

不同拉压特性的厚壁圆筒极限内压统一解¹⁾赵均海²⁾ 姜志琳 张常光 曹雪叶

(长安大学建筑工程学院, 西安 710061)

摘要 厚壁圆筒在实际工程领域中应用广泛,若能精确计算出极限内压,对预防事故发生,降低风险有重要意义. 工程中存在许多材料,其拉压强度和拉压模量均存在差异,这些差异对极限内压的大小有显著影响. 以往研究表明,仅考虑拉压强度与拉压模量的一个方面,计算结果与实际情况存在一定的误差. 本文基于双剪统一强度理论,综合考虑中间主应力效应及材料拉压强度和拉压模量的不同,推导了内压作用下厚壁圆筒的弹、塑性状态的应力分布及弹性极限内压、塑性极限内压与安定极限内压的统一解,通过与其他文献对比分析验证了本文计算结果的正确性,分析了半径比、统一强度理论参数、拉压强度比与拉压模量系数对弹性极限内压、塑性极限内压及安定极限内压的影响. 结果表明:统一解均随半径比和统一强度理论参数的增大而增大,随拉压强度比的增大而减小,弹性极限内压随材料拉压模量系数的增大而减小,当壁厚增加到一定值后,安定极限内压随材料拉压模量系数的增大而减小;材料的拉压模量不同、拉压强度差异对厚壁圆筒的安定性影响显著,考虑中间主应力效应可使材料的潜能得到更充分发挥,极限内压随半径比的变化规律可为选择合理壁厚提供参考,该结论可为厚壁圆筒的工程应用提供理论依据.

关键词 厚壁圆筒, 双剪统一强度理论, 拉压强度, 拉压模量, 极限内压

中图分类号: O346 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-17-006

UNIFIED SOLUTIONS OF LIMIT INTERNAL PRESSURE FOR THICK-WALLED CYLINDER WITH DIFFERENT BEHAVIOUR IN TENSION AND COMPRESSION¹⁾Zhao Junhai²⁾ Jiang Zhilin Zhang Changguang Cao Xueye

(School of Civil Engineering, Chang'an University, Xi'an 710061, China)

Abstract Thick-walled cylinder is widely used in practical engineering. If the limit internal pressure is calculated accurately, it is great significance to prevent accidents and reduce risk. There are many engineering materials that the tensile strength and tensile modulus are different. These differences have a significant effect on the ultimate internal pressure. Previous studies have shown that only considering one aspect of the tension and compression strength and the modulus of tension and compression has a certain error with the actual situation. With consideration of the intermediate principal stress and the different elastic modulus and different strength in tension and compression, elastic and plastic stress distribution, the unified analytical solutions of the elastic limit internal pressure, the plastic limit internal pressure and the shakedown limit internal pressure of thick-walled cylinder under internal pressure are deduced based on twin shear unified strength theory. The correctness of the calculation results is proved through the verification and comparative analysis

2017-01-03 收稿, 2017-04-20 录用, 2017-04-23 网络版发表.

1) 国家自然科学基金(51508028, 41202191)、中国博士后科学基金(2016T90879, 2014M562357)、中央高校基本科研业务费专项资金(310828173402)资助项目.

2) 赵均海, 教授, 主要研究方向: 固体力学、强度理论、结构工程等. E-mail: zhaojh@chd.edu.cn

引用格式: 赵均海, 姜志琳, 张常光, 曹雪叶. 不同拉压特性的厚壁圆筒极限内压统一解. 力学学报, 2017, 49(4): 836-847

Zhao Junhai, Jiang Zhilin, Zhang Changguang, Cao Xueye. Unified solutions of limit internal pressure for thick-walled cylinder with different behaviour in tension and compression. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, 49(4): 836-847

with other literatures. The influence of radius ratio, unified strength theory parameter, tension-compression ratio and coefficient of tensile-compression modulus of materials on the solutions is analyzed. It is shown that each unified solution increases with increasing the radius ratio and unified strength theory parameter but decreases with increasing the tension-compression ratio. The elastic limit internal pressure decreases with increasing the coefficient of tension-compression modulus. When the wall thickness increases to a certain value, the shakedown limit internal pressure decreases with increasing the coefficient of tension-compression modulus. The different elastic modulus and strength in tension and compression have significant influence on the stability of the thick-walled cylinders. The consideration of the intermediate principal stress effect can make materials give full play to their potential. The variable law of the limit internal pressure with radius ratio provides reference for selecting reasonable wall thickness. The conclusion furnishes some theoretical basis for the engineering application of thick-walled cylinders.

Key words thick-walled cylinder, twin shear unified strength theory, strengths in tension and compression, modulus in tension and compression, limit internal pressure

引言

在实际工程中, 厚壁圆筒广泛应用于土木、水利、航空航天、石油、机械及化工等多个领域^[1-5], 如压力容器、石油化工设备、高压管道、炮筒等均可简化为厚壁圆筒^[6-11]. 高强度钢、铸铁、铝合金、复合材料及混凝土等是厚壁圆筒常用的材料^[12-14], 这些材料的拉压强度不同, 拉压模量也存在较大差异, 如混凝土的拉压强度比为 $1/8 \sim 1/10$ ^[15], 有机玻璃的拉压模量比 E^+/E^- 为 0.5 ^[16], 铝磷酸盐混凝土的拉压模量比 E^+/E^- 为 0.4 ^[16]. 国内外学者对厚壁圆筒进行了众多研究, 杨钊等^[17] 和殷有泉等^[18] 采用 Tresca 准则分析了厚壁圆筒的弹塑性极限内压, 但 Tresca 准则只适用于拉压特性相同的材料且不能反映中间主应力的影响^[19]; 胡向东等^[20-21] 采用 Mohr-Coulomb 准则计算了 FGM 冻结壁弹塑性状态下的应力场, 但 Mohr-Coulomb 准则只适应于剪切强度极限与抗拉强度极限和抗压强度极限的关系为 $\tau_0 = \frac{\sigma_t \sigma_c}{\sigma_t + \sigma_c}$ 的材料, 且未考虑中间主应力的影响; Zhu 等^[22] 和钱凌云等^[23] 基于 Mises 准则得到了内压作用下厚壁圆筒弹塑性状态下的应力场, 但 Mises 准则只适用于剪切屈服极限与拉伸屈服极限的关系为 $\tau_s = 0.577\sigma_s$ 的材料; 赵均海等^[24] 基于双剪统一强度理论, 推导了内压作用下厚壁圆筒的弹、塑性极限解, 结果表明厚壁圆筒的弹、塑性极限内压随材料拉压强度比的增大而减小, 如半径比 $r_b/r_a = 2.5$ 、统一强度理论参数 $b = 0$ 、拉压强度比 α 从 0.4 变化到 1 时, 弹性极限内压减小了 25.2% , 塑性极限内压减小了 24.98% , 但该极限解未考虑材料拉压模量的不同; 杨钊等^[17] 采

用 Tresca 准则建立了拉压模量不同的厚壁圆筒的应力场和位移场, 结果表明拉压模量系数对内压作用下厚壁圆筒的弹性极限内压、应力场及位移场均有影响, 如 $r_b/r_a = 2.5$, 拉压模量系数 β 从 0.4 变化到 1 时弹性极限内压减小了 10.13% ; 陈昌富等^[25] 在考虑拉压模量不同的基础上, 采用统一强度理论研究了柱孔扩张的应力场及位移场, 结果表明拉压模量的不同对临界扩张压力有显著影响, 但该结果只适用于岩土类材料沉桩挤土对应的扩孔问题, 有失一般性且对安定性未有涉及; 曹雪叶等^[26] 在考虑拉压强度不同与拉压模量差异的基础上, 基于双剪统一强度理论, 分析了厚壁球壳的弹、塑性极限内压与安定极限内压, 结果表明拉压强度比与拉压模量系数对厚壁球壳的极限内压统一解有明显影响. 对于厚壁圆筒, 现有研究只针对了拉压强度或拉压模量不同的一个方面, 采用的强度准则未考虑中间主应力的影响或只适用于某一类特定的材料.

本文采用双剪统一强度理论, 假定材料为理想弹塑性, 综合考虑中间主应力效应、拉压强度的不同及拉压模量的差异, 推导了厚壁圆筒的弹性极限内压、塑性极限内压及安定极限内压统一解, 分析了半径比、统一强度理论参数、拉压强度比与拉压模量系数对统一解的影响.

