

# 基于能量等效原理的应变局部化分析： I. 一维解析解<sup>1)</sup>

武守信<sup>\*,†,2)</sup> 魏吉瑞<sup>\*,†</sup> 杨舒蔚<sup>\*,†</sup>

<sup>\*</sup>(西南交通大学土木工程学院桥梁系, 成都 610031)

<sup>†</sup>(交通隧道工程教育部重点实验室, 成都 610031)

**摘要** 基于热力学第一定律和非局部塑性理论, 提出了一种求解应变局部化问题的非局部方法. 对材料的每一点定义了局部和非局部两种状态空间, 局部状态空间的内变量通过非局部权函数映射到非局部空间, 成为非局部内变量. 在应变软化过程中, 局部状态空间中的塑性变形服从正交流动法则, 材料的软化律在非局部状态空间中被引入. 通过两个状态空间的塑性应变能耗散率的等效, 得到了应变软化过程中明确定义的局部化区域以及其中的塑性应变分布. 应用本方法导出了一维应变局部化问题的解析解. 解析解表明, 应变局部化区域的尺寸只与材料内尺度有关; 对于高斯型非局部权函数, 局部化区域的尺寸大约是材料内尺度的 6 倍. 一维算例表明, 局部化区域的塑性应变分布以及载荷-位移曲线仅与材料参数和结构几何尺寸有关, 变形局部化区域的尺寸随着材料内尺度的减小而减小, 同时塑性应变也随着材料内尺度的减小变得更加集中. 当内尺度趋近于零时, 应用本文方法得到的解与采用传统的局部塑性理论得到的解相同.

**关键词** 应变局部化, 非局部塑性, 内尺度, 网格相关性, 有限元

中图分类号: O344.3, TU501 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-16-328

## ANALYSIS OF STRAIN LOCALIZATION BY ENERGY EQUIVALENCE: I. ONE-DIMENSIONAL ANALYTICAL SOLUTION<sup>1)</sup>

Wu Shouxin<sup>\*,†,2)</sup> Wei Jirui<sup>\*,†</sup> Yang Shuwei<sup>\*,†</sup>

<sup>\*</sup>(Department of Bridge Engineering, School of Civil Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

<sup>†</sup>(Key Laboratory of Transportation Tunnel Engineering of Ministry of Education, Chengdu 610031, China)

**Abstract** Based on the first law of thermodynamics and the nonlocal plasticity theories, a new approach is proposed to solve the strain localization problems induced by strain softening. For each material point, two state spaces, local and nonlocal state spaces, are defined such that the local internal variable can be mapped, from the local state space by integral transformation with the nonlocal weighting function, into the nonlocal internal variable in the nonlocal state space. During strain softening, the plastic deformation follows the normal flow rule in the local state space and the softening law is introduced in the nonlocal state space. It is assumed that the strain softening is a global material behavior and the plastic energy dissipation within the entire material body is always positive. However, the balance of momentum is still satisfied locally. By equating the rates of the plastic energy dissipation in the two state spaces during strain softening,

2016-11-11 收稿, 2017-03-20 录用, 2017-03-21 网络版发表.

1) 教育部留学回国人员科研启动基金 (201250300) 和西南交通大学土木工程学院基础研究创新计划基金资助项目.

2) 武守信, 副教授, 博士, 主要研究方向: 桥梁和岩土结构的有限元分析和本构关系. E-mail: swu@home.swjtu.edu.cn

**引用格式:** 武守信, 魏吉瑞, 杨舒蔚. 基于能量等效原理的应变局部化分析: I. 一维解析解. 力学学报, 2017, 49(3): 667-676

Wu Shouxin, Wei Jirui, Yang Shuwei. Analysis of strain localization by energy equivalence: I. One-dimensional analytical solution. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, 49(3): 667-676

the localization zone and the plastic strain distribution become well-defined. Analytical solution for the one-dimensional strain localization is developed, and it is well shown that the plastic strain distribution and load-displacement curves are well-defined by the material properties, such as the softening modulus and internal length scale, as well as the geometry of the material body. For the Gaussian-type weighting functions the width of the localization zone is approximately six times the internal length scale. Numerical example demonstrates that the size of the localization zone decreases as the internal length scale is reduced, and the distribution of the plastic strain in the localization zone becomes more concentrated when the internal length scale becomes smaller. As the internal length scale approaches to zero, the solution reduces to the one predicted by the conventional local plasticity theory.

**Key words** strain localization, nonlocal plasticity, internal length scale, mesh-dependence, finite element

## 引 言

一些岩土工程材料,如岩石、混凝土、土体,当加载至接近破坏时,会在某些区域呈现出高度集中的塑性变形. 这些具有集中塑性变形的区域通常呈带状<sup>[1-8]</sup>,因此这种现象通常叫做“应变局部化 (strain localization)”或“剪切带局部化 (shear band localization)”. 伴随应变局部化出现的是材料强度随着塑性变形的增大而减小,这种现象一般叫做“应变软化 (strain softening)”. 尽管应变局部化的机理因材料的不同而不同,但由应变软化导致的应变局部化是岩土材料中最常见的.

对剪切带局部化的数值模拟已经有 30 多年的历史. 目前普遍认为在经典连续介质力学的框架中采用应变软化模型对应变局部化进行数值模拟会导致病态的、具有网格相关性的结果<sup>[9-11]</sup>. 这种网格相关性主要表现在两个方面:一是当采用的有限元网格尺寸变小时,应变局部化区域的尺寸(或剪切带的厚度)也随之变小,当网格尺寸趋于零时,剪切带的厚度也趋于零;二是载荷-位移曲线与有限元网格尺寸密切相关,对于特定问题没有唯一解. 造成这种问题的根本原因可以从两个方面理解:根据数学的观点,当采用应变软化模型时,基于经典连续介质力学理论建立的控制微分方程会失去其椭圆性<sup>[12-14]</sup>,进而导致相应的边值问题不适定;根据物理的观点,经典连续介质力学采用逐点描述材料行为的方式,没有包含材料的内尺度信息,因此它不适合用来描述非均匀变形.

