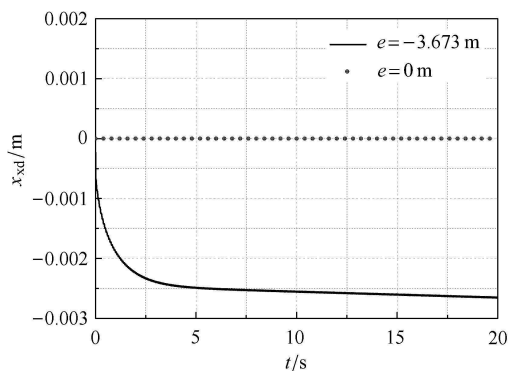


图 9  $x_{xd}$  时间历程图

Fig. 9 Time history of  $x_{xd}$

### 情形 3

静滑动摩擦系数  $\mu_{02} = \mu_{03} = 0.8$ ，基础平台既做水平运动，又做铅锤运动， $X_0 = 1.0 \text{ m}$ ， $\omega_x = \omega_y = \pi \text{ rad/s}$ ， $\alpha_x = \alpha_y = 0$ ， $b_0 = 2.5 \text{ m}$ ， $e = 0 \text{ m}$ ，其余系统参数如表 1 所示。初始时浮放物体放置于基础平台，且相对基础平台静止。图 11 分别给出了基础平台铅锤激励  $Y_0 = 0.9 \text{ m}$  和  $Y_0 = 0 \text{ m}$  时  $x_{xd}$  的时间历程图。当  $Y_0 = 0.9 \text{ m}$  时，由于基础平台铅锤运动和水平运动的耦合，浮放物体朝单方向运动；当  $Y_0 = 0 \text{ m}$  时，基础平台做水平运动， $x_{xd}$  呈现周期的变化规律。

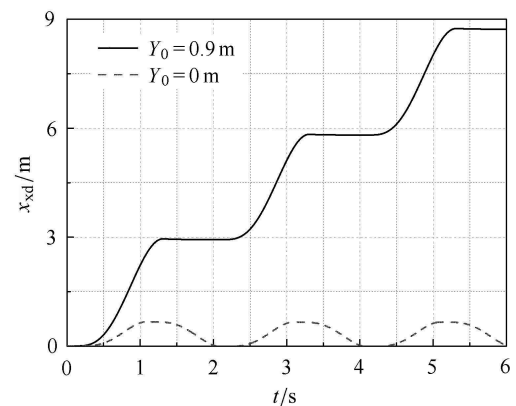


图 11  $x_{xd}$  时间历程图

Fig. 11 Time history of  $x_{xd}$

## 4 结论

本文基于非光滑多体系统动力学方法，建立了含支撑腿浮放物体与基础平台所组成的平面多刚体系统的动力学方程与数值算法。用扩展的赫兹接触力模型描述支撑腿与基础平台之间的法向接触力，用库伦干摩擦模型描述摩擦力。将第一类拉格朗日



方程与包姆加藤约束稳定化方法结合建立系统的动力学方程. 由于摩擦的存在使动力学方程不连续, 为此建立正负摩擦余量与正、负向加速度, 将静滑动摩擦力的求解和黏滞-滑移的判断转化为线性互补问题的求解.

最后在数值仿真时, 采用 Wrinkle 的方法选择合适的步长以保证数值仿真的稳定性. 通过仿真算例分析了浮放物体运动中存在的黏滞-滑移问题, 定性说明了方法的正确性与特定系统参数下基础平台运动规律和质心的偏移对浮放物体运动的影响. 当基础平台做水平运动时, 对称浮放物体水平方向上做周期运动, 而存在质心偏移量时, 其将沿基础平台单方向运动; 当基础平台做铅锤运动时, 对称浮放物体无水平方向上相对运动, 而存在质心偏移量时, 其将沿基础平台单方向运动; 若基础平台做水平方向和铅锤方向的耦合运动, 对称浮放物体水平方向上将沿基础平台单方向运动.