1 双剪统一强度理论

俞茂宏于 1991 年以双剪单元体和双剪屈服准则为基础, 考虑作用于双剪单元体上的全部应力分量及其对材料破坏的影响, 建立了双剪统一强度理论, 该理论充分考虑了中间主应力 σ_2 的影响, 几乎

适用于各种不同特性的材料. 其数学表达式为^[27]

$$F = \sigma_1 - \frac{\alpha}{1+b} (b\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_t, \quad \sigma_2 \leq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1+\alpha} \quad (1a)$$

$$F' = \frac{1}{1+b} (\sigma_1 + b\sigma_2) - \alpha\sigma_3 = \sigma_t, \quad \sigma_2 \geq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1+\alpha} \quad (1b)$$

其中

$$b = \frac{(1+\alpha)\tau_0 - \sigma_t}{\sigma_t - \tau_0}, \quad \alpha = \frac{\sigma_t}{\sigma_c}$$

式中, σ_1, σ_2 与 σ_3 分别为第一、第二(即中间)及第三主应力; α 为材料的拉压强度比; σ_t, σ_c 与 τ_0 分别为材料的抗拉强度极限、抗压强度极限及剪切强度极限; b 为统一强度理论参数, 反映了中间主剪应力及其相应面上的正应力对材料破坏的影响程度, $0 \leq b \leq 1$. b 取不同值时, 可退化为不同的强度准则, 即对应 π 平面的极限线不同, $b = 0$ 时退化为 Mohr-Coulomb 准则, $b = 0, \alpha = 1$ 时退化为 Tresca 准则, $b = 1$ 时退化为双剪强度准则, $0 < b < 1$ 时为一系列有序的新强度准则.

2 厚壁圆筒的弹塑性极限分析

设有一无限长厚壁圆筒, 由拉压强度及拉压模量均不相同的理想弹塑性材料制成, 并假定材料各向同性, 塑性体积不可压缩, 忽略微小的弹性体积变形, 其内半径为 r_a 、外半径为 r_b , 受均匀内压 p 作用(如图 1 所示). 令: u 为径向位移, σ_θ 为环向应力, σ_r 为径向应力, σ_z 为轴向应力.

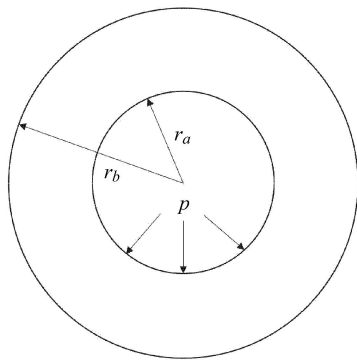


图 1 厚壁圆筒模型

Fig. 1 Model of thick-walled cylinder

2.1 弹性极限分析

由厚壁圆筒的几何形状与受力情况可知, 厚壁圆筒处于轴对称平面应变状态^[28]. 其平衡方程(不考虑体力)为

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (2)$$

几何方程为

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_z = 0 \quad (3)$$

广义弹性定律为^[29]

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= a_{11}\sigma_r + a_{12}\sigma_\theta \\ \varepsilon_\theta &= a_{21}\sigma_r + a_{22}\sigma_\theta \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= b_{11} - \frac{b_{12}^2}{b_{11}}, \quad a_{12} = a_{21} = b_{12} - \frac{b_{12}^2}{b_{11}} \\ a_{22} &= b_{22} - \frac{b_{12}^2}{b_{11}} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中, $b_{11} = \frac{1}{E^-}$, $b_{12} = -\frac{\nu^-}{E^-} = -\frac{\nu^+}{E^+}$ ^[29-30], 该假定的含义为: 同一构件受等值轴向拉力或轴向压力时, 两种状态下的侧向压应变、侧向拉应变相等, $b_{22} = \frac{1}{E^+}$; E^+ 和 E^- 分别表示材料受拉与受压时的弹性模量; ν^+ 和 ν^- 分别表示材料受拉与受压时的泊松比.

由式 (3) 和式 (4) 可得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \left(a_{22} \frac{du}{dr} - a_{12} \frac{u}{r} \right) \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \left(a_{11} \frac{u}{r} - a_{21} \frac{du}{dr} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

由式 (6) 可得

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{a_{22} \frac{d^2u}{dr^2} - \frac{a_{12}}{r} \frac{du}{dr} + a_{12} \frac{u}{r^2}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (7)$$

$$\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \left(\frac{a_{22} + a_{21}}{r} \frac{du}{dr} - \frac{a_{22} + a_{21}}{a_{22}} \frac{u}{r^2} a_{12} \right) - \frac{1}{a_{22}} \frac{u}{r^2} \quad (8)$$

将式 (7) 和式 (8) 代入式 (2) 可得

$$r^2 \frac{du^2}{dr^2} + r \frac{du}{dr} - \frac{a_{11}}{a_{22}} u = 0 \quad (9)$$

令 $\frac{a_{11}}{a_{22}} = \beta^2$, 由式 (5) 得 $\beta = \sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}} = \sqrt{\frac{E^+}{E^-} \frac{1 - \nu^-}{1 - \nu^+ \nu^-}}$, 结合边界条件 $\sigma_r|_{r=r_a} = -p, \sigma_r|_{r=r_b} = 0$, 求解式 (9) 可得

$$u = -\frac{p(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})r^\beta}{(a_{22}\beta - a_{12})(r_a^{\beta-1} - r_b^{2\beta} r_a^{-\beta-1})} - \frac{p(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})r_b^{2\beta} r^{-\beta}}{(a_{22}\beta + a_{12})(r_a^{\beta-1} - r_b^{2\beta} r_a^{-\beta-1})} \quad (10)$$

将式 (10) 代入式 (6) 可得应力分量为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{P}{(r_b/r_a)^{1+\beta} - (r_b/r_a)^{1-\beta}} (r_b/r)^{1-\beta} - \\ &\frac{P}{(r_b/r_a)^{1+\beta} - (r_b/r_a)^{1-\beta}} (r_b/r)^{1+\beta} \\ \sigma_\theta &= \frac{\beta p}{(r_b/r_a)^{1+\beta} - (r_b/r_a)^{1-\beta}} (r_b/r)^{1-\beta} + \\ &\frac{\beta p}{(r_b/r_a)^{1+\beta} - (r_b/r_a)^{1-\beta}} (r_b/r)^{1+\beta} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式中, β 为拉压模量系数. 当 $\beta = 1$ 即 $E^+ = E^-$ 和 $\nu^+ = \nu^-$ 时, 表示材料受拉与受压时弹性模量相同; 当 $\beta \neq 1$ 即 $E^+ \neq E^-$ 或 $\nu^+ \neq \nu^-$ 时, 表示材料受拉与受压时弹性模量不相等.

对于平面应变厚壁圆筒有 $\sigma_z = \frac{m}{2} (\sigma_r + \sigma_\theta)$, m 为中间主应力系数, $0 < m \leq 1$, m 值由实验或理论来确定, 塑性区趋近于 1^[31-32]. 本文假定 $m = 1$, 则

$$\sigma_z = \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_\theta) \quad (12)$$

由式 (11) 可知, 环向应力 $\sigma_\theta > 0$, 径向应力 $\sigma_r < 0$. 若规定 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, 则

$$\sigma_1 = \sigma_\theta, \quad \sigma_2 = \sigma_z, \quad \sigma_3 = \sigma_r \quad (13)$$

由于 $\alpha \leq 1$, 故 $\sigma_2 \leq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1 + \alpha}$, 满足式 (1a) 的条件, 将式 (12) 和式 (13) 代入式 (1a) 可得

$$\frac{2 + 2b - \alpha b}{2 + 2b} \sigma_\theta - \frac{2\alpha + \alpha b}{2 + 2b} \sigma_r = \sigma_t \quad (14)$$

厚壁圆筒仅受内压作用时, 其内壁 $r = r_a$ 处的应力最大, 即内壁 $r = r_a$ 处最先进入塑性状态. 为计算弹性极限内压 p_e , 将 $r = r_a$ 代入式 (11) 得到此处的应力分量为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{P_e}{(r_b/r_a)^{1+\beta} - (r_b/r_a)^{1-\beta}} (r_b/r_a)^{1-\beta} - \\ &\frac{P_e}{(r_b/r_a)^{1+\beta} - (r_b/r_a)^{1-\beta}} (r_b/r_a)^{1+\beta} \\ \sigma_\theta &= \frac{\beta p_e}{(r_b/r_a)^{1+\beta} - (r_b/r_a)^{1-\beta}} (r_b/r_a)^{1-\beta} + \\ &\frac{\beta p_e}{(r_b/r_a)^{1+\beta} - (r_b/r_a)^{1-\beta}} (r_b/r_a)^{1+\beta} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

将式 (15) 代入强度准则式 (14) 得

$$\frac{P_e}{(r_b/r_a)^{1+\beta} - (r_b/r_a)^{1-\beta}} \left[(r_b/r_a)^{1-\beta} \left(\frac{\beta + b\beta - 0.5\alpha\beta b}{1 + b} - \frac{\alpha + 0.5\alpha b}{1 + b} \right) + (r_b/r_a)^{1+\beta} \left(\frac{\beta + b\beta - 0.5\alpha\beta b}{1 + b} + \frac{\alpha + 0.5\alpha b}{1 + b} \right) \right] = \sigma_t \quad (16)$$

化简求得厚壁圆筒的弹性极限内压 p_e 为

$$p_e = \frac{\sigma_t [(r_b/r_a)^{1+\beta} - (r_b/r_a)^{1-\beta}] (1 + b)}{(\kappa - \eta)(r_b/r_a)^{1-\beta} + (\kappa + \eta)(r_b/r_a)^{1+\beta}} \quad (17)$$

式中, $\kappa = (1 + b - 0.5\alpha b)\beta$, $\eta = \alpha(0.5b + 1)$.