为了克服网格相关性,学者们提出了很多理论或模型. 这些模型大体包括:扩展的连续介质力学模型<sup>[9-10,12]</sup>、梯度塑性模型<sup>[14]</sup>和非局部塑性模型<sup>[15-20]</sup>. 其中第一类模型通过引入附加的形函数或

扩展的应变场来允许应变局部化的形成,后两类模型通过不同的方法在材料本构关系中引入了材料内尺度. 所有这些模型的共同目的都是致力于恢复控制微分方程的椭圆性,从而使应变软化边值问题变得适定,最终使局部化区域以及其中的塑性应变分布的解成为一个在物理上客观的量.

在上述这些模型中,非局部塑性模型提供了一种在本构关系模型中引入材料内尺度的直接、并且是自然的方法,从而克服了连续介质力学的根本缺陷. 这一类模型是基于 Eringen<sup>[19]</sup>在 1960 年代提出的非局部连续介质力学的概念,并由 Bažant 和 Lin<sup>[20]</sup>首先用于应变软化行为的模拟. 它的基本假设是,材料某一点的屈服应力不仅与这一点的内变量有关,而且与材料其他点的内变量有关. 根据这个假设,在最早由 Bažant 和 Lin<sup>[20]</sup>提出的非局部模型(称之为一般非局部塑性模型)中,材料一点的屈服应力表示为该点非局部内变量的函数,而该点的非局部内变量是材料各点局部内变量的加权平均值. 一般非局部塑性模型虽然在表达形式上简洁,但是在应用中仍然导致了与网格相关的数值模拟结果<sup>[21]</sup>. 为了改进这一模型,Vermeer 和 Brinkgreve<sup>[15]</sup>以及 Strömberg 和 Ristinmaa<sup>[16]</sup>先后提出了混合非局部塑性模型. 在这一模型中,屈服函数中的非局部内变量被代之以局部内变量和非局部内变量的线性组合. 当混合非局部参数大于 1 时,根据这一模型求解出的塑性应变分布以及局部化区域的尺寸与网格无关. Luzio 和 Bažant<sup>[21]</sup>通过谱分析证明了混合非局部模型的确能够导致与网格无关的解,而采用一般非局部塑性模型仍然不能克服网格相关性. Lü 等<sup>[17-18]</sup>采用谱分析的方法对这一模型做了进一步的改进. Jirásek 和 Rolshoven<sup>[22]</sup>详细比较了各种不同形式的非局部塑性模型以及混合非局部塑性模型在模拟应变软化行为

时对于网格相关性的矫正效果.

然而, 对于一般非局部塑性模型未能导致网格无关的结果的根本原因仍然没有得到很好的理解. 一般非局部塑性模型源于 Eringen<sup>[19]</sup> 的非局部连续介质力学理论, 其物理基础和数学框架是坚实的. Nilsson<sup>[23]</sup>, Borino 等<sup>[24]</sup>, de Sciarra<sup>[25]</sup>, 以及 Nguyen<sup>[26]</sup> 还从热力学和最大塑性耗散功方面论证了非局部塑性模型与热力学第一和第二定律是一致的. 理论上, 一般非局部塑性模型应该能够导致网格无关的结果, 而实际应用上并没有实现最初提出这一模型的目的. 因此, 关于一般非局部塑性模型对于网格相关性的矫正机理仍需进一步研究.

本工作从一个新的角度提出一种应用一般非局部塑性模型矫正网格相关性的方法. 这一方法应用状态空间理论, 定义局部和非局部状态空间, 通过 2 个状态空间的能量等效原理求解塑性应变的分布以及局部化区域, 从而得到客观的、具有物理意义的解. 由于这一方法在一维问题中可以得到解析解, 而对于二维问题则只能采用有限元方法得到数值解, 因此分成两部分介绍这一方法, 本文为第 1 部分. 本文组织如下: 第 1 节定义局部和非局部两个不同的状态空间; 第 2 节处理两个状态空间之间的能量等效关系; 第 3 节导出局部和非局部状态空间中内变量的非局部变换公式, 并讨论软化规律、流动法则, 以及非局部内变量的求解方法; 第 4 节导出一维问题的解析解; 第 5 节给出结论. 本文的工作基于小变形假设.

## 1 局部和非局部状态空间

状态空间的概念已被广泛应用于现代控制理论, 也用于弹性和热弹性问题的求解<sup>[27-28]</sup>. 本文应用这个概念建立非局部塑性模型.

对于所占空间区域为  $\Omega$  的弹塑性材料, 在区域边界  $\partial_g\Omega$  上作用有指定的力, 在边界  $\partial_u\Omega$  上作用有指定的位移 ( $\partial_g\Omega \cap \partial_u\Omega = \emptyset$ ,  $\emptyset$  为空集). 假设  $x_0$  代表时间  $t = 0$  时某材料点初始构形的坐标, 此材料点的局部状态空间由下列状态向量确定

$$\mathbf{S}^T = [\mathbf{u}^T, \boldsymbol{\sigma}^T, (\boldsymbol{\varepsilon}^e)^T, (\boldsymbol{\varepsilon}^p)^T, \boldsymbol{\eta}^T] \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{u}$  为位移矢量;  $\boldsymbol{\sigma}$  为应力矢量;  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  和  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  分别表示弹性和塑性应变矢量;  $\boldsymbol{\eta}$  为内变量矢量; 上标“T”表示矩阵的转置. 在局部状态空间中并没有引入材料内尺度. 对于相同的材料点  $x_0$ , 它的非局部状态空间

定义为

$$\tilde{\mathbf{S}}^T = [\tilde{\mathbf{u}}^T, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T, (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^e)^T, (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)^T, \tilde{\boldsymbol{\eta}}^T] \quad (2)$$

其中“~”表示对应于局部状态量的非局部状态量.

在非局部状态空间中, 在材料本构关系中引入了材料内尺度. 但其他材料参数, 如几何形状和边界条件, 则与非局部状态空间相应的参数相同. 因此, 当材料内尺度趋近于零时, 非局部状态空间就与局部状态空间重合.

向量  $\mathbf{S}$  和  $\tilde{\mathbf{S}}$  的分量分别是空间区域  $\Omega$  中材料点  $x_0$  在局部状态空间和非局部状态空间中的状态变量. 在不引起混淆的情况下, 本文后面矩阵符号和相应的张量符号可以互换使用. 需要注意的是, 非局部状态空间  $\tilde{\mathbf{S}}$  中的状态变量是考虑了材料内尺度和非局部效应后的状态变量. 在物理和数学意义上,  $\tilde{\mathbf{S}}$  的分量实际上代表的是某材料点的局部物理量.