### 参 考 文 献

- Housner GW. The behavior of inverted pendulum structures during earthquakes. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1963, 53(2): 403-417
- Caliò I, Marletta M. Passive control of the seismic rocking response of art objects. *Engineering Structures*, 2003, 25(8): 1009-1018
- Zhang J, Makris N. Rocking response of free-standing blocks under cycloidal pulses. *Journal of Engineering Mechanics*, 2001, 127(5): 473-483
- Shi B, Anooshehpour A, Zeng Y, et al. Rocking and overturning of precariously balanced rocks by earthquakes. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1996, 86(5): 1364-1371
- Shenton HW, Jones NP. Base excitation of rigid bodies. I: Formulation. *Journal of Engineering Mechanics*, 1991, 117(10): 2286-2306
- Shenton HW, Jones NP. Base excitation of rigid bodies. II: Periodic slide-rock response. *Journal of Engineering Mechanics*, 1991, 117(10): 2307-2328
- 周乾, 闫维明, 纪金豹. 地震作用下浮放文物滑移及摇晃响应仿真. *华北地震科学*, 2016, 34(1): 13-20 (Zhou Qian, Yan Weiming, Ji Jinbao. Simulation of oscillation and sliding responses of free-standing cultural relics under earthquakes. *North China Earthquake Sciences*, 2016, 34(1): 13-20 (in Chinese))
- Roussis P, Odysseos S. Multi-mode response of base-isolated rigid blocks to ground excitation//Proceeding of the 10th National Conference in Earthquake Engineering, Earthquake Engineering Research Institute, Anchorage, AK, 2014
- Taniguchi T. Non-linear response analyses of rectangular rigid bodies subjected to horizontal and vertical ground motion. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 2010, 31(8): 1481-1500
- Contento A, Egidio AD. Investigations into the benefits of base isolation for non-symmetric rigid blocks. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 2010, 38(7): 849-866
- Pompei A, Scalia A, Sumbatyan MA. Dynamics of rigid block due to horizontal ground motion. *Journal of Engineering Mechanics*, 1998, 124(7): 713-717
- Psycharis IN, Lemos JV, Papastamatiou DY, et al. Numerical study of the seismic behaviour of a part of the parthenon pronaos. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 2003, 32(13): 2063-2084
- Winkler T, Meguro K, Yamazaki F. Response of rigid body assemblies to dynamic excitation. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 1995, 24(10): 1389-1408
- Zhang H, Brogliato B, Liu C. Dynamics of planar rocking-blocks with Coulomb friction and unilateral constraints: Comparisons between experimental and numerical data. *Multibody System Dynamics*, 2014, 32(1): 1-25
- 段文杰, 王琪, 王天舒. 圆弧足被动行走器非光滑动力学仿真研究. *力学学报*, 2011, 43(4): 765-774 (Duan Wenjie, Wang Qi, Wang Tianshu. Simulation research of a passive dynamic walker with round feet based on non-smooth method. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2011, 43(4): 765-774 (in Chinese))
- Zhuang F, Wang Q. Modeling and analysis of rigid multibody systems with driving constraints and frictional translation joints. *Acta Mechanica Sinica*, 2014, 30(3): 437-446
- Zhuang F, Wang Q. Modeling and simulation of the nonsmooth planar rigid multibody systems with frictional translational joints. *Multibody System Dynamics*, 2013, 29(4): 403-423
- 范新秀, 王琪. 车辆纵向非光滑多体动力学建模与数值算法研究. *力学学报*, 2015, 47(2): 301-309 (Fan Xinxiu, Wang Qi. Research on modeling and simulation of longitudinal vehicle dynamics based on non-smooth dynamics of multibody systems. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2015, 47(2): 301-309 (in Chinese))
- 徐梓尧, 王琪. 含单边非完整约束飞机滑跑的建模与仿真方法. *北京航空航天大学学报*, 2015, 41(5): 835-840 (Xu Ziyao, Wang Qi. Method for modeling and simulation of aircraft taxiing with unilateral and non-holonomic constraints. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2015, 41(5): 835-840 (in Chinese)).
- Zhang H, Brogliato B. The planar rocking-block: analysis of kinematic restitution laws, and a new rigid-body impact model with friction. *Industrial & Commercial Training*. 2011, 43(7): 451-459
- Yilmaz C, Gharib M, Hurmuzlu Y. Solving frictionless rocking block problem with multiple impacts. *Proceedings of the Royal Society A Mathematical Physical & Engineering Sciences*, 2009, 465(2111): 3323-3339
- Pfeiffer F, Glocker C. *Multibody Dynamics with Unilateral Contacts*. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1996
- 董富祥, 洪嘉振. 多体系统动力学碰撞问题研究综述. *力学进展*, 2009, 39(3): 352-359 (Dong Fuxiang, Hong Jiazhen. Review of impact problem for dynamics of multibody system. *Advances in Mechanics*, 2009, 39(3): 352-359 (in Chinese))
- Flores P, Machado M, Seabra E, et al. A parametric study on the baumgarte stabilization method for forward dynamics of constrained

- multibody systems. *Journal of Computational & Nonlinear Dynamics*, 2011, 6(1): 11019
- 25 Flores P, Leine R, Glocker C. Modeling and analysis of planar rigid multibody systems with translational clearance joints based on the non-smooth dynamics approach. *Multibody System Dynamics*, 2010, 23(2): 165-190
- 26 Yigit AS, Ulsoy AG, Scott RA. Spring-dashpot models for the dynamics of a radially rotating beam with impact. *Journal of Sound & Vibration*, 1990, 142(3): 515-525
- 27 Flores P, Ambrósio J, Claro JP. Dynamic analysis for planar multibody mechanical systems with lubricated joints. *Multibody System Dynamics*, 2004, 12(1): 47-74
- 28 刘丽兰, 刘宏昭, 吴子英等. 机械系统中摩擦模型的研究进展. *力学进展*, 2008, 38(2): 201-213 (Liu Lilan, Liu Hongzhao, Wu Ziyang, et al. An overview of friction models in mechanical systems. *Advances in Mechanics*, 2008, 38(2): 201-213 (in Chinese))