2.2 弹塑性分析

当内压 $p > p_e$ 时, 塑性区的范围从 $r = r_a$ 处向外扩大. 设弹塑性交界处的半径为 r_c , 则 $r_a \leq r \leq r_c$ 范围内厚壁圆筒处于塑性状态, $r_c \leq r \leq r_b$ 范围内厚壁圆筒处于弹性状态, 如图 2 所示.

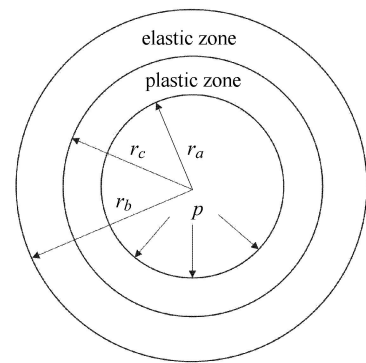


图 2 厚壁圆筒弹塑性分界

Fig. 2 Elastic plastic boundary of thick-walled cylinder

由式 (1a)、式 (2)、式 (12) 可得

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2(1+b)(1-\alpha)}{2+2b-\alpha b} \frac{\sigma_r}{r} - \frac{2+2b}{2+2b-\alpha b} \frac{\sigma_t}{r} = 0 \quad (18)$$

该方程的解为

$$\sigma_r = \frac{\sigma_t}{1-\alpha} + C r^{\frac{2(1+b)(\alpha-1)}{2+2b-\alpha b}} \quad (19)$$

其中 C 为待定常数.

结合内壁处应力边界条件 $\sigma_r|_{r=r_a} = -p$, 可得塑性区的应力分量为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^p &= \frac{\sigma_t}{1-\alpha} - \left(p + \frac{\sigma_t}{1-\alpha} \right) (r/r_a)^{\frac{2(1+b)(\alpha-1)}{2+2b-\alpha b}} \\ \sigma_\theta^p &= \frac{\sigma_t}{1-\alpha} - \frac{\alpha(2+b)}{2+2b-\alpha b} \left(p + \frac{\sigma_t}{1-\alpha} \right) \cdot \\ &\quad (r/r_a)^{\frac{2(1+b)(\alpha-1)}{2+2b-\alpha b}} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

式中, $r_a \leq r \leq r_c$.

弹性区可视为受内压 p_c 作用, 内半径为 r_c , 外半径为 r_b 的厚壁圆筒. p_c 为弹塑性交界即 $r = r_c$ 处的弹性极限内压. 将 $r_a = r_c$ 代入式 (17) 可得

$$p_c = \frac{\sigma_t [(r_b/r_c)^{1+\beta} - (r_b/r_c)^{1-\beta}] (1 + b)}{(\kappa - \eta)(r_b/r_c)^{1-\beta} + (\kappa + \eta)(r_b/r_c)^{1+\beta}} \quad (21)$$

将式 (21) 代入式 (11), 可得弹性区的应力为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^e &= \frac{p_c}{(r_b/r_c)^{1+\beta} - (r_b/r_c)^{1-\beta}} (r_b/r)^{1-\beta} - \\ &\frac{p_c}{(r_b/r_c)^{1+\beta} - (r_b/r_c)^{1-\beta}} (r_b/r)^{1+\beta} \\ \sigma_\theta^e &= \frac{\beta p_c}{(r_b/r_c)^{1+\beta} - (r_b/r_c)^{1-\beta}} (r_b/r)^{1-\beta} + \\ &\frac{\beta p_c}{(r_b/r_c)^{1+\beta} - (r_b/r_c)^{1-\beta}} (r_b/r)^{1+\beta} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

式中, $r_c \leq r \leq r_b$.

由于厚壁圆筒在弹塑性交界处内力连续, 即式 (20) 与式 (22) 在 $r = r_c$ 处相等, 故塑性区半径 r_c 与内压 p 的关系为

$$p = \frac{\sigma_t}{1-\alpha} \left\{ \left[1 + \frac{(1+b)(1-\alpha)((r_b/r_c)^{1+\beta} - (r_b/r_c)^{1-\beta})}{(\kappa-\eta)(r_b/r_c)^{1-\beta} + (\kappa+\eta)(r_b/r_c)^{1+\beta}} \right] (r_c/r_a)^{\frac{2(1+b)(1-\alpha)}{2+2b-b\alpha}} - 1 \right\} \quad (23)$$

2.3 塑性极限分析

随着内压 p 的继续增大, 塑性区范围逐渐往外扩展, 当 $r_c = r_b$ 时, 厚壁圆筒达到塑性极限状态. 将 $r_c = r_b$ 代入式 (23) 可得塑性极限内压 p_p 为

$$p_p = \frac{\sigma_t}{1-\alpha} \left[(r_b/r_a)^{\frac{2(1+b)(1-\alpha)}{2+2b-b\alpha}} - 1 \right] \quad (24)$$

式中, $\alpha < 1$.

由文献 [33] 可知, $\alpha = 1$ 时, 塑性极限内压为

$$p_p = \frac{2+2b}{2+b} \sigma_t \ln \frac{r_b}{r_a} \quad (25)$$

故

$$p_p = \begin{cases} \frac{\sigma_t}{1-\alpha} \left[(r_b/r_a)^{\frac{2(1+b)(1-\alpha)}{2+2b-b\alpha}} - 1 \right], & 0 < \alpha < 1 \\ \frac{2+2b}{2+b} \sigma_t \ln \frac{r_b}{r_a}, & \alpha = 1 \end{cases} \quad (26)$$

由式 (26) 可知, 厚壁圆筒达到塑性极限状态时, 拉压模量的不同对塑性极限内压 p_p 无影响, 半径比、拉压强度比及统一强度理论参数对塑性极限内压 p_p 是有影响的.

3 安定性分析

3.1 残余应力

厚壁圆筒加载至弹塑性状态然后卸载, 卸载应力可由弹性解确定. 卸载应力由式 (11) 确定, 加载

应力由式 (20) 和式 (22) 确定, 叠加即可得残余应力 [28]. 塑性区残余应力为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r_p}^r &= \frac{\sigma_t}{1-\alpha} - \left(p + \frac{\sigma_t}{1-\alpha} \right) (r/r_a)^{\frac{2(1+b)(\alpha-1)}{2+2b-b\alpha}} - \\ &\frac{p}{(r_b/r_a)^{1+\beta} - (r_b/r_a)^{1-\beta}} (r_b/r)^{1-\beta} + \\ &\frac{p}{(r_b/r_a)^{1+\beta} - (r_b/r_a)^{1-\beta}} (r_b/r)^{1+\beta} \\ \sigma_{\theta_p}^r &= \frac{\sigma_t}{1-\alpha} - \frac{\alpha(2+b)}{2+2b-b\alpha} \left(p + \frac{\sigma_t}{1-\alpha} \right) \cdot \\ &(r/r_a)^{\frac{2(1+b)(\alpha-1)}{2+2b-b\alpha}} - \\ &\frac{\beta p}{(r_b/r_a)^{1+\beta} - (r_b/r_a)^{1-\beta}} (r_b/r)^{1-\beta} - \\ &\frac{\beta p}{(r_b/r_a)^{1+\beta} - (r_b/r_a)^{1-\beta}} (r_b/r)^{1+\beta} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

式中, $r_a \leq r \leq r_c$.

弹性区残余应力为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r_e}^r &= \frac{p_c}{(r_b/r_c)^{1+\beta} - (r_b/r_c)^{1-\beta}} (r_b/r)^{1-\beta} - \\ &\frac{p_c}{(r_b/r_c)^{1+\beta} - (r_b/r_c)^{1-\beta}} (r_b/r)^{1+\beta} - \\ &\frac{p}{(r_b/r_a)^{1+\beta} - (r_b/r_a)^{1-\beta}} (r_b/r)^{1-\beta} + \\ &\frac{p}{(r_b/r_a)^{1+\beta} - (r_b/r_a)^{1-\beta}} (r_b/r)^{1+\beta} \\ \sigma_{\theta_e}^r &= \frac{\beta p_c}{(r_b/r_c)^{1+\beta} - (r_b/r_c)^{1-\beta}} (r_b/r)^{1-\beta} + \\ &\frac{\beta p_c}{(r_b/r_c)^{1+\beta} - (r_b/r_c)^{1-\beta}} (r_b/r)^{1+\beta} - \\ &\frac{\beta p}{(r_b/r_a)^{1+\beta} - (r_b/r_a)^{1-\beta}} (r_b/r)^{1-\beta} - \\ &\frac{\beta p}{(r_b/r_a)^{1+\beta} - (r_b/r_a)^{1-\beta}} (r_b/r)^{1+\beta} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

式中, $r_c \leq r \leq r_b$.