## 2 局部和非局部状态空间之间的能量等效关系

对于在域  $\Omega$  中定义的弹塑性率无关材料, 如果假定绝对温度  $\theta$  和质量密度  $\rho$  为常数, 并且没有热辐射和对流发生, 那么, 在局部状态空间中, 热力学第一定律可以表达为<sup>[29-30]</sup>

$$\int_{\Omega} \rho \dot{e} dV = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dV \quad (3)$$

其中,  $e$  为每单位质量的内能. 符号上面的圆点表示对时间的导数. 对于准静态过程, 如果忽略体积力, 那么整个材料的能量守恒定律可以表达为

$$\int_{\partial\Omega} \hat{\mathbf{F}}^T \dot{\mathbf{u}} d\Gamma = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dV \quad (4)$$

其中,  $\hat{\mathbf{F}}$  和  $\mathbf{u}$  分别表示作用在边界  $\partial\Omega$  上的力和位移,  $\Gamma$  表示边界  $\partial\Omega$  的面积. 对于小变形问题, 应变张量可以分解为弹性部分  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  和塑性部分  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ , 即

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p, \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (5)$$

式 (4) 的右端项可以写为

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dV = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e dV + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p dV \quad (6)$$

定义弹性内能变化率  $\dot{U}^e$ 、塑性内能变化率  $\dot{U}^p$  以及总内能变化率  $\dot{U}$  如下

$$\dot{U}^e = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e dV \quad (7a)$$

$$\dot{U}^p = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p dV \quad (7b)$$

$$\dot{U} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dV \quad (7c)$$

则式(6)可以写为

$$\dot{U} = \dot{U}^e + \dot{U}^p \quad (8)$$

作用在边界  $\partial\Omega$  上的外力  $\hat{\mathbf{F}}$  所做的功率  $\dot{W}$  可表示为

$$\dot{W} = \int_{\partial\Omega} \hat{\mathbf{F}}^T \dot{\mathbf{u}} d\Gamma \quad (9)$$

能量方程(4)可以表示为

$$\dot{W} = \dot{U} \quad (10)$$

如第1节所述,对于相同的材料点,存在一个非局部状态空间,在此空间中的应力和应变状态变量考虑了材料内尺度的影响.考虑到对于两个状态空间,输入材料的外力功相等,如果以  $\dot{W}$  表示输入非局部状态空间的外力功,则有

$$\dot{W} = \dot{W} = \int_{\partial\Omega} \hat{\mathbf{F}}^T \dot{\mathbf{u}} d\Gamma \quad (11)$$

类似地,在非局部状态空间中,能量方程(4)可以表示为

$$\int_{\partial\Omega} \hat{\mathbf{F}}^T \dot{\mathbf{u}} d\Gamma = \int_{\Omega} \hat{\boldsymbol{\sigma}}^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dV \quad (12)$$

式(12)的右边代表非局部状态空间总内能的变化率,可以记为  $\dot{U}$ ,即

$$\dot{U} = \int_{\Omega} \hat{\boldsymbol{\sigma}}^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dV \quad (13)$$

根据局部状态空间应变张量的分解,也可以类似地在非局部状态空间中将总应变张量分解为弹性部分和塑性部分

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (14)$$

同样的处理过程,可以得到如下的关系式

$$\dot{U}^e = \int_{\Omega} \hat{\boldsymbol{\sigma}}^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e dV \quad (15a)$$

$$\dot{U}^p = \int_{\Omega} \hat{\boldsymbol{\sigma}}^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p dV \quad (15b)$$

$$\dot{U} = \dot{U}^e + \dot{U}^p \quad (15c)$$

$$\dot{W} = \dot{U} \quad (16)$$

比较式(10)和式(16),则有

$$\dot{U} = \dot{U} \quad (17)$$

本文假定材料在局部和非局部状态空间的总的塑性耗散功率相等,即

$$\dot{U}^p = \dot{U}^p \quad (18a)$$

则由式(17)可得出

$$\dot{U}^e = \dot{U}^e \quad (18b)$$

式(18a)和式(18b)分别表示在非局部状态空间中内能的塑性部分和弹性部分与局部状态空间中的对应部分相等.这两个等式在本文的非局部方法中具有重要的作用.

### 3 非局部变换和内变量的求解

#### 3.1 内变量的非局部变换

为了将非局部状态空间与局部状态空间联系起来,定义材料点  $\mathbf{x}$  在非局部状态空间的非局部内变量  $\tilde{\eta}(\mathbf{x})$  与局部状态空间的内变量  $\eta(\mathbf{x})$  之间的变换如下

$$\tilde{\eta}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}; l) \eta(\boldsymbol{\xi}) dV(\boldsymbol{\xi}) \quad \forall : \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \in \Omega \quad (19)$$

其中,  $w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}; l)$  为核,也称为域  $\Omega$  内的非局部权函数;  $\mathbf{x}$  和  $\boldsymbol{\xi}$  代表域  $\Omega$  中材料点的坐标; 参数  $l$  为材料内尺度.式(19)的积分区域是整个区域  $\Omega$ .这个表达式跟 Eringen<sup>[19]</sup> 所采用的非局部量的表达式相似.关于函数  $w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}; l)$  的特性, Eringen<sup>[19]</sup>, Bažant 及其合作者<sup>[20-21]</sup>, Stromberg 和 Ristinmaa<sup>[16]</sup>, Jirasek 和 Rolshoven<sup>[22]</sup> 以及其他很多学者都讨论过.其主要性质如下:(1)  $w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}; l)$  是一个递减函数,当  $\|\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}\| = 0$  时取最大值( $\|\bullet\|$ 代表向量的长度),并且随着  $\|\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}\|$  的增长,  $w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}; l)$  平滑而迅速地衰减;(2)当  $l \rightarrow 0$  时,  $w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}; l)$  接近为一个  $\delta$  函数,即

$$\lim_{l \rightarrow 0} w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}; l) = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \quad (20a)$$

(3) 权函数  $w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}; l)$  应该使一个均匀场在非局部变换后仍然是一个均匀场,这意味着  $w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}; l)$  必须满足正则化条件

$$\int_{\Omega} w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}; l) dV(\boldsymbol{\xi}) = 1 \quad (20b)$$

这一特性可以通过下式实现<sup>[15]</sup>

$$w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}; l) = \frac{w_{\infty}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}; l)}{\int_{\Omega} w_{\infty}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\zeta}; l) dV(\boldsymbol{\zeta})} \quad (20c)$$



式中, 下脚标“ $\infty$ ”表示当  $\|\xi - \mathbf{x}\| \rightarrow \infty$  时,  $w_\infty(\mathbf{x}, \xi; l)$  趋近于零. 例如, 高斯分布函数

$$w_\infty(\mathbf{x}, \xi; l) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}l)^{n_d}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x} - \xi\|^2}{2l^2}\right) \quad (21)$$

就具备权函数的所有上述特性. 其中  $n_d$  代表域  $\Omega$  的维数. 高斯分布函数具有无限支撑集, 意味着不论材料点与点之间距离多大, 它们之间都会发生相互作用, 但是这种作用会随着  $\|\mathbf{x} - \xi\|/l$  的增大而迅速减小. 一些其他类型的具有有限支撑集的函数也可以作为权函数<sup>[22]</sup>.

### 3.2 一维问题的屈服函数和流动法则

本文只讨论一维问题的屈服函数和流动法则. 在局部状态空间中, 如果域  $\Omega$  中点的应力状态满足屈服准则

$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_{Y0} = 0 \quad (22)$$

则材料在  $\mathbf{x}$  点开始屈服, 即  $\mathbf{x} \in \Omega^p$ , 其中  $\Omega^p$  代表包括所有屈服的材料点的区域. 式 (22) 中,  $\sigma_{Y0}$  表示初始屈服应力. 塑性变形将从这一时刻开始产生并随着进一步的加载而增大. 如果初始屈服后紧跟着应变软化, 则假定在局部状态空间中, 塑性变形服从关联的正交流动法则

$$\dot{\varepsilon}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (23)$$

其中  $\lambda$  为局部状态空间的塑性乘子. 在局部状态空间并没有引入软化律, 而是将在后面的非局部空间引入软化律. 根据大量的试验结果, 对岩石、混凝土和土体的软化行为作如下假设.

(1) 应变软化是一种满足下列条件的全局行为:

当  $\dot{u} = \beta \dot{u}$  并且  $\beta > 0$  时, 有

$$\dot{W} = \dot{U}^e + \dot{U}^p > 0 \text{ 且 } \dot{U}^e < 0 \quad (24)$$

其中,  $\dot{u}$  为作用在边界  $\partial_u \Omega$  上的总位移,  $\beta$  为载荷系数.

(2) 屈服应力  $\sigma_Y$  为非局部内变量  $\bar{\eta}$  在非局部状态空间的特征塑性区域  $\Omega^{cp}$  上的积分的函数. 这里的  $\Omega^{cp}$  不同于局部状态空间中的  $\Omega^p$ .

第 1 个假设意味着整个材料的能量耗散随着边界位移的增大和弹性能的减小总是非负的. 这符合大多数的实验现象和热力学分析<sup>[1,24,31]</sup>. 第 2 个假设是基于一个更加基本的假设, 即应变软化过程的动量平衡是局部满足的而且局部弹性卸载和全局塑性能量耗散是同时发生的<sup>[4-7]</sup>.

一维问题的非局部状态空间的屈服条件和软化规律通过下式引入

$$\tilde{f}(\bar{\sigma}, \bar{\eta}) = |\bar{\sigma}| - \sigma_Y(\bar{\eta}) = 0 \quad (25)$$

$$\sigma_Y(\bar{\eta}) = \sigma_{Y0} + \chi(\bar{\eta}) \quad (26)$$

其中,  $\chi(\bar{\eta})$  表示  $\bar{\eta}$  的负函数, 用来描述屈服应力随内变量的增大而减小,  $\bar{\eta}$  是特征塑性区域  $\Omega^{cp}$  中非局部内变量的平均值

$$\bar{\eta} = \frac{1}{L^{cp}} \int_{\Omega^{cp}} \hat{\eta}(x) dx \quad (27)$$

其中,  $L^{cp}$  为特征塑性区域  $\Omega^{cp}$  的长度.

应该指出,  $\Omega^{cp}$  是与非局部状态空间相关的特征塑性区域, 它是一非零的客观区域, 在此区域中材料发生软化塑性变形, 它的大小取决于材料内尺度和权函数的具体形式.

对于线性应变软化, 定义

$$\bar{E}^{ps} = \text{Const} \quad (28)$$

其中 Const 表示常数, 则  $\chi(\bar{\eta})$  可以简单地表达为

$$\chi(\bar{\eta}) = \bar{E}^{ps} \bar{\eta} \quad (29)$$

其中,  $\bar{E}^{ps}$  是非局部软化模量,  $\bar{E}^{ps} < 0$ . 上标“ps”代表塑性软化 (plastic softening). 对于非线性软化,  $\chi(\bar{\eta})$  具有其他的复杂形式, 本文暂不涉及.

由于非局部状态空间的应力状态  $\bar{\sigma}$  与局部状态空间相应的应力状态  $\sigma$  相同, 方程 (25) 还可以写为

$$\tilde{f}(\sigma, \bar{\eta}) = |\sigma| - \sigma_Y(\bar{\eta}) = 0 \quad (30)$$

塑性加载和卸载遵循 Kuhn-Tucker 互补条件<sup>[7]</sup>

$$\dot{\lambda} \geq 0, \tilde{f}(\sigma, \bar{\eta}) \leq 0 \text{ 且 } \dot{\lambda} \tilde{f}(\sigma, \bar{\eta}) = 0 \quad (31)$$

以及一致性要求

$$\dot{\lambda} \dot{\tilde{f}}(\sigma, \bar{\eta}) = 0 \quad (32)$$

对于塑性加载, 条件  $\dot{\lambda} \geq 0$  变成  $\dot{\lambda} > 0$ , 由此一致性条件 (32) 可简化为

$$\dot{\tilde{f}}(\sigma, \bar{\eta}) = 0 \quad (33)$$

将式 (26)、式 (29) 和式 (30) 代入式 (33) 可以得到

$$\dot{\sigma} = \text{sign}(\sigma) \bar{E}^{ps} \dot{\bar{\eta}} \quad (34)$$

其中

$$\bar{E}^{ps} = \frac{d\chi}{d\bar{\eta}} \quad (35)$$

由于卸载过程中应力是减小的, 因此假设在某一时刻有一弹性试应力  $\sigma^{tr}$  (参看文献 [29]), 则  $\dot{\sigma}$  可以表示为

$$\dot{\sigma} = r^e \dot{\sigma}^{tr} \quad (36)$$

其中,  $r^e$  是一个待确定的系数. 将式 (36) 代入式 (34) 得到

$$r^e = \text{sign}(\sigma) \bar{E}^{ps} \dot{\bar{\eta}} / \dot{\sigma}^{tr} \quad (37)$$