3.2 安定性

考察残余应力, 厚壁圆筒内壁处因残余应力而首先进入塑性状态 [13,26], 将 $r = r_a$ 代入式 (27) 可得该处残余应力为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^r &= 0 \\ \sigma_\theta^r &= -p \left[\frac{\alpha(2+b)}{2+2b-b\alpha} + \right. \\ &\left. \beta \frac{(r_b/r_a)^{1-\beta} + (r_b/r_a)^{1+\beta}}{(r_b/r_a)^{1+\beta} - (r_b/r_a)^{1-\beta}} \right] + \\ &\frac{2(1+b)\sigma_t}{2+2b-b\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

由式 (29) 可知, $\sigma_1 = \sigma_r^r = 0$, $\sigma_3 = \sigma_\theta^r$, $\sigma_2 = \sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_r^r + \sigma_\theta^r) = \frac{1}{2}\sigma_\theta^r$, 则 $\sigma_2 \leq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1 + \alpha}$, 满足反向强度准则式 (1a). 为使厚壁圆筒在完全卸载后不会出现新的塑性变形, 将残余应力分量代入式 (1a), 可得极限内压 p_t 为

$$p_t = \frac{2(1+b)(1+\alpha+b)}{\alpha b + 2\alpha} \cdot \frac{(r_b/r_a)^{1+\beta} - (r_b/r_a)^{1-\beta}}{(\kappa - \eta)(r_b/r_a)^{1-\beta} + (\kappa + \eta)(r_b/r_a)^{1+\beta}} \sigma_t \quad (30)$$

初始加载时, 厚壁圆筒所受的内压不能使其达到塑性极限状态; 卸载后, 厚壁圆筒亦不能出现新的塑性变形, 故厚壁圆筒的安定极限内压 p_m 为

$$p_m = \min \{p_p, p_t\} \quad (31)$$

4 解的验证与参数分析

4.1 解的退化验证

为了验证本文结果的正确性, 将本文结果与文献 [13,17,24] 进行比较. 当 $\alpha = 1, b = 0$ 时, 双剪统一强度理论退化为 Tresca 准则, 将其代入式 (17) 和式 (26) 得

$$\left. \begin{aligned} p_e &= \frac{\sigma_t [(r_b/r_a)^{1+\beta} - (r_b/r_a)^{1-\beta}]}{(\beta - 1)(r_b/r_a)^{1-\beta} + (\beta + 1)(r_b/r_a)^{1+\beta}} \\ p_p &= \sigma_t \ln \frac{r_b}{r_a} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

本文退化结果式 (32) 与文献 [17] 所对应结果相同.

将 $\beta = 1$ 代入式 (17) 和式 (26) 得

$$\left. \begin{aligned} p_e &= \frac{\sigma_t (1+b) [(r_b/r_a)^2 - 1]}{(1-\alpha)(1+b) + (1+b+\alpha)(r_b/r_a)^2} \\ p_p &= \frac{\sigma_t}{1-\alpha} \left[(r_b/r_a)^{\frac{2(1+b)(1-\alpha)}{2+2b-b\alpha}} - 1 \right] \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

本文退化结果式 (33) 与文献 [24] 所对应结果相同.

文献 [13] 中厚壁圆筒拉压模量相同, 但其内壁处环向残余应力 σ_θ^r 、卸载时圆筒不产生新的塑性变形的极限内压 p_t 的计算式应为

$$\sigma_\theta^r = \frac{2(1+b)\sigma_t}{2+2b-\alpha b} - p \left[\frac{(2+b)\alpha}{2+2b-\alpha b} + \frac{r_b^2 + r_a^2}{r_b^2 - r_a^2} \right] \quad (34)$$

$$p_t = \frac{2(1+b)(n+1)}{\alpha(2+b)(n+n_r)} \quad (35)$$

式中

$$n = \alpha(b+2)/(2+2b-\alpha b)$$

$$n_r = (r_b^2 + r_a^2)/(r_b^2 - r_a^2)$$

将 $\beta = 1$ 代入式 (30) 得

$$p_t = \frac{(r_b/r_a)^2 - 1}{(1-\alpha)(1+b) + (1+\alpha+b)(r_b/r_a)^2} \cdot \frac{2(1+b)(1+\alpha+b)}{\alpha b + 2\alpha} \sigma_t \quad (36)$$

式 (29) 和式 (30) 退化所得结果与修正后文献 [13] 结果相同, 本文结果可退化为拉压模量相同的厚壁圆筒安定性分析的解析解, 即式 (35) 与式 (36) 相同.

本文所得结果考虑了材料的拉压强度及拉压模量的不同, 可退化为不同材料厚壁圆筒的弹性极限内压、塑性极限内压及安定极限内压的解析解, 故本文所建立的解析解可作为厚壁圆筒安定性分析的统一解.

4.2 解的对比验证

为验证本文理论分析的可靠性, 采用文献 [17,34-36] 对弹塑性状态下环向应力 σ_θ 公式 (20) 和 (22) 和弹塑性极限内压公式 (17) 和 (26) 进行验证.

将本文计算的环向应力结果与文献 [34] 进行比较. 由文献 [34] 取相关参数, 材料为理想弹塑性, 基于统一强度理论, 采用 ABAQUS 软件, 模拟得到在内压 $p = 1.1645 \text{ kPa}$ 作用下的环向应力 σ_θ , 内半径 $r_a = 0.1 \text{ m}$, 外半径 $r_b = 0.2 \text{ m}$, 弹性模量 $E = 240 \text{ MPa}$, 泊松比 $\nu = 0.2$, 抗拉强度极限 $\sigma_t = 1.4 \text{ kPa}$, 拉压强度比 $\alpha = 0.49$, 统一强度理论参数 b 取 0, 0.5 和 1; 除上述参数外, 本文取拉压弹性模量 $E^+ = E^- = 240 \text{ MPa}$, 泊松比 $\nu^+ = \nu^- = 0.2$, 即拉压模量系数 $\beta = 1$, 结果比较如图 3 所示.

由式 (26) 可得, 统一强度理论参数 b 取 0, 0.5 和 1 时, 塑性极限内压 p_p 分别为 1.164, 1.289, 1.362 kPa. 在内压 $p = 1.1645 \text{ kPa}$ 作用下, $b = 0$ 时厚壁圆筒处于完全塑性状态, $b = 0.5$ 和 1 时处于弹塑性状态, 塑性区半径分别为 0.149 m, 0.139 m. 从图 3 可知, 在塑性区, 本文计算的环向应力与文献 [34] 数值模拟结果均随半径的增大而增大; 在弹性区, 本文计算的环向应力与文献 [34] 数值模拟结果均随半径的增大而减小; b 取不同值时, 对应 π 平面的极限线不同, b 越大则中间主应力效应越强, 材料的强度越高, 故在内压 $p = 1.1645 \text{ kPa}$ 作用下, 随着 b 的增

大, 厚壁圆筒由完全塑性状态转化为弹塑性状态, 且塑性区半径逐渐减小. 文献 [34] 数值模拟结果与本文计算结果的比值 $\sigma'_\theta/\sigma_\theta$ 的范围在 0.958 ~ 1.060 之间, 二者吻合较好, 说明式 (20) 和式 (22) 的计算精度较高.

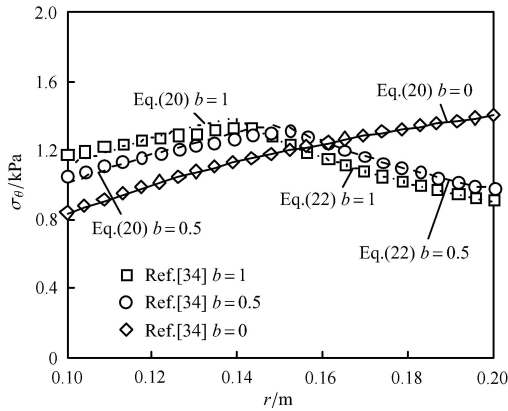


图 3 本文结果与文献 [34] 比较

Fig. 3 Comparison between the results in this paper and the Ref.[34]

将本文结果与文献 [17] 计算结果、文献 [35] 试验结果及文献 [36]FLAC 数值模拟结果比较, 如表 1、表 2 及图 4 所示. 其中: 文献 [17] 采用 Tresca 准则, 材料为理想弹塑性, 半径比 $r_b/r_a = 2$, 抗拉强度极限 $\sigma_t = 5.77 \text{ MPa}$; 文献 [35] 的圆筒由马氏体时效钢制成, 对圆筒进行了爆破试验, 测得其爆破内压, 该材料的抗拉强度极限 $\sigma_t = 2128 \text{ MPa}$; 文献 [36] 基于统一强度理论采用 FLAC 软件, 模拟得到弹、塑性极限内压, 材料为理想弹塑性, 半径比 $r_b/r_a = 2$, 弹性模量 $E = 240 \text{ MPa}$, 泊松比 $\nu = 0.2$, 黏聚力 $c = 1.0 \text{ kPa}$, 内摩擦角 $\phi = 20^\circ$, 由此可得抗拉强度极限 $\sigma_t = 1.4 \text{ kPa}$, 拉压强度比 $\alpha = 0.49$; 除上述参数外, 本文取拉压弹性模量 $E^+ = E^- = 240 \text{ MPa}$, 泊松比 $\nu^+ = \nu^- = 0.2$, 即拉压模量系数 $\beta = 1$.

由表 1 可知, 拉压模量系数 β 取不同的值时, 本文计算的弹、塑性极限内压与文献 [17] 弹、塑性极限内压的比值均为 1.00; 由表 2 可知, 统一强度理

表 1 本文计算结果与文献 [17] 比较

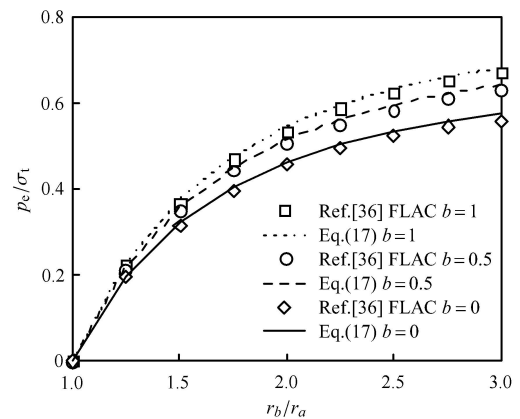
Tab.1 Comparison between the calculated results in this paper and the Ref.[17]

β	α	b	p_e/MPa	Ref.[17] p'_e/MPa	p_e/p'_e	p_p/MPa	Ref.[17] p'_p/MPa	p_p/p'_p
0.5			2.31	2.31	1.00			
1	1	0	2.16	2.16	1.00	4.00	4.00	1.00
1.5			1.92	1.92	1.00			

表 2 本文计算结果与文献 [35] 比较

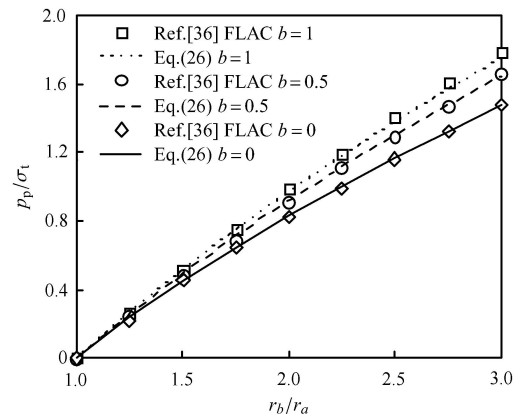
Table 2 Comparison between the calculated results in this paper and the Ref.[35]

r_b/r_a	b	p_p/MPa	Ref.[35] p'_p/MPa	p_p/p'_p
1.035	0.3	82.755		0.951
	0.5	87.847	86.974	1.010
	0.7	92.186		1.060
1.037	0.3	87.399		0.951
	0.5	92.777	91.947	1.009
	0.7	97.359		1.059
1.039	0.3	92.034		0.978
	0.5	97.697	94.079	1.038
	0.7	102.522		1.090



(a) 弹性极限内压

(a) Elastic limit internal pressure



(b) 塑性极限内压

(b) Plastic limit internal pressure

图 4 本文计算结果与文献 [36] 比较

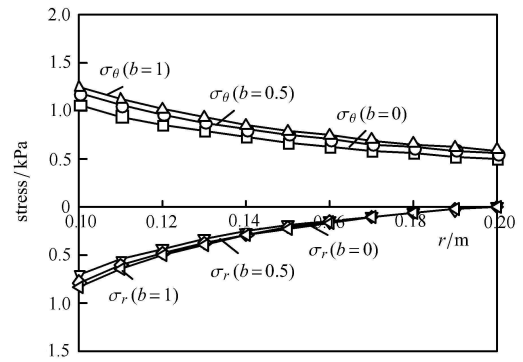
Fig. 4 Comparison between the calculated results in this paper and the results of Ref.[36]

论参数 b 为 0.3, 0.5, 0.7 时本文计算的塑性极限内压与文献 [35] 试验结果的平均比值分别为 0.96, 1.02 及 1.07, 说明 b 取不同值时对极限内压的结果是有影响的, 且文献 [35] 中的马氏体时效钢比较符合参数 $b = 0.5$ 时的统一强度理论; 由图 4 可知, 两者的相对误差仅在塑性状态下 $b = 0$ 、半径比 $r_b/r_a = 1.25$ 处是 9.34%, 其余均在 0.04%~4.24% 之间, 二者吻合较好. 综上, 从表 1、表 2、图 4(a)、图 4(b) 说明了特定条件下本文公式的正确性; 本文计算公式考虑了拉压强度不同、拉压模量不同及中间主应力的影响, 可较准确地计算不同材料下厚壁圆筒的弹、塑性极限内压, 故本文所建立的解析解可作为厚壁圆筒安定性分析的统一解.

4.3 厚壁圆筒的应力分布

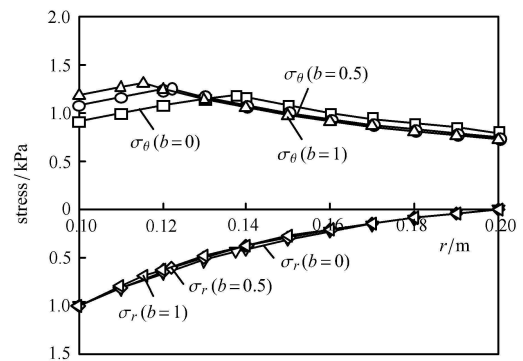
采用文献 [34] 的数据, 其中内半径 $r_a = 0.1$ m, 外半径 $r_b = 0.2$ m, 抗拉强度极限 $\sigma_t = 1.4$ kPa, 拉压强度比 $\alpha = 0.49$, 再附加拉压模量系数 $\beta = 0.5$. 统一强度理论参数 b 为 0, 0.5, 1 时, 由式 (17) 可得弹性极限内压 p_e 分别为 0.70, 0.78, 0.83 kPa, 由式 (26) 可得塑性极限内压 p_p 分别为 1.16, 1.29, 1.36 kPa, 由此可知在内压 $p = 1.00$ kPa 作用下, 取 b 为 0, 0.5, 1 时厚壁圆筒均处于弹塑性状态; 弹性极限状态下径向应力 σ_r 与环向应力 σ_θ 随半径 r 的变化规律如图 5(a) 所示; 弹塑性状态下环向应力 σ_θ 与径向应力 σ_r 随半径 r 的变化规律如图 5(b) 所示; 塑性极限状态下径向应力 σ_r 与环向应力 σ_θ 随半径 r 的变化规律如图 5(c) 所示.

由图 5(a) 可知, 弹性极限状态下, 环向应力 σ_θ 与径向应力 σ_r 均随半径 r 的增大而减小, 随统一强度理论参数 b 的增大而增加; 由图 5(b) 可知, 弹塑性状态下, 塑性区的环向应力 σ_θ 随半径 r 的增大而增大, 弹性区的环向应力 σ_θ 随半径 r 的增大而减小, 塑性区及弹性区的径向应力 σ_r 均随半径 r 的增大而减小, 塑性区半径 r_c 随着统一强度理论参数 b 的增大而减小, 环向应力的峰值随着统一强度理论参数 b 的增大而增大, b 的值越大, 对应 π 平面的极限线范围越大, 中间主应力效应越强, 材料的强度越高, 故塑性区半径 r_c 减小, 环向应力的峰值越大; 由图 5(c) 可知, 塑性极限状态下, 环向应力 σ_θ 随半径 r 的增大而增大, 径向应力 σ_r 随半径 r 的增大而减小, 环向应力 σ_θ 与径向应力 σ_r 均随着统一强度理论参数 b 的增大而增大, 说明随着 b 的增大极限内压增加, 从而使环向应力 σ_θ 和径向应力 σ_r 增加.