相应的弹性应变率如下

$$\dot{\bar{\epsilon}}^e = \dot{\epsilon}^e = r^e \dot{\epsilon}^{tr} = \text{sign}(\sigma) (\bar{E}^{ps}/E) \dot{\bar{\eta}} \quad (38)$$

在非局部状态空间中, 进一步假设关联正交流动法则仍然适用, 因此有

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \sigma} = \text{sign}(\sigma) \dot{\lambda} \quad (39)$$

在应变硬化或软化律中, 常采用等效塑性应变作为内变量, 即

$$\dot{\bar{\eta}} = \dot{\epsilon}_{eq}^p = \sqrt{\frac{2}{3} (\dot{\epsilon}^p)^T \dot{\epsilon}^p} \quad (40)$$

其中,  $\epsilon_{eq}^p$  代表等效塑性应变. 对于一维问题, 考虑到式 (23), 则有

$$\dot{\bar{\eta}} = |\dot{\epsilon}^p| = \dot{\lambda} \quad (41)$$

相应地, 在非局部状态空间, 也存在下列关系式

$$\dot{\bar{\eta}} = |\dot{\bar{\epsilon}}^p| = \dot{\lambda} \quad (42)$$

由式 (7a) 可知, 在局部状态空间中域  $\Omega^p$  内的塑性性能变化率可以表达为

$$\dot{U}^p = A \int_{\Omega^p} \sigma \dot{\epsilon}^p dx = A \int_{\Omega^p} \sigma \text{sign}(\sigma) \dot{\lambda} dx \quad (43)$$

其中,  $A$  代表一维杆件的截面积. 式 (43) 代入了关联的正交流动法则式 (23). 由于  $\sigma$  和  $\text{sign}(\sigma) \dot{\lambda}$  在区域  $\Omega^p$  内是连续的, 对等式 (43) 右端项应用积分中值定理得到

$$\int_{\Omega^p} \sigma \text{sign}(\sigma) \dot{\lambda} dx = \sigma \text{sign}(\sigma) \dot{\lambda}(x^m) L^p \quad (44)$$

其中,  $x^m$  为  $\Omega^p$  中的某点;  $\dot{\lambda}(x^m)$  代表  $\dot{\lambda}(x)$  在  $\Omega^p$  中的均值;  $L^p$  为  $\Omega^p$  的长度. 合并式 (44) 和式 (43) 可得

$$\dot{\lambda}(x^m) \sigma \text{sign}(\sigma) A = \frac{\dot{U}^p}{L^p} \quad (45)$$

如果  $\dot{U}^p$  为常数, 则当  $L^p \rightarrow 0$  时, 式 (45) 的右端成为一个  $\delta$  序列, 即

$$\lim_{L^p \rightarrow 0} \frac{\dot{U}^p}{L^p} = \dot{U}^p \delta(x) \quad (46)$$

其中  $\delta(x)$  为 Dirac- $\delta$  函数, 定义如下

$$\delta(x) = 0, \text{ for } x \neq 0 \quad (47a)$$

$$\int_{\Omega} \delta(x) dx = 1 \quad (47b)$$

因此, 式 (45) 可以写为

$$\dot{\lambda}(x^m) = \frac{\dot{U}^p \delta(x)}{\sigma \text{sign}(\sigma) A} = \langle \dot{\lambda} \rangle^m \delta(x) \quad (48)$$

其中

$$\langle \dot{\lambda} \rangle^m = \frac{\dot{U}^p}{\sigma \text{sign}(\sigma) A} = \frac{\dot{U} - \dot{U}^e}{\sigma \text{sign}(\sigma) A} \quad (49)$$

一般地, 非局部权函数  $w(x, \xi; l)$  与时间无关, 因此根据式 (41) 和式 (42), 将式 (48) 代入非局部转换关系式 (19) 中可得

$$\dot{\lambda}(x) = \int_{\Omega} w(x, \xi; l) \langle \dot{\lambda} \rangle^m \delta(\xi) d\xi = w(x, x^p; l) \langle \dot{\lambda} \rangle^m \quad (50)$$

其中,  $x^p$  代表局部状态空间中塑性应变不为零的点, 这是因为在局部状态空间中的应变软化会导致塑性应变集中于一点, 所以  $\Omega^p \rightarrow 0$ . 但在非局部状态空间, 塑性区域由式 (50) 确定. 将式 (42) 和式 (50) 代入式 (27), 得到

$$\dot{\bar{\eta}} = \frac{\langle \dot{\lambda} \rangle^m}{L^{cp}} \int_{\Omega^{cp}} w(x, x^p; l) dx = \tilde{I}(x^p) \frac{\langle \dot{\lambda} \rangle^m}{L^{cp}} \quad (51)$$

其中

$$\tilde{I}(x^p) = \int_{\Omega^{cp}} w(x, x^p; l) dx \quad (52)$$

从式 (49)、式 (51)、式 (52) 可以看出, 尽管局部状态空间的塑性乘子为 Dirac- $\delta$  函数的倍数, 非局部状态空间的非局部塑性乘子及其在特征塑性区域中的平均值具有明确定义.