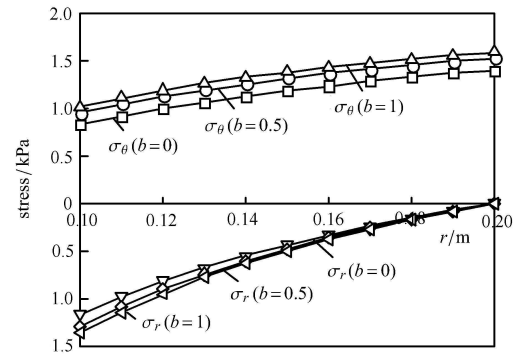
(a) 弹性极限状态时应力分布

(a) Stress distribution in elastic limit state



(b) 弹塑性状态时应力分布

(b) Stress distribution in elastic-plastic state



(c) 塑性极限状态时应力分布

(c) Stress distribution in plastic limit state

图 5 弹、塑性极限状态下应力分布

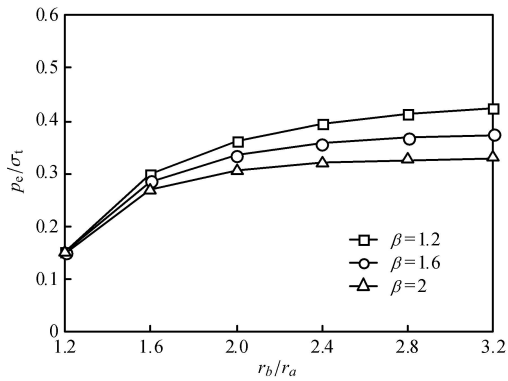
Fig. 5 Stress distribution in elastic and plastic limit state

4.4 弹性极限内压的参数分析

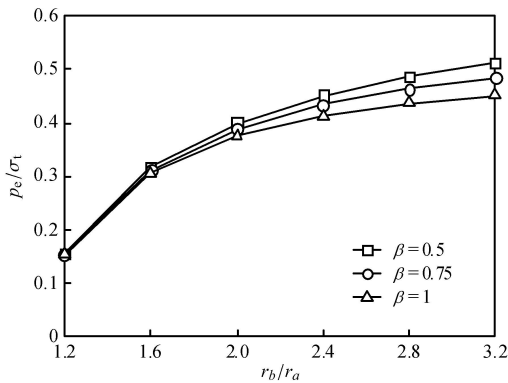
采用式 (17) 分析 p_e/σ_t 随半径比 r_b/r_a 、统一强度理论参数 b 、拉压强度比 α 与材料拉压模量系数 β 的变化规律, 结果如图 6 所示.

由图 6 可以看出, 当厚壁圆筒的材料一定时, p_e/σ_t 随 r_b/r_a 的增大而增大, 如令 $\beta = 1.6$, 当 r_b/r_a

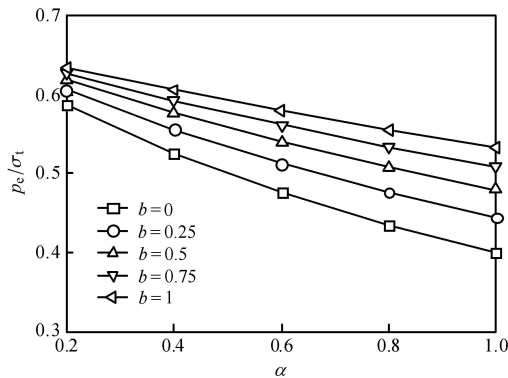
从 1.6 增大到 2 时 p_e/σ_t 增大了 17.51%，但 r_b/r_a 增大到一定值后， p_e/σ_t 的变化趋势逐渐趋于平稳，说明不能仅仅通过增加壁厚来提高厚壁圆筒的弹性极限内压；当厚壁圆筒的内外半径一定，材料拉压强度比 α 、统一强度理论参数 b 不变时， p_e/σ_t 随 β 的增大而减小，如令 $r_b/r_a = 2.4$ ， β 从 1 增大到 1.6 时 p_e/σ_t 减小了 13.78%，且随着壁厚的增加， β 对 p_e/σ_t 的影响越显著。由图 6(c) 和图 6(d) 可知， p_e/σ_s 随 b 的增大而增加，如令 $\beta = 1.6$ 、 $\alpha = 0.4$ ， b 从 0 变化到 1 时



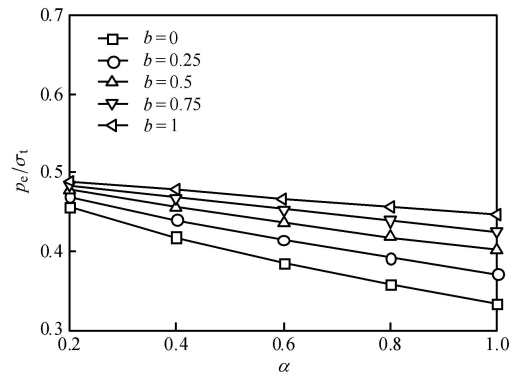
(a) $\alpha = 1, b = 0, \beta > 1$



(b) $\alpha = 1, b = 0, \beta \leq 1$



(c) $r_b/r_a = 2, \beta = 0.5$



(d) $r_b/r_a = 2, \beta = 1.6$

图 6 p_e/σ_t 与 $r_b/r_a, \alpha, b, \beta$ 间的关系

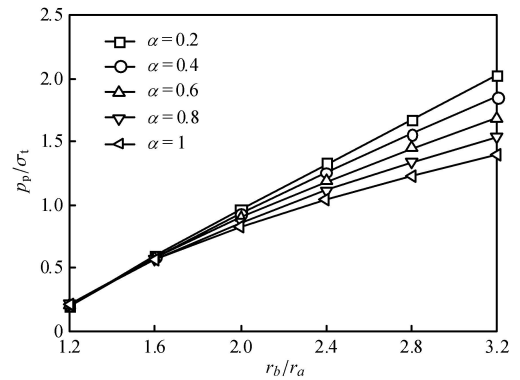
Fig. 6 Correlation of p_e/σ_t with $r_b/r_a, \alpha, b$ and β

p_e/σ_t 增大了 14.30%；随 α 的增大而减小，如令 $\beta = 1.6, b = 0.5, \alpha$ 从 0.6 变化到 1 时 p_e/σ_t 减小了 8.05%，也就是说中间主应力、材料拉压强度不同均显著影响厚壁圆筒的弹性极限承载能力。因此，对厚壁圆筒进行弹性极限分析时应考虑材料的拉压强度不同、拉压模量不同及中间主应力的影响。

4.5 塑性极限内压的参数分析

由式 (26) 可知，塑性极限内压 p_p/σ_t 与半径比 r_b/r_a 、统一强度理论参数 b 、拉压强度比 α 均有关，其变化规律如图 7 所示。

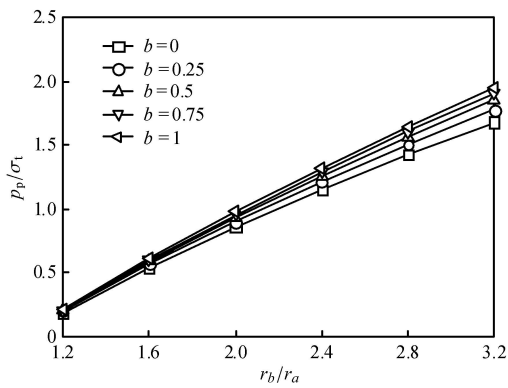
由图 7(a) 可知， p_p/σ_t 随 α 的增大而减小，随 r_b/r_a 的增大而增大；令 $r_b/r_a = 2, \alpha$ 从 0.6 变化到 1 时 p_p/σ_t 减小了 7.78%，令 $\alpha = 0.4, r_b/r_a$ 从 1.6 变化到 2 时 p_p/σ_t 增大了 59.15%；当 r_b/r_a 增大到一定值时， p_p/σ_t 的增长趋势逐渐变缓，增加壁厚已不能明



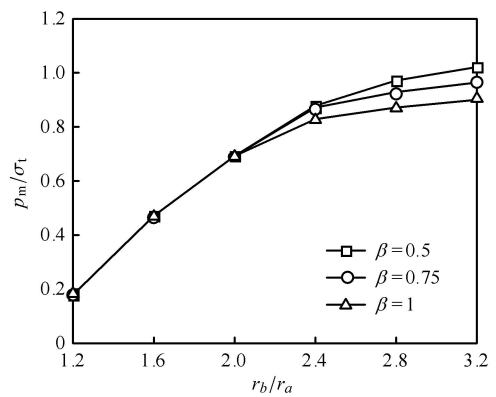
(a) $b = 0.5$

图 7 p_p/σ_t 与 $r_b/r_a, \alpha, b$ 间的关系

Fig. 7 Correlation of p_p/σ_t with $r_b/r_a, \alpha$ and b



(b) $\alpha = 0.4$



(b) $\alpha = 1, b = 0, \beta \leq 1$

图 7 p_p/σ_t 与 $r_b/r_a, \alpha, b$ 间的关系 (续)

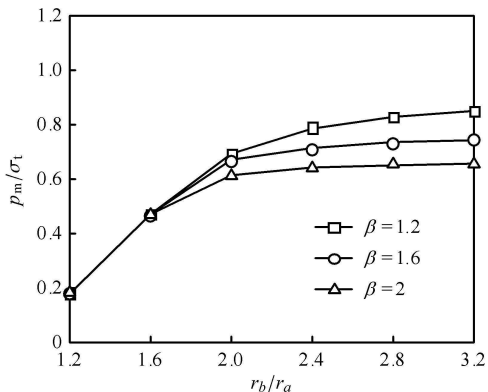
Fig. 7 Correlation of p_p/σ_t with $r_b/r_a, \alpha$ and b (continued)

显提高厚壁圆筒的塑性极限承载能力, 可由此选择合理壁厚. 由图 7 (b) 可知, p_p/σ_t 随 b 的增大而增加, 令 $r_b/r_a = 2.4$, b 从 0 变化到 1 时 p_p/σ_t 增大了 14.71%, 因此实际工程中应根据实验确定 b 值以选取合适的强度准则, 使厚壁圆筒的受力情况更接近实际.

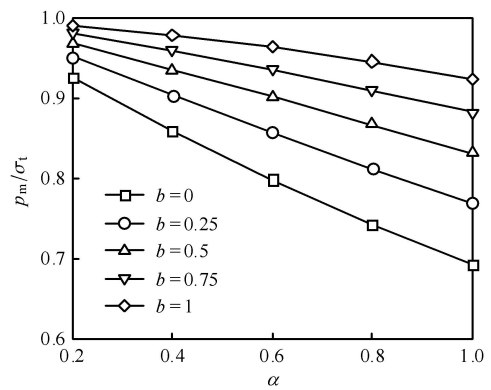
4.6 安定极限内压的参数分析

采用式 (26)、式 (30) 及式 (31) 分析 p_m/σ_t 随半径比 r_b/r_a 、统一强度理论参数 b 、拉压强度比 α 与拉压模量系数 β 的变化规律, 结果如图 8 所示.

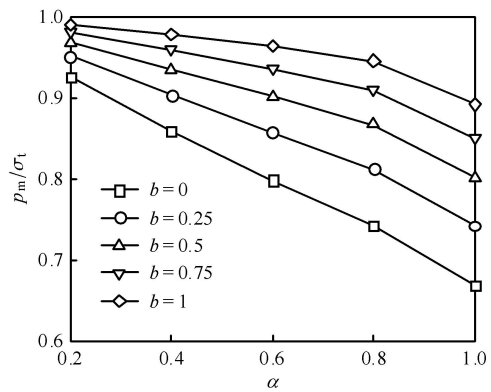
由图 8(a) 和图 8 (b) 可得, 对同一材料的厚壁圆筒, p_m/σ_t 随 r_b/r_a 的增大而增大, 如令 $\beta = 1.6$, r_b/r_a 从 1.6 增大到 2 时 p_m/σ_t 增大了 42.28%, 当 r_b/r_a 增大到一定值后, p_m/σ_t 逐渐趋于平稳; 在其他条件不变的情况下, 一定壁厚范围内, 安定极限内压 p_m/σ_t 的值与 β 无关, 当壁厚增加到一定值后, p_m/σ_t 随 β 的增大而减小, 如令 $r_b/r_a = 2.4$, β 从 1 增大到 1.6 时 p_m/σ_t 减小了 13.78%. 由图 8(c) 和图 8 (d) 可得,



(a) $\alpha = 1, b = 0, \beta > 1$



(c) $r_b/r_a = 2, \beta = 0.5$



(d) $r_b/r_a = 2, \beta = 1.6$

图 8 p_m/σ_t 与 $r_b/r_a, \alpha, b, \beta$ 间的关系

Fig. 8 Correlation of p_m/σ_t with $r_b/r_a, \alpha, b$ and β

p_m/σ_t 随 b 的增大而增大, 如令 $\beta = 1.6, \alpha = 0.4$, b 从 0 变化到 1 时 p_m/σ_t 增大了 13.90%, 考虑中间主应力效应使材料的潜能得到更充分发挥; 当 b, β 及 r_b/r_a 不变时, p_m/σ_t 随 α 的增大而减小, 如令 $\beta = 1.6, b = 0.5, \alpha$ 从 0.6 变化到 1 时 p_m/σ_t 减小了 11.03%, 说明考虑拉压强度比时可增大安定极限内压 p_m/σ_t

从而充分利用材料的潜能.

5 结 论

(1) 基于双剪统一强度理论, 并考虑中间主应力效应及材料拉压强度和拉压模量不同的影响, 本文得到内压作用下厚壁圆筒的弹性极限内压、塑性极限内压及安定极限内压的统一解. 通过参数变化, 该解可退化为拉压模量相等及不同屈服准则的解析解; 通过与文献对比验证, 说明了本文计算公式的正确性.

(2) 弹性极限内压、塑性极限内压与安定极限内压均随半径比 r_b/r_a 的增大而增加; 当壁厚增大到一定值后, 半径比对弹性极限内压、塑性极限内压及安定极限内压的影响逐渐趋于平稳, 因此实际工程中可根据该变化规律来选择合理壁厚.

(3) 弹性极限内压、塑性极限内压与安定极限内压均随拉压强度比 α 的增大而减小, 说明不考虑拉压强度的不同会使极限内压的计算值偏小; 随强度理论参数 b 的增大而增加, 说明考虑中间主应力的影响可使厚壁圆筒的受力更接近实际, 充分发挥材料的性能; 弹性极限内压随拉压模量系数 β 的增大而减小, 壁厚在一定范围内时, 拉压模量系数 β 对安定极限内压无影响, 当壁厚增加到一定值后, 安定极限内压随拉压模量系数 β 的增大而减小, 说明当 $\beta \leq 1$ 时考虑拉压模量的不同可提高极限内压值以便充分利用材料的性能, $\beta \geq 1$ 时不考虑拉压模量的不同使计算值偏大从而导致事故的发生; 因此对厚壁圆筒进行安定性分析时应考虑材料的拉压强度差异、拉压模量不同及中间主应力的影响.

本文所推导的厚壁圆筒极限内压统一解是针对一般材料的通用解, 仅考虑了材料拉压强度、拉压模量的不同, 且假定材料符合理想弹塑性模型, 针对具体材料的特性如应变硬化及 Bauschinger 效应等, 可在此基础上进行拓展研究. 对于公式的验证, 本文计算结果仅与已有文献的理论、相关试验及 FLAC、ABAQUS 数值软件模拟结果进行了对比分析, 对于同时考虑拉压强度不同、拉压模量不同及中间主应力等因素的验证分析, 有待借助 FLAC 或 ABAQUS 软件的二次开发模拟进一步全面验证.

参 考 文 献

1 Sharma R, Aggarwal AK, Sharma S, et al. Thermo creep transition in functionally graded thick-walled circular cylinder under external pressure. *Annals of the Faculty Engineering Hunedoara*