### 3.3 一维问题的解析解

将式 (15a)、式 (38) 和式 (39) 代入式 (15b), 并考虑到式 (51), 可得到非局部状态空间总能量率的表达式

$$\dot{U} = \dot{U}^e + \dot{U}^p = \int_{\Omega} \sigma \dot{\bar{\epsilon}}^e dx + \int_{\Omega} \sigma \dot{\bar{\epsilon}}^p dx = A \langle \dot{\lambda} \rangle^m \sigma \text{sign}(\sigma) \left[ \frac{\bar{E}^{ps}}{E} \frac{L}{L^{cp}} \tilde{I}(x^p) + \tilde{I}(x^p) \right] \quad (53)$$

将式 (49) 代入式 (53) 并且注意到式 (11) 和式 (16), 则有

$$\dot{W} = (\dot{W} - \dot{U}^e) \left[ \frac{\bar{E}^{ps}}{E} \frac{L}{L^{cp}} \tilde{I}(x^p) + \tilde{I}(x^p) \right] \quad (54)$$

假设有一受拉杆件, 如图 1 所示, 左端固结, 对右端施加位移  $\hat{u}$ , 相应的拉力为  $\hat{F}$ . 拉杆中心点有一屈服强度较低的弱区域 (见图 1), 应变局部化首先在此点出现. 设坐标原点也位于左端支撑点, 则有  $x^p = L/2$ . 如果杆件足够长, 则近似地有

$$\tilde{I}(L/2) \approx 1 \quad (55)$$

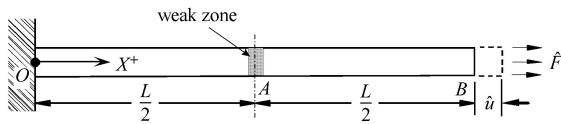


图 1 一维模型问题

Fig.1 One-dimensional model problem

将式 (11) 和式 (7a) 以及式 (55) 代入式 (54) 可得到如下的应力率、非局部状态空间的塑性应变率、弹性应变率以及总应变率的表达式如下

$$\dot{\sigma} = \frac{E}{1 + \frac{E}{\bar{E}^{ps}} \left( \frac{L^{cp}}{L} \right)} \left( \frac{\dot{\hat{u}}}{L} \right) \quad (56)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\hat{\epsilon}}^p &= \left( \frac{\dot{\sigma}}{\bar{E}^{ps}} \right) L^{cp} w(x, L/2; l), & \dot{\hat{\epsilon}}^e &= \frac{\dot{\sigma}}{E} \\ \dot{\hat{\epsilon}} &= \frac{\dot{\sigma}}{E} + \left( \frac{\dot{\sigma}}{\bar{E}^{ps}} \right) L^{cp} w(x, L/2; l) \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

值得注意的是,  $\bar{E}^{ps}$  和  $L^{cp}$  均为材料特性参数:  $\bar{E}^{ps}$  为非局部软化模量, 是基于特征长度  $L^{cp}$  上的平均塑性应变而测得的. 在物理意义上  $L^{cp}$  可以理解为局部化区域的尺寸, 如果权函数具有有限支撑集, 则权函数的零点之间的距离则为局部化区域的尺寸. 对于如下的一维高斯权函数

$$w(x, \xi; l) = \frac{1}{l\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\xi)^2/2l^2} \quad (58)$$

根据统计学的分析, 99.7% 的塑性变形发生在区域  $|x - \xi| < 3l$  中. 当  $|x - \xi| > 3l$ , 塑性变形很小, 可以忽略不计. 从物理意义上, 式 (58) 中的内尺度反映了变形的集中程度, 与局部化区域的尺寸密切相关. 如果把包含 99.7% 的塑性变形的区域作为局部化区域, 则对于高斯型权函数, 特征塑性区域为

$$L^{cp} = 6l \quad (59)$$

文献 [14] 根据高阶梯度塑性理论给出的应变局部化区域的长度是

$$L^{cp} = 2\pi l \quad (60)$$

比较式 (59) 和式 (60) 可知, 由本文理论得到的应变局部化区域的长度和由高阶梯度塑性理论的预测值大体相近.

式 (59) 和式 (60) 表明, 如果非局部权函数为高斯分布形式, 则塑性应变局部化区域的长度  $L^{cp}$  至少是材料内尺度  $l$  的 6 倍. 如果材料的弱区域位于拉杆的中间部位, 即  $x^p = L/2$ , 则式 (55) 满足的条件是  $L/l > 6$ . 由此可知, 式 (56) 和式 (57) 有效范围为  $L/l > 6$ . 如果通过试验测量  $L^{cp}$ , 试件的长度至少要大于材料内尺度的 6 倍才可以得到具有物理意义的非局部软化模量  $\bar{E}^{ps}$ . 对于其他形式的权函数, 内尺度的定义可能不同, 但它与局部化区域长度的关系可以通过类似的方式得到. 需要指出的是, 本文的内尺度是通过非局部权函数引入到材料本构关系模型的. 在物理意义上, 材料内尺度与材料的物质结构以及颗粒的尺寸有关. 不同的本构模型对于材料内尺度的定义不同, 导致内尺度与材料颗粒尺寸的关系也不同. 在 Bažant 和 Pijaudier-Cabot<sup>[32]</sup> 提出的一种非局部连续介质模型中, 局部化区域的长度与材料内尺度近似相同, 他们通过试验得到的材料内尺度是骨料最大尺寸的 2.7 倍. Mühlhaus 和 Vardoulakis<sup>[33]</sup> 通过 X 射线测量沙土双轴试验中形成的剪切带, 所得到的剪切带厚度是颗粒平均直径的 16 倍. 因此, 从材料试验的角度来看, 应变局部化区域的长度  $L^{cp}$  (一维情况) 或剪切带厚度 (二维情况) 应被视为一种可以直接测量的、与材料颗粒尺寸密切相关的材料特性参数, 而材料内尺度则应被视为一种与具体的非局部模型有关的间接参数. 对于经历局部化变形的材料,  $L^{cp}$  的测定显然直接影响到  $\bar{E}^{ps}$  的取值, 进而影响到计算结果.

### 4 算例和讨论

假定拉杆的尺寸和材料特性如下:  $L = 100 \text{ mm}$ ,  $E = 20\,000 \text{ MPa}$ , 线性软化模量  $\bar{E}^{ps} = -2\,000 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_{Y0} = 2 \text{ MPa}$ . 杆件中心弱区域的屈服强度  $\sigma_{Y0}^w = 1.8 \text{ MPa}$ . 将这些数据代入式 (56) 和式 (57), 并采用一维高斯权函数式 (58), 可得到塑性应变的分布和应力位移曲线分别如图 2 和图 3 所示. 为了比较不

同材料内尺度对计算结果的影响,图2和图3给出了材料内尺度  $l$  分别取 3 mm, 4 mm, 5 mm, 8 mm, 10 mm 时的计算结果以进行比较. 图2表明,变形局部化区域的尺寸随着材料内尺度的减小而减小,同时塑性应变也随着材料内尺度的减小变得更加集中. 图3表明,峰值后的载荷-位移曲线下降段随着材料内尺度的减小而更加陡峭. 这种趋势表明,随着  $l \rightarrow 0$ , 当  $L^{\text{CP}} = L(-\bar{E}^{\text{ps}}/E)$  时,峰值后的载荷-位移曲线就会出现最陡的下降路径,当  $L^{\text{CP}} < L(-\bar{E}^{\text{ps}}/E)$  时,载荷-位移曲线会出现“回弹”(snap-back)现象,这正是局部连续介质模型预测的结果,当采用数值方法求解时,会得到与网格相关的结果. 这说明,当  $l \rightarrow 0$  时,非局部效应消失,非局部塑性模型退化成局部塑性模型.