International Journal of Engineering, 2014, 12(4): 335-342

- 2 Zamani J, Soltani B, Aghaei M. Analytical investigation of elastic thin-walled cylinder and truncated cone shell intersection under internal pressure. *Journal of Pressure Vessel Technology*, 2014, 136(5): 051201
- 3 王建梅, 苗克军, 徐俊良等. 非均匀载荷下厚壁圆筒稳态蠕变应力的计算. *西安交通大学学报*, 2015, 49(9): 8-13 (Wang Jianmei, Miao Kejun, Xu Junliang, et al. Steady-state creep stress calculation of thick-walled cylinder under non-uniform load. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2015, 49(9): 8-13 (in Chinese))
- 4 Zhu Q, Zhao JH, Zhang CG, et al. Elastic-brittle-plastic analysis of double-layered combined thick-walled cylinder under internal pressure. *Journal of Pressure Vessel Technology*, 2016, 138(1): 011201
- 5 Zare HR, Darijani H. A novel autofrettage method for strengthening and design of thick-walled cylinders. *Materials & Design*, 2016, 105: 366-374
- 6 Pankaj T. Elastic-plastic transition stresses in a transversely isotropic thick-walled cylinder subjected to internal pressure and steady-state temperature. *Thermal Science*, 2009, 13(4): 107-118
- 7 李伟. 基于有限元法的超高压容器设计与优化. [硕士论文]. 包头: 内蒙古科技大学, 2014 (Li Wei. The design and optimization of ultra-high pressure vessel based on FEM. [Master Thesis]. Baotou: University of Science and Technology of the Inner Mongol, 2014 (in Chinese))
- 8 邱临源, 苏东川, 王东辉等. 反应堆压力容器管座过盈量对应力的影响研究. *核动力工程*, 2015, 36(s2): 131-134 (Kuang Linyuan, Su Dongchuan, Wang Donghui, et al. Effect of interference tolerance on stress of penetration of reactor pressure vessel. *Nuclear Power Engineering*, 2015, 36(s2): 131-134 (in Chinese))
- 9 朱倩, 赵均海, 张常光等. 双层组合厚壁圆筒弹脆塑性极限内压统一解. *工程力学*, 2015, 32(9): 68-75 (Zhu Qian, Zhao Junhai, Zhang Changguang, et al. Elastic-brittle-plastic unified solutions of limit internal pressure for double-layered combined thick-walled cylinder. *Engineering Mechanics*, 2015, 32(9): 68-75 (in Chinese))
- 10 焦健. 超高压反应管爆破压力试验研究. [硕士论文]. 广州: 华南理工大学, 2015 (Jiao Jian. The experimental study on burst pressure of UHP reaction tube. [Master Thesis]. Guangzhou: South China University of Technology, 2015 (in Chinese))
- 11 朱瑞林, 朱国林. 热预应力自增强厚壁圆筒研究. *机械工程学报*, 2016, 52(17): 168-175 (Zhu Ruilin, Zhu Guolin. Study on autofrettaged thick-walled cylinders with thermal pre-stresses. *Journal of Mechanical Engineering*, 2016, 52(17): 168-175 (in Chinese))
- 12 徐栓强, 俞茂宏. 统一强度准则下厚壁圆筒的弹脆塑性承载能力分析. *力学季刊*, 2004, 25(4): 490-495 (Xu Shuanqiang, Yu Maohong. Elasto-brittle-plastic carrying capacity analysis for a thick walled cylinder under unified theory criterion. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2004, 25(4): 490-495 (in Chinese))
- 13 徐栓强, 俞茂宏. 厚壁圆筒安定问题的统一解析解. *机械工程学报*, 2004, 40(9): 23-27 (Xu Shuanqiang, Yu Maohong. Unified analytical solution to shakedown problem of thick-walled cylinder. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2004, 40(9): 23-27 (in Chinese))
- 14 杨宇宙, 钱林方, 徐亚栋等. 复合材料厚壁圆筒的疲劳损伤研究. *应用力学学报*, 2013, 30(3): 378-383 (Yang Yuzhou, Qian Linfang,

- Xu Yadong, et al. Fatigue failure analysis of composite material tube. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2013, 30(3): 378-383 (in Chinese))
- 15 中华人民共和国住房和城乡建设部. GB50010-2010 混凝土结构设计规范. 北京: 中国建筑工业出版社, 2010 (The People's Republic of China Ministry of Housing and Urban-Rural Development. GB 50010-2010 Code for design of concrete structures. Beijing: China Construction Industry Publishing House, 2010 (in Chinese))
- 16 何晓婷. 拉压不同模量弹性结构的非线性力学行为研究. [博士学位论文]. 重庆: 重庆大学, 2007(He Xiaoting. Study on nonlinear mechanics behavior of elastic structure with different tension and compression moduli. [PhD Thesis]. Chongqing: Chongqing University. College of Civil Engineering, 2007 (in Chinese))
- 17 杨钊, 陈海明, 王丽欣. 材料拉压不同模量及理想塑性的圆筒变形分析. 地下空间与工程学报, 2009, 5(2): 239-243 (Yang Zhao, Chen Haiming, Wang Lixin. Analysis on the deformation of cylinder in perfectly plastic material with different elastic modulus in tension and compression. *Chinese Journal of Underground Space and Engineering*, 2009, 5(2): 239-243 (in Chinese))
- 18 殷有泉, 陈朝伟. 软化材料厚壁筒的解析解及其稳定性分析. 力学学报, 2010, 42(1): 56-64 (Yin Youquan, Chen Chaowei. The analytical solutions of thick-walled cylinder of softening material and its stability. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2010, 42(1): 56-64 (in Chinese))
- 19 陈四利, 李艳宇, 张精禹. 基于三参数双 τ^2 强度理论的厚壁圆筒极限压力分析. 沈阳工业大学学报, 2016, 38(5): 556-559 (Chen Sili, Li Yanyu, Zhang Jingyu. Limit stress analysis for thick-wall cylinder based on triparameter and twin τ^2 strength theory. *Journal of Shenyang University of Technology*, 2016, 38(5): 556-559 (in Chinese))
- 20 胡向东, 舒畅, 余思源. 均布荷载下抛物线形 FGM 冻结壁弹塑性解. 煤炭学报, 2012, 37(3): 379-384 (Hu Xiangdong, Shu Chang, She Siyuan. Elasto-plastic analytical solution for functionally graded material frozen soil wall with parabolic property under uniform load. *Journal of China Coal Society*, 2012, 37(3): 379-384 (in Chinese))
- 21 胡向东, 舒畅. 考虑 FGM 特性的双排管竖井冻结壁应力场分析. 工程力学, 2014, 31(1): 145-153 (Hu Xiangdong, Shu Chang. Stress field analysis of functionally graded material frozen soil wall in double-row-pipe shaft freezing. *Engineering Mechanics*, 2014, 31(1): 145-153 (in Chinese))
- 22 Zhu Ruilin, Zhu Guolin. On autofrettage of cylinders by limiting circumferential residual stress based on Mises yield criterion. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2013, 51(3): 697-710
- 23 钱凌云, 刘全坤, 王成勇等. 厚壁圆筒自增强压力的优化分析. 中国机械工程, 2012, 23(4): 474-479 (Qian Lingyun, Liu Quankun, Wang Chengyong, et al. Optimization analysis of autofrettage pressure for thick walled cylinder. *China Mechanical Engineering*, 2012, 23(4): 474-479 (in Chinese))
- 24 赵均海, 张永强, 李建春等. 拉压强度不等材料的厚壁圆筒的统一极限解. 力学与实践, 1999, 21(6): 45-47 (Zhao Junhai, Zhang Yongqiang, Li Jianchun, et al. Unified limit solutions of materials with different tension and compression strengths. *Mechanics in Engineering*, 1999, 21(6): 45-47 (in Chinese))
- 25 陈昌富, 肖淑君. 基于统一强度理论考虑拉压模量不同散体材料桩承载力计算. 工程力学, 2007, 24(10): 105-111 (Chen Changfu, Xiao Shujun. Bearing capacity of aggregate pile with different ratio of tension modulus to compression modulus based on unified strength theory. *Engineering Mechanics*, 2007, 24(10): 105-111 (in Chinese))
- 26 曹雪叶, 赵均海, 李艳等. 不同拉压特性的厚壁球壳分析. 应用力学学报, 2016, 33(3): 378-383 (Cao Xueye, Zhao Junhai, Li Yan, et al. Analysis of thick-walled spherical shell with different behaviour in tension and compression. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2016, 33(3): 378-383 (in Chinese))
- 27 Yu MH. Unified Strength Theory and its Applications. Berlin: Springer Press, 2004
- 28 徐秉业, 刘信声. 应用弹塑性力学. 北京: 清华大学出版社, 1995 (Xu Bingye, Liu Xinseng. Application of Elastic-Plastic Mechanics. Beijing: Tsinghua University Press, 1995 (in Chinese))
- 29 阿姆巴尔楚米扬. 不同模量弹性理论. 郭瑞峰, 张允真译. 北京: 中国铁道出版社, 1986 (Amu Barr Chu Miyang C A. Elastic Theory with Different Moduli in Tension and Compression. Wu Ruifeng, Zhang Yunzhen, Trans. Beijing: China Railway Press, 1986 (in Chinese))
- 30 陈子荫. 围岩力学分析中的解析方法. 北京: 煤炭工业出版社, 1994 (Chen Ziyin. Analytical Method for Rock Mechanical Analysis. Beijing: China Coal Industry Publishing House, 1994 (in Chinese))
- 31 俞茂宏. 双剪理论及其应用. 北京: 科学出版社, 1998 (Yu Mao-hong. Twin-Shear Theory and Its Applications. Beijing: Science Press, 1998 (in Chinese))
- 32 赵均海, 朱倩, 张常光等. 基于统一强度理论的组合厚壁圆筒弹塑性统一解. 固体力学学报, 2014, 35(1): 63-70 (Zhao Junhai, Zhu Qian, Zhang Changguang, et al. Elastic-plastic unified solutions for combined thick wall cylinder based on unified strength theory. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2014, 35(1): 63-70 (in Chinese))
- 33 邹韶明, 朱瑞林. 统一强度理论在厚壁圆筒自增强中的应用. 机械科学与技术, 2013, 32(8): 1200-1206 (Zou Shaoming, Zhu Ruilin. Application of the unified strength theory in autofrettage of the thick wall cylinder shell. *Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering*, 2013, 32(8): 1200-1206 (in Chinese))
- 34 Lin C, Li YM. A return mapping algorithm for unified strength theory model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2015, 104(8): 749-766
- 35 Wang LZ, Zhang YQ. Plastic collapse analysis of thin-walled pipes based on unified yield criterion. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2011, 53(5): 348-354
- 36 Yu MH, Li JC. Computational Plasticity. Hangzhou: Zhejiang University Press, 2012