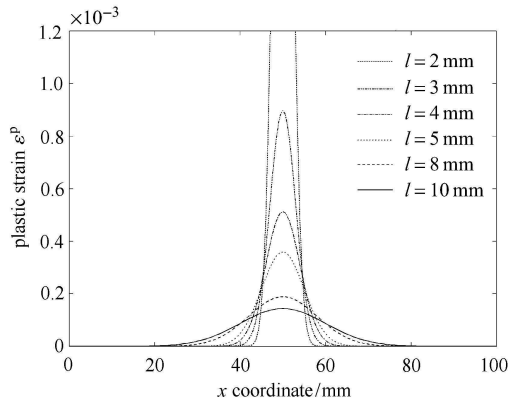


图2 不同材料内尺度下拉杆内的塑性应变分布

Fig. 2 Plastic strain distributions along the axis of the bar for different internal length scales

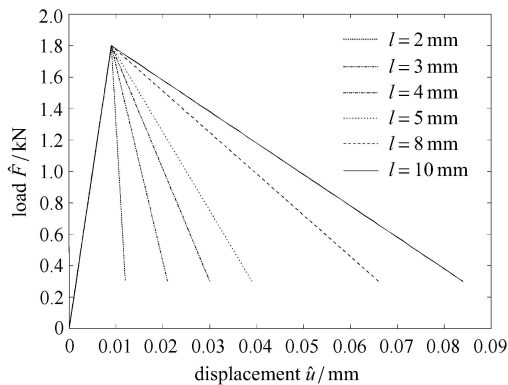


图3 不同材料内尺度下拉杆的载荷-位移曲线

Fig. 3 Load-displacement curves of the bar with different internal length scales

在一般非局部塑性模型中,屈服应力表达为非局部内变量的函数,在塑性流动阶段,由非局部内

变量求解局部内变量时需要求解第一类 Fredholm 积分方程,而第一类 Fredholm 积分方程本身是不适定的 (ill-posed). 当非局部内变量具有微小的扰动时,局部内变量具有无穷大的变化. 由此导致当材料体某一点首先屈服时,尽管非局部内变量具有有限的大小,但局部内变量在初始屈服点无穷大,最终使塑性应变集中于尺寸为零的区域而不能扩展至有明确定义的区域. 当采用数值方法求解时,计算结果依赖于网格尺寸的大小和划分方式.

在混合非局部塑性模型中,通过引入一个非局部参数  $m > 1$  对局部和非局部内变量进行加权平均,从而得到一个过非局部内变量 (over nonlocal internal variable),并将屈服应力表达为过非局部内变量的函数. 由此,局部和非局部内变量的关系变为第二类 Fredholm 积分方程. 第二类 Fredholm 积分方程本身是适定的,具有稳定且唯一的解,对有些核,甚至有解析解. Lü 等<sup>[34]</sup>采用自然指数函数作为核,获得了一维混合非局部塑性模型的解析解. 但是,采用混合非局部模型除了需要材料内尺度外,还要引入另一个非局部参数  $m$ . Luzio 和 Bažžant<sup>[21]</sup>证明了变形局部化区域的尺寸随着混合非局部参数  $m$  的增加而增大. 然而,在实际应用中对  $m$  具体值的选取具有任意性 (只要大于 1 即可),导致变形局部化区域的尺寸会由于  $m$  的不同而不同. 而且非局部参数  $m$  的物理意义仍然不清楚.

本文所提方法的优点在于通过局部和非局部状态空间塑性能量变化率的等效,将局部塑性模型中集中于离散点的内变量按照非局部权函数的分布形式平滑分布于非局部状态空间,从而得到塑性应变分布的客观解,使得变形局部化区域的长度只与材料内尺度有关,既避免了直接求解第一类 Fredholm 积分方程,也回避了在本构模型中引入另外的参数.

## 5 结 论

本工作根据第一热力学定律,应用非局部塑性理论,提出了一种求解应变局部化问题的新方法. 该方法可以克服传统的连续介质力学模型的缺陷,得到应变局部化问题的客观解. 通过定义两个状态空间,即局部和非局部状态空间,使两个状态空间的塑性应变能耗散率相等,从而得到明确定义的局部化区域和其中的塑性应变分布. 本方法保证了材料的总能量耗散是非负的,同时动量平衡和塑性一致性条件都局部得到满足.



应用本文方法对一维问题获得了解析解. 针对高斯权函数得到了局部化区域尺寸和材料内尺度的近似关系. 算例表明, 局部化区域的尺寸和塑性应变的分布都仅与材料特性有关. 随着材料内尺度的减小, 局部化区域的尺寸减小, 但是塑性应变的集中程度增大. 当内尺度趋近于零时, 用本文方法得到的结果接近于传统的局部塑性理论所得到的解.

与混合非局部塑性模型相比, 本文提出的模型并不需要引入另外的非局部参数, 并且对一般的非局部权函数在一维情况下都可以获得解析解. 在本研究的下一篇文章“基于能量等效的应变局部化分析 II: 有限元解法”中将会看到, 本文所提出的方法在有限元分析中容易实现, 且只需要单元之间的位移插值函数具有  $C^0$  连续性.

### 参 考 文 献

- 1 Read HE, Hegemier GA. Strain softening of rock, soil and concrete—a review article. *Mechanics and Materials*, 1984, 3(3): 271-294
- 2 Vardoulakis I. Shear band inclination and shear modulus of sand in biaxial test. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1980, 4(2): 103-119
- 3 Jirásek M, Bažant ZP. *Inelastic Analysis of Structures*. Chichester, England: John Wiley & Sons, 2002
- 4 邵龙潭, 刘港, 郭晓霞. 三轴试样破坏后应变局部化影响的实验研究. *岩土工程学报*, 2016, 38(3): 385-394 (Shao Longtan, Liu Gang, Guo Xiaoxia. Effects of strain localization of triaxial samples in post-failure state. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2016, 38(3): 385-394 (in Chinese))
- 5 李学丰, 黄茂松, 钱建固. 基于非共轴理论的各向异性砂土应变局部化分析. *工程力学*, 2014, 31(3): 205-246 (Li Xuefeng, Huang Maosong, Qian Jiangu. Strain localization analysis of anisotropic sands based on non-coaxial theory. *Engineering Mechanics*, 2014, 31(3): 205-246 (in Chinese))
- 6 王水林, 郑宏, 刘泉声等. 应变软化岩体分析原理及其应用. *岩土力学*, 2014, 35(3): 609-630 (Wang Shuilin, Zheng Hong, Liu Quansheng, et al. Principle of analysis of strain-softening rock mass and its application. *Rock and Soil Mechanics*, 2014, 35(3): 609-630 (in Chinese))
- 7 钱建固, 吕玺琳, 黄茂松. 平面应变状态下土体的软化特性与本构模拟. *岩土力学*, 2009, 30(3): 617-622 (Qian Jiangu, Lü Xilin, Huang Maosong. Softening characteristics of soils and constitutive modeling under plane strain condition. *Rock and Soil Mechanics*, 2009, 30(3): 617-622 (in Chinese))
- 8 王杰, 李世海, 张青波. 基于单元破裂的岩石裂纹扩展模拟方法. *力学学报*, 2015, 47(1): 105-118 (Wang Jie, Li Shihai, Zhang Qingbo. Simulation of crack propagation of rock based on splitting elements. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2015, 47(1): 105-118 (in Chinese))
- 9 Pietruszczak ST, Mróz Z. Finite element analysis of deformation of strain-softening materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1981, 17(3): 327-334
- 10 Ortiz M, Leroy Y, Needleman A. A finite element method for localized failure analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1987, 61(2): 189-214
- 11 de Borst R, Sluys LJ, Mühlhaus HB, et al. Fundamental issues in finite element analyses of localization of deformation. *Engineering Computations*, 1993, 10(2): 99-121
- 12 Simo JC. Strain softening and dissipation: a unification of approaches//Mazars J, Bažant ZP, eds. *Cracking and Damage: Strain Localization and Size Effect*. London and New York: Elsevier Applied Science, 1988: 440-461
- 13 Schaeffer DG. Instability and ill-posedness in the deformation of granular materials. *International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1990, 14(4): 253-278
- 14 de Borst R, Mühlhaus HB. Gradient-dependent plasticity: formulation and algorithm aspects. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1992, 35(3): 521-539
- 15 Vermeer PA, Brinkgreve RBJ. A new effective non-local strain measure for softening plasticity//Chambon V, Desrues J, Vardoulakis I, eds. *Localisation and Bifurcation Theory for Soils and Rocks*, Rotterdam, Netherland: A. A. Balkema, 1994
- 16 Stromberg L, Ristinmaa M. FE-formulation of a nonlocal plasticity theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 136(1-2): 127-144
- 17 Lü XL, Bardet JP, Huang MS. Numerical solutions of strain localization with nonlocal softening plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2009, 198(47): 3702-3711 (in Chinese)
- 18 Lü XL, Bardet JP, Huang MS. Spectral analysis of nonlocal regularization in two-dimensional finite element models. *International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2012, 36(2): 219-235
- 19 Eringen AC. *Nonlocal Continuum Field Theories*. New York: Springer-Verlag, 2002
- 20 Bažant ZP, Lin FB. Nonlocal smeared cracking model for concrete fracture. *Journal of structural Engineering*, 1988, 114(11): 2493-2510
- 21 Luzio GD, Bažant ZP. Spectral analysis of localization in nonlocal and over-nonlocal materials with softening plasticity or damage. *International Journal of Solids and Structures*, 2005, 42(23): 6071-6100
- 22 Jirásek M, Rolshoven S. Comparison of integral-type nonlocal plasticity models for strain-softening materials. *International Journal of Engineering Science*, 2003, 41(13-14): 1553-1602
- 23 Nilsson C. Nonlocal strain softening bar revisited. *International Journal of Solids and Structures*, 1997, 34(34): 4399-4419
- 24 Borino G, Fuschi P, Polizzotto C. A thermodynamic approach to nonlocal plasticity and related variational principles. *Journal of Applied Mechanics*, 1999, 66(4): 952-963
- 25 de Sciarra FM. A general theory for nonlocal softening plasticity of integral-type. *International Journal of Plasticity*, 2008, 24(8): 1411-1439

- 26 Nguyen GD. A thermodynamic approach to non-local damage modeling of concrete. *International Journal of Solids and Structures*, 2008, 45(7-8): 1918-1934
- 27 Ogata K. *Modern Control Engineering*. 5th Edition. New Jersey: Prentice Hall, 2010
- 28 Tarn JQ. A state space formalism for anisotropic elasticity. Part I: Rectilinear anisotropy. *International Journal of Solids and Structures*, 2002, 39(20): 5157-5172
- 29 Simo JC, Hughes TJR. *Computational Inelasticity*. New York: Springer-Verlag, 1998
- 30 Reddy JN. *An Introduction to Continuum Mechanics*. New York: Cambridge University Press, 2008
- 31 陈昫, 金衍, 陈勉. 基于能量耗散的岩石脆性评价方法. *力学学报*, 2015, 47(6): 984-993 (Chen Yun, Jin Yan, Chen Mian. A rock brittleness evaluation method based on energy dissipation. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2015, 47(6): 984-993 (in Chinese))
- 32 Bažant Z, Pijaudier-Cabot G. Measurement of characteristic length of nonlocal continuum. *Journal of Engineering Mechanics*, 1989, 115(4): 755-767
- 33 Mühlhaus H-B, Vardoulakis I. The thickness of shear bands in granular materials. *Géotechnique*, 1987, 37(3): 271-283
- 34 Lü XL, Bardet JP, Huang MS. Length scales interaction in nonlocal plastic strain localization of bars of varying section. *Journal of Engineering Mechanics*, 2010, 136(8): 1036-